Diferenciálne rovnice

Juraj Tekel
Katedra teoretickej fyziky
FMFI UK
Mlynska Dolina
842 48 Bratislava

juraj(a)tekel(b)gmail(c)com
https://davinci.fmph.uniba.sk/~tekel1/teaching_difky.html
Aktualizované 2. novembra 2026

Poznámky k prednáškam. Súbor je „work in progress“, poznámky zväčša len heslovito, postupne sa budú dopĺňať. Ak uvidíte preklep/chybu/nedostatok v niečom, čo sa tvári aspoň trochu finálne, budem veľmi rád ak mi dáte vedieť.

Technická poznámka : biely štvorec označuje koniec zadania príkladu, čierny štvorec koniec riešenia. Za bielym štvorcom zvačša nasleduje riešnie, za čiernym štvorcom nasleduje ďalší text.

Obsah

1 Parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu **6**
1.1 Lineárne rovnice . . . 6
1.2 Kvázilineárne rovnice . . . 12
1.3 Nelineárne rovnice . . . 15
1.4 Aplikácie rovníc prvého rádu . . . 23

2 Parciálne diferenciálne rovnice druhého rádu – úvod **34**
2.1 Klasifikácia rovníc v n rozmeroch . . . 34
2.2 Klasifikácia rovníc v dvoch rozmeroch . . . 37

3 Vlnová rovnica a rovnica vedenia tepla v jednom rozmere **45**
3.1 Vlnová rovnica v jednom rozmere . . . 45
3.2 Rovnica vedenia tepla v jednom rozmere . . . 61
3.3 Porovnanie vlastností riešení . . . 66
3.4 Cauchyho úloha na všeobecnej krivke . . . 71

4 Teória distribúcií **78**
4.1 Distribúcie na funkciách s kompaktným nosičom . . . 78
4.2 Operácie s distribúciami . . . 84
4.3 Temperované distribúcie a Fourierova transformácia . . . 96

5 Cauchyho úloha pre vlnovú rovnicu a rovnicu vedenia tepla **107**
5.1 Greenova funkcia lineárneho operátora . . . 107
5.2 Riešenie rovnice vedenia tepla . . . 111
5.3 Riešenie vlnovej rovnice . . . 113

6 Okrajové úlohy pre Poissonovu rovnicu a zovšeobecnenia **124**
6.1 Klasifikacia okrajových úloh . . . 125
6.2 Vlastnosti harmonických funkcií . . . 125
6.3 Riešenie Dirichletovej okrajovej úlohy . . . 128
6.4 Riešenie Neumannovej okrajovej úlohy . . . 139
6.5 Doplňujúce časti . . . 141

7 Fourierova metóda riešenia PDE **143**
7.1 Fourierova metóda v dvoch rozmeroch . . . 144
7.2 Fourierova metóda vo všobecnom prípade . . . 159
7.3 Vlastné funkcie Laplaciánu v dvoch a troch priestorových rozmeroch . . . 163
7.4 Rovnice vo viacerých rozmeroch . . . 168
7.5 Spektrálny rozklad samoadjungovaných operátorov . . . 171

8 Zovšeobecnená úloha a Sobolevove priestory **173**

9 Nelinárne rovnice a rovnice vyššých rádov **174**
9.1 Razy revisited . . . 174
9.2 Burgersova rovnica . . . 175
9.3 KdV rovnica . . . 178
9.4 sine-Gordon rovnica . . . 180
9.5 Dispezia . . . 183

Úvod do parciálnych diferenciálnych rovníc

Parciálna diferenciálna rovnica (PDE) je rovnica pre neznámu funkciu viacerých premenných

$$u = u(x_1, \ldots, x_n) = u(\vec{x}) \ , \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ , \tag{0.1}$$

v ktorej vystupujú parciálne derivácie tejto funkcie. Všeobecne ju môžeme zapísať v tvare

$$F\left(\vec{x}, u, \partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1 x_1} u, \partial_{x_1 x_2} u, \ldots\right) = 0 \ , \tag{0.2}$$

kde F je zadaná funkcia, ktorá závisí od premenných $\vec{x}$, od hľadanej funkcie u a od konečného počtu jej parciálnych derivácií. Pre parciálne derivácie budeme používať niekoľko rovnocenných zápisov,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv \partial_{x_i} u \equiv u_{x_i} \ , \tag{0.3}$$

a podobne pre vyššie derivácie, napríklad $\partial_x \partial_y u \equiv u_{xy}$.

V čom sa takáto rovnica líši od obyčajnej diferenciálnej rovnice, dobre vidno už na veľmi jednoduchom príklade.

Príklad 1. Pre funkciu dvoch premenných $u(x, y)$ nájdite všeobecné riešenie nasledujúcich rovníc.

$$u_x = 1 \ , \tag{0.4}$$

$$u_{xx} = -u \ . \tag{0.5}$$

□

Riešenie. Obe rovnice obsahujú iba derivácie podľa x, takže nám nič nehovoria o tom, ako riešenie závisí od y. Premennú y preto môžeme brať ako parameter a riešiť obyčajné diferenciálne rovnice v premennej x. Tam, kde by sme pri obyčajnej rovnici dostali integračnú konštantu, dostaneme teraz čokoľvek, čo sa pri derivovaní podľa x správa ako konštanta, teda ľubovoľnú funkciu premennej y. Riešenia sú

$$u(x, y) = x + h(y) \ , \tag{0.6}$$

$$u(x, y) = h_1(y) \sin x + h_2(y) \cos x \ , \tag{0.7}$$

kde h, h_1 a h_2 sú ľubovoľné funkcie. ■

Všeobecné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice teda namiesto niekoľkých konštánt obsahuje ľubovoľné funkcie. Rovnica má preto nekonečne veľa riešení a sama osebe riešenie neurčuje. Vždy k nej budú patriť ďalšie podmienky, napríklad počiatočné alebo okrajové, ktoré z tohto množstva vyberú to riešenie, ktoré nás zaujíma. Aké podmienky sú pre danú rovnicu prirodzené a kedy riešenie určujú jednoznačne, bude jednou z tém, ku ktorým sa budeme v texte stále vracať.

Na začiatok ešte niekoľko pojmov. **Rád rovnice** je rád najvyššej derivácie, ktorá sa v nej vyskytuje; rovnice v príklade sú teda prvého a druhého rádu. Mimoriadne dôležité sú **lineárne rovnice**, teda rovnice, ktoré sa dajú zapísať v tvare

$$\mathcal{L}u = g \ , \tag{0.8}$$

kde g je zadaná funkcia premenných $\vec{x}$ a $\mathcal{L}$ je lineárny diferenciálny operátor,

$$\mathcal{L}(u + cv) = \mathcal{L}u + c\mathcal{L}v \ , \quad c \in \mathbb{R} \ , \tag{0.9}$$

pre ľubovoľné funkcie u, v. Ak je $g = 0$, hovoríme o **homogénnej** rovnici

$$\mathcal{L}u = 0 \ , \tag{0.10}$$

v opačnom prípade o **nehomogénnej**. V príklade vyššie je prvá rovnica nehomogénna s operátorom $\mathcal{L} = \partial_x$ a druhá homogénna s operátorom $\mathcal{L} = \partial_{xx} + 1$. Rovnice, ktoré nie sú lineárne, nazývame **nelineárne**. Aj medzi nimi však budeme rozlišovať: v kapitole 1 uvidíme, že s rovnicami, ktoré sú lineárne aspoň v najvyšších deriváciách, sa pracuje podstatne ľahšie ako so všeobecnými nelineárnymi rovnicami.

Pre lineárne rovnice platí princíp superpozície. Lineárna kombinácia riešení homogénnej rovnice (0.10) je opäť jej riešením, takže tieto riešenia tvoria vektorový priestor. Pre riešenia nehomogénnej rovnice (0.8) to neplatí, lebo

$$\mathcal{L}(au + bv) = (a + b)g \ .$$

Rozdiel dvoch riešení nehomogénnej rovnice je však riešením homogénnej rovnice. Každé riešenie nehomogénnej rovnice teda dostaneme ako jedno pevne zvolené (partikulárne) riešenie, ku ktorému pripočítame nejaké riešenie homogénnej rovnice. Množine s takouto štruktúrou hovoríme afinný priestor[1]. Presne takýto tvar má aj riešenie $u = x + h(y)$ prvej rovnice z príkladu: x je partikulárne riešenie a $h(y)$ všeobecné riešenie homogénnej rovnice $u_x = 0$.

S mnohými parciálnymi diferenciálnymi rovnicami sa čitateľ už stretol. Tu je niekoľko najznámejších (fyzikálne konštanty sme kvôli prehľadnosti zväčša položili rovné jednej):

$\Delta u = f$	Poissonova rovnica, pre $f = 0$ Laplaceova rovnica,
$(\partial_t - \Delta)u = 0$	rovnica vedenia tepla (difúzna rovnica),
$(\partial_{tt} - \Delta)u = 0$	vlnová rovnica,
$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V\psi$	Schrödingerova rovnica,
$\partial_t\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$	Eulerova rovnica,
$\partial_t\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \nu\Delta\vec{u} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$	Navierove–Stokesove rovnice,
$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$	Kortewegova–de Vriesova rovnica,
$u_{tt} - u_{xx} + m^2u + u^3 = 0$	nelineárna Kleinova–Gordonova rovnica.

Ďalšími príkladmi sú Maxwellove rovnice, Einsteinove rovnice všeobecnej teórie relativity, rovnica eikonálu z geometrickej optiky či Blackova–Scholesova rovnica z finančnej matematiky.

V zozname sa niektoré operátory objavujú nápadne často, predovšetkým laplacián Δ, samotný alebo v kombinácii s časovými deriváciami. Nie je to náhoda. Laplacián je diferenciálny operátor

[1] V afinnom priestore je s každými dvoma prvkami u, v aj ich kombinácia $au+bv$ prvkom tohto priestoru, ak $a+b=1$.

najnižšieho rádu, ktorý sa nemení pri posunutiach a otočeniach priestoru, a preto sa objaví v každej fyzikálnej úlohe s týmito symetriami. Rovnicu vedenia tepla, vlnovú rovnicu a Laplaceovu rovnicu budeme v texte stretávať opakovane. Sú to aj typickí zástupcovia troch typov rovníc druhého rádu (parabolických, hyperbolických a eliptických), ktoré zavedieme v kapitole 2.

Napokon jedna poznámka, ktorú je dobré mať na pamäti od začiatku. Overiť, či je daná funkcia riešením parciálnej diferenciálnej rovnice, je jednoduché, stačí ju do rovnice dosadiť. Nájsť riešenie je však vo všeobecnosti veľmi ťažké. Na rozdiel od obyčajných diferenciálnych rovníc neexistuje univerzálny postup ani všeobecná veta o existencii a jednoznačnosti riešenia, ktorá by platila pre všetky rovnice[2]. Namiesto jednej teórie sa preto postupne naučíme niekoľko metód pre dôležité triedy rovníc: metódu charakteristík pre rovnice prvého rádu, metódu Greenových funkcií, pre ktorú si pripravíme aparát distribúcií, Fourierovu metódu separácie premenných a napokon niekoľko postupov pre vybrané nelineárne rovnice.

[2]Najbližšie k nej má Cauchyho–Kovalevskej veta, tá však predpokladá analytické koeficienty aj počiatočné podmienky a nehovorí nič o tom, ako citlivo riešenie závisí od počiatočných podmienok.

1 Parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu

Podľa očakávania to budú také rovnice, v ktorých vystupujú iba prvé derivácie, t. j.

$$F(\vec{x}, u, \vec{\nabla} u) = 0 \tag{1.1}$$

K tejto rovnici potrebujeme pridať podmienku, ktorá bude určovať riešenie. Tá bude v tvare

$$u|_\gamma = f(\vec{x}) \tag{1.2}$$

t. j. na nejakej nadploche[3] γ budeme mať zadané, ako riešenie vyzerá.

1.1 Lineárne rovnice

Všeobecná lineárna PDE prvého rádu má tvar

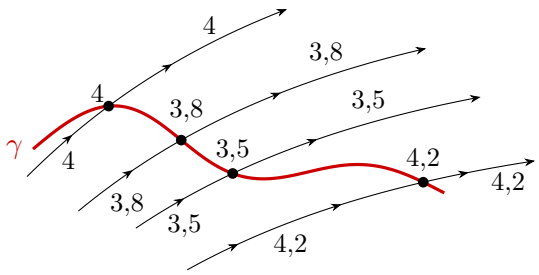
$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} u = g \tag{1.3}$$

kde $g(\vec{x}, u) = c(\vec{x})u + d(\vec{x})$ a vektorové pole $\vec{v}(\vec{x})$ sa môže s polohou meniť. Zatiaľ predpokladáme, že všetky funkcie, ktoré vystupujú ako parametre, sú hladké, teda sú spojité aj so svojou prvou deriváciou, teda $C^1(\mathbb{R}^n)$. K nej budeme mať počiatočnú podmienku

$$u|_\gamma = f(\vec{x}) \tag{1.4}$$

Tomu sa hovorí Cauchyho úloha.

Idea riešenia - homogénna rovnica hovorí, že v smere vektorového poľa $\vec{v}$ sa funkcia u nemení, nehomogénna potom hovorí, ako konkrétne sa táto hodnota mení. Potrebujeme teda nájsť integrálne krivky, po ktorých sa potom bude riešenie prenášať.



Obr. 1: Prenášanie počiatočnej hodnoty pozdĺž integrálnej krivky poľa $\vec{v}$.

Tu je tiež jasné, kedy bude problém - ak integrálne krivky ležia v nadploche γ (sú na ňu dotyčnicové), potom je riešenie určené nejednoznačne (ak je f kompatibilná) alebo neexistuje (ak f nie je kompatibilná). Ešte môže byť problém, ak daná charakteristika nepretína krivku γ. Toto spresníme neskôr. Ilustračný príklad, značne jednoduchá rovnica:

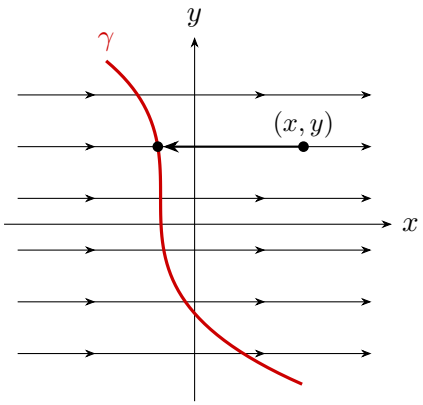
[3] rozmer γ je teda $n - 1$

Príklad 2. Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$u_x = 0 \tag{1.5}$$

□

Riešenie. Vektorové pole je v tomto prípade $\vec{v} = (1, 0)$ a jeho integrálne krivky sú vodorovné čiary, riešenie v mieste (x, y) teda nájdeme tak, že sa vrátime po vodorovnej čiare na miesto, kde stretneme krivku γ a hodnota funkcie $u(x, y)$ bude hodnota $f(y)$, ako ilustruje obrázok.



Obr. 2: Riešenie rovnice pre prípad $\vec{v} = (1, 0)$.

To je ale presne to, čo hovorí rovnica, že riešenie nezávisí od x a teda je to ľubovoľná funkcia $f(y)$. ■

Slovíčko - integrálnym krivkám $\vec{v}$ budeme hovoriť charakteristiky a označovať ich $\mathcal{C}$. Alebo naopak, charakteristická krivka bude taká krivka, ktorej dotyčnica je v každom bode daná vektorom $\vec{v}$.

O čosi komplikovanejší príklad:

Príklad 3. Nájdite riešenie rovnice s počiatočnou podmienkou

$$3u_x - 2u_y = 13(x + y) \ , \ u(0, y) = 0 \ . \tag{1.6}$$

□

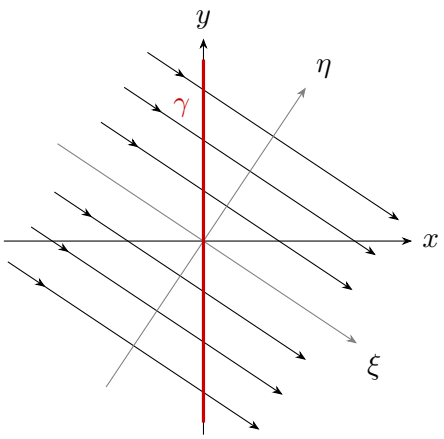
Riešenie. Integrálne krivky sú opäť rovné čiary, vracanie sa po krivke z bodu (x, y) však nie je pri konštantnom x.

Riešenie - prejde do súradníc, kde to tak bude. Nie je ťažké rozmyslieť si, že to vyrieši súradnica

$$\xi = 3x - 2y \tag{1.7}$$

$$\eta = 2x + 3y \tag{1.8}$$

Druhý smer sme zvolili kolmo na smer $\mathcal{C}$.



Obr. 3: Zámena súradníc $(x, y) \to (\xi, \eta)$.

Nie je problém vypočítať inverzný prechod

$$x = \frac{3\xi + 2\eta}{13} \tag{1.9}$$

$$y = \frac{-2\xi + 3\eta}{13} \tag{1.10}$$

Derivácie potom vyzerajú nasledovne

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 3u_\xi + 2u_\eta \tag{1.11}$$

$$u_y = -2u_\xi + 3u_\eta \tag{1.12}$$

Neprekvapuje nás, že po dosadení do rovnice vypadne u_η, lebo presne tak sme tieto súradnice zvolili. Dostaneme

$$u_\xi = \frac{1}{13}(\xi + 5\eta) \;\Rightarrow\; u(\xi, \eta) = \frac{1}{26}\xi^2 + \frac{5}{13}\eta\xi + h(\eta) \tag{1.13}$$

$$u(x, y) = \frac{69x^2 + 38xy - 56y^2}{26} + h(2x + 3y) \tag{1.14}$$

Funkciu h zistíme z počiatočnej podmienky $u(0, y) = \frac{-56y^2}{26} + h(3y) = 0$ a teda $h(z) = \frac{56(z/3)^2}{26} = \frac{28z^2}{117}$ čo dáva výsledok

$$u(x, y) = \frac{69x^2 + 38xy - 56y^2}{26} + \frac{28(2x + 3y)^2}{117} \tag{1.15}$$

■

Príklad 4. Nájdite riešenie rovnice

$$3u_x - 2u_y + u = 13(x + y)\ ,\ u(0, y) = 0\ . \tag{1.16}$$

□

Majme teda všeobecný dvojrozmerný prípad

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y) \tag{1.17}$$

hľadáme súradnice $\xi(x,y), \eta(x,y)$ tak, aby η bola rovnaká pozdĺž danej charakteristiky $\mathcal{C}$ a ξ bude hovoriť, kde na danej charakteristike sa nachádzame.

Zoberieme $\xi = x$ a budeme predpokladať, že charakteristiky nie sú nikde zvislé, onedlho od tohto predpokladu upustíme.

Vyjadríme u_x, u_y cez u_ξ, u_η, pozbierame členy pri u_η a budeme požadovať, aby sa navzájom vyrušili, čo dá

$$a\eta_x + b\eta_y = 0 \tag{1.18}$$

Charakteristiky budú vyjadrené ako funkcia $y(x)$ a chceme, aby sa súradnica η pozdĺž charakteristiky nemenila

$$\frac{d}{dx}\eta(x, y(x)) = 0 \tag{1.19}$$

to dá

$$\eta_x + \eta_y \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.20}$$

čo spolu s (1.18) dá rovnicu charakteristiky[4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \tag{1.21}$$

Toto je diferenciálna rovnica pre y, ktorej riešenie bude obsahovať jednu konštantu, táto konštanta bude hovoriť, na ktorej charakteristike sa nachádzame a teda to bude presne vyjadrenie súradnice η.

Rovnakú rovnicu dostaneme z nasledujúcej úvahy - ak sme v bode (x,y) a chceme prejsť do bodu $(x+dx, y+dy)$ v smere vektora (a,b), posunutia dx a dy nie sú nezávislé.

Rovnica potom prejde do tvaru

$$a(\xi,\eta)u_\xi = c(\xi,\eta)u + d(\xi,\eta) \tag{1.22}$$

Príklad 5. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{1}{x}u_x + 2xu_y = 0 \ , \ u(1,y) = 3y \ . \tag{1.23}$$

□

Riešenie. Rovnica pre charakteristiku je

$$y' = 2x^2 \ \Rightarrow \ y = \frac{2}{3}x^3 + C \ \Rightarrow \ \eta = y - \frac{2}{3}x^3 \ . \tag{1.24}$$

Z toho dostaneme vyjadrenie pre pôvodné súradnice

$$x = \xi \ , \ y = \eta + \frac{2}{3}\xi^3 \ . \tag{1.25}$$

[4]Rozmyslieť si, že sme vlastne použili vetu o implicitne zadanej funkcii.

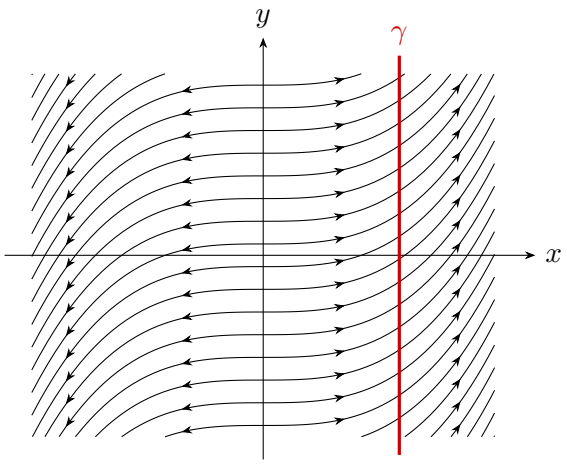
Rovnica prejde do tvaru

$$\frac{1}{\xi}u_\xi = 0 \;\Rightarrow\; u(\xi,\eta) = h(\eta) \;\Rightarrow\; u(x,y) = h\left(y - \frac{2}{3}x^3\right). \tag{1.26}$$

Z počiatočnej podmienky dostaneme $h(y - 2/3) = 3y$ a teda $h(z) = 3z + 2$, čo dá riešenie

$$u(x,y) = 3\left(y - \frac{2}{3}x^3\right) + 2 = 3y - 2x^3 + 2\ . \tag{1.27}$$

Ľahko overíme, že riešenie spĺňa rovnicu spolu s počiatočnou podmienkou. ■



Obr. 4: Charakteristiky v úlohe 5

Príklad 6. Na aké problémy by sme narazili, ak by bola v predchádzajúcej úlohe podmienka $u(x,1) = 3x$? □

Príklad 7. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{1}{x}u_x + 2xu_y = x + y\ ,\ u(1,y) = 3y\ , \tag{1.28}$$

$$yu_x + xu_y = 0\ . \tag{1.29}$$

□

Vo viacerých rozmeroch by rovnice pre charakteristiku boli $x_i(x_1), i \geq 2$ a boli by dané podmienkou

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{v_i}{v_1} \tag{1.30}$$

Z ktorých dostaneme vyjadrenie pre $n-1$ súradníc η_i. V týchto súradniciach bude mať rovnica tvar

$$v_1 u_\xi = c(\xi,\eta_i)u + d(\xi,\eta_i) \tag{1.31}$$

a to je opäť PDE iba v jednej premennej, takže vlastne ODE.

My by sme sa ale chceli zbaviť špeciálnej úlohy súradnice x_1. Zavedieme parameter krivky s, označujúci evolúciu pozdĺž charakteristiky od miesta, kde pretína γ, nech tento bod má súradnice $\vec{x}_0$.

Z bodu $\vec{x}$ na $\mathcal{C}$ spravím krok ds po $\mathcal{C}$ - t.j. v smere vektora $\vec{v}$, to znamená v každom smere spravím krok $dx_i = v_i ds$, čo mi dá n rovníc pre charakteristiky

$$\dot{x}_i = v_i \ . \tag{1.32}$$

Tejto sústave sa hovorí charakteristický systém.

K nej ide potom podmienka $\vec{x}(s=0) = \vec{x}_0$, takže výsledkom celého snaženia je n rovníc $x_i(s)$, ktoré sú parametrickým vyjadrením charakteristiky, ktorá pretína krivku γ v bode $\vec{x}_0$. Pre nás je ale úloha opačná, pre zadaný bod $\vec{x}$, v ktorom hľadáme riešenie, chceme nájsť hodnoty $\vec{x}_0, s$, aby sme vedeli odčítať hodnotu funkcie f. To sa ale nie vždy musí explicitne dať.

Riešenie. Vyriešime teraz príklad 5 touto metódou. Charakteristický systém je

$$\dot{x} = \frac{1}{x} \ , \ \dot{y} = 2x \tag{1.33}$$

čo nám dá

$$x = \pm\sqrt{2s + c_1} \ \Rightarrow \ y = \pm\frac{2}{3}\left(2s + c_1\right)^{3/2} + c_2 = \frac{2}{3}x^3 + c_2 \tag{1.34}$$

Z toho, že $\vec{x}_0 = (1, y_0)$ dostávame $\sqrt{c_1} = \pm 1$ a $c_2 = y_0 - 2/3$. Keďže rovnica je homogénna, dostávame pre riešenie $u(x,y)$ hodnotu počiatočnej podmienky v y_0 a teda:

$$u(x,y) = h\left(y - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\right) \ . \tag{1.35}$$

Ak sem teraz aplikujeme počiatočnú podmienku $h(y_0) = 3y_0$, dostaneme opäť:

$$u(x,y) = 3\left(y - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\right) = 3y - 2x^3 + 2 \ . \tag{1.36}$$

■

Príklad 8. Premyslite si, prečo tvary argumentov všeobecného riešenia (1.26) a (1.35) vyzerajú inak, hoci po dosadení počiatočnej podmienky dajú rovnaký výsledok. □

Tomuto celému sa hovorí metóda charakteristík a prevádza to PDE na systém ODE. Z existencie a jednoznačnosti riešenia ODE potom plynie existencia a jednoznačnosť riešenia PDE.

Je dobré uvedomiť si, čo vstupuje do riešenia v bode $\vec{x}$ ako parameter.

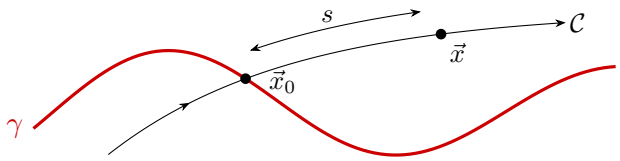
- $\vec{x}_0$ - miesto, kde krivka γ pretína charakteristiku, na ktorej leží bod $\vec{x}$.
- s - parameter, ktorý určuje kde na danej $\mathcal{C}$ sa bod $\vec{x}$ nachádza.
- tieto parametre sú samozrejme funkciou súradníc bodu $\vec{x}$.

Riešenie $u(\vec{x})$ potom nájdeme ako (pre nehomogénnu rovnicu patrične upravenú) hodnotu $f(\vec{x}_0)$.

Obrázok 5 lepší od tisíca slov.

Ostáva rozmyslieť si, čo sa bude diať, ak je rovnica nehomogénna, potom

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = v_i u_{x_i} = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}u \tag{1.37}$$



Obr. 5: Riešenie v bode $\vec{x}$ je určené bodom $\vec{x}_0$, v ktorom charakteristika $\mathcal{C}$ prechádzajúca bodom $\vec{x}$ pretína krivku γ, a parametrom s, ktorý udáva polohu bodu $\vec{x}$ na tejto charakteristike.

takže dostávame

$$\dot{u} = g \tag{1.38}$$

čo už je obyčajná diferenciálna rovnica.

Máte teda rovnicu $\dot{\vec{x}} = \vec{v}$ s počiatočnou podmienkou $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, ktorá má riešenie $\vec{x} = \vec{x}(s, \vec{x}_0)$. Riešením rovnice $\dot{u} = g$ je potom u ako funkcia s a $\vec{x}_0$. A keď sa nám podarí obrátiť vyjadrenie $\vec{x}$ a nájsť $(s, \vec{x}_0)(\vec{x})$ dostaneme hľadané vyjadrenie $u(\vec{x})$.

1.2 Kvázilineárne rovnice

Kvázilineárne = lineárne v najvyššom ráde derivácie. Pre PDE prvého rádu máme teda rovnicu

$$\vec{v}(\vec{x}, u) \cdot \vec{\nabla} u = g(\vec{x}, u) \tag{1.39}$$

s rovnakou počiatočnou podmienkou

$$u|_\gamma = f(\vec{x}) \tag{1.40}$$

Rovnicu preformulujeme do $n+1$ rozmerného priestoru so súradnicami

$$X^I = (x_1, \ldots, x_n, u) \tag{1.41}$$

Tomuto priestoru sa hovorí priestor 0-jetov J^0 a rovnica v ňom vyzerá nasledovne

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_X U = 0 \tag{1.42}$$

kde sme zadefinovali

$$V^I = (\vec{v}, g) \tag{1.43}$$

$$U = u(\vec{x}) - X^{n+1} \tag{1.44}$$

V tomto priestore je počiatočná podmienka daná krivkou (stále $n-1$ rozmernou)

$$\Gamma = \left\{ X \in J^0 \mid \vec{x} \in \gamma, X^{n+1} = f(\vec{x}) \right\} \tag{1.45}$$

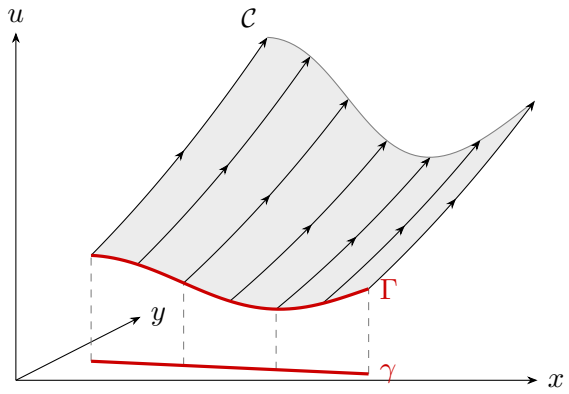
Úloha má teda geometrickú interpretáciu – hľadáme nadplochu v J^0 danú

$$\left\{ X : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, X^{n+1} = u(\vec{x}) \right\} \tag{1.46}$$

funkciou u tak, aby normálový vektor[5] k tejto ploche $(\vec{\nabla}u, -1)$ bol vždy kolmý na vektor V.

Vektorové pole V nám teda v každom bode priestoru J^0 určuje jeden zo smerov, v ktorom musí ležať dotyková rovina k ploche (1.46), zvyšných $n-1$ smerov nám určí počiatočná podmienka. Problém je evidentne, ak je počiatočná podmienka v smere V, kedy nejednoznačne určuje riešenie.

Úlohou je teda nájsť plochu, ktorá sa v každom bode dotýka V a ktorá obsahuje Γ - riešenie charakteristikami vektorového poľa. Z každého bodu Γ vyštartuje jedna integrálna krivka poľa V, zjednotenie týchto kriviek je hľadané riešenie.



Obr. 6: Riešenie kvázilineárnej rovnice ako zjednotenie charakteristík prechádzajúcich cez krivku Γ.

Rovnice pre integrálne krivky sú

$$\dot{x}_i = v_i \ , \tag{1.49}$$

$$\dot{X}^{n+1} = \dot{u} = g \ . \tag{1.50}$$

Tomuto sa opäť hovorí charakteristický systém a ide o sústavu $n+1$ previazaných ODE, do riešenia ktorých zakomponujeme to, že charakteristika musí prechádzať bodom na Γ. Nech je teda bod $\vec{x}_0 \in \Gamma$ určený sadou $n-1$ parametrov τ_j, tieto spolu s hodnotou parametra s v riešení charakteristického systému udávajú bod na n-rozmernej nadploche, ktorá je riešením našej rovnice. Niekedy sa budú z tejto sústavy dať eliminovať všetky parametre a namiesto vyjadrenia $\vec{x}(s,\tau), u(s,\tau)$ budeme vedieť nájsť riešenie v tvare $u(\vec{x})$, ale niekedy budeme vedieť nájsť riešenie iba v parametrickom tvare.

Dva príklady na ilustráciu.

Príklad 9. Nájdite riešenie rovnice

$$2u_x + 3u_y - u_z = u \ , \ \ u(1,y,z) = yz \ . \tag{1.51}$$

[5]Plocha riešenia $X^{n+1} = u(\vec{x})$ v priestore J^0 je nulovou vrstevnicou implicitnej funkcie:

$$U(\vec{x}, X^{n+1}) = u(\vec{x}) - X^{n+1} = 0 \tag{1.47}$$

Jej normálový vektor $\vec{N}$ je daný $(n+1)$-rozmerným gradientom tejto funkcie:

$$\vec{N} = \vec{\nabla}_X U = (\vec{\nabla}u, -1) \tag{1.48}$$

Podmienka $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_X U = 0$ tak priamočiaro znamená, že vektorové pole $\vec{V} = (\vec{v}, g)$ leží v dotykovej rovine tejto plochy.

□

Riešenie. Najskôr identifikujeme všetky ingrediencie. Γ je zadaná ako

$$\vec{x}_0 = (1, \tau_1, \tau_2) \tag{1.52}$$

kde hodnoty parametrov τ_1, τ_2 sú priamo súradnice y_0, z_0 a tak ich budeme ďalej písať. Charakteristický systém je potom

$$\dot{x} = 2 \ , \ \dot{y} = 3 \ , \ \dot{z} = -1 \ , \ \dot{u} = u \tag{1.53}$$

ktorého riešenie je

$$x = 2s + c_1 \ , \ y = 3s + c_2 \ , \ z = -s + c_3 \ , \ u = c_4 e^s \tag{1.54}$$

Z počiatočnej podmienky dostávame hodnoty konštánt

$$c_1 = 1 \ , \ c_2 = y_0 \ , \ c_3 = z_0 \ , \ c_4 = f(1, y_0, z_0) = y_0 z_0 \ . \tag{1.55}$$

Dostali sme teda parametrické vyjadrenie riešenia skrz parametre s, y_0, z_0. V tomto prípade sa nám však ľahko podarí nájsť aj explicitné vyjadrenie pre u. Z rovnice pre x dostaneme $s = (x-1)/2$ a z ďalších dvoch rovníc potom vyjadrenie pre y_0 a z_0. To keď dosadíme do poslednej rovnice, dostaneme výsledný tvar riešenia:

$$u(x, y, z) = \left(y - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) e^{\frac{x-1}{2}} \ . \tag{1.56}$$

■

Príklad 10. Nájdite riešenie rovnice

$$u_x + u^2 u_y = 0 \ , \ u(0, y) = 2 + y \ . \tag{1.57}$$

□

Riešenie. Charakteristický systém je

$$\dot{x} = 1 \ , \ \dot{y} = u^2 \ , \ \dot{u} = 0 \tag{1.58}$$

a jeho riešenie je

$$x = s + c_1 \ , \ u = c_2 \ , \ y = c_2^2 s + c_3 \tag{1.59}$$

Počiatočná podmienka dá

$$c_1 = 0 \ , \ c_3 = y_0 \ , \ c_2 = 2 + y_0 \tag{1.60}$$

Dostávame teda, že ako parameter s môžeme použiť priamo x a z rovníc pre y dostaneme vyjadrenie pre y_0

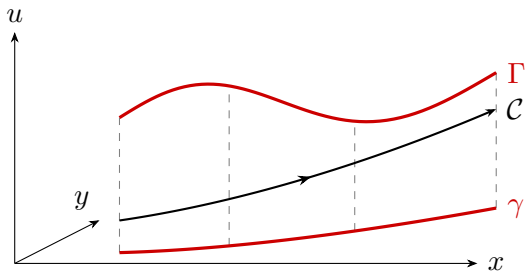
$$y_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8x + 4xy}}{2x} - 2 \tag{1.61}$$

To dá výsledné explicitné vyjadrenie riešenia

$$u(x, y) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8x + 4xy}}{2x} \tag{1.62}$$

Zdá sa teda, že máme dve riešenia a teda nejednoznačnosť. Avšak ľahko sa presvedčíme, že v limite $x \to 0$ dá iba znamienko + riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku. ■

Problém s jednoznačnosťou, resp. existenciou riešenia vzniká, keď je v niektorom z bodov charakteristika v smere Γ, vtedy máme nekonečne veľa riešení. Všeobecne v okolí bodu, v ktorom sa Γ dotýka nejakej charakteristiky, nebude riešenie dané jednoznačne. Riešenie nebude (lokálne) existovať vôbec v bodoch, v okolí ktorých sa Γ premietne do priestoru $\vec{x}$-ov na tú istú krivku ako nejaká charakteristika, avšak v úplnom priestore J^0 ide o inú krivku. Vtedy ide Γ „ponad“ alebo „popod“ charakteristiku. Rozmyslite si, ako tieto dve situácie súvisia s existenciou/jednoznačnosťou riešenia lineárnej rovnice.



Obr. 7: Situácia, kedy riešenie neexistuje: Krivka Γ a charakteristika $\mathcal{C}$ majú totožný priemet do roviny $x-y$, ale v priestore J^0 idú mimo seba, pričom nemajú ani rovnaký tvar.

1.3 Nelineárne rovnice

Budeme hľadať riešenie všeobecnej rovnice prvého rádu

$$F(\vec{x}, u, \vec{\nabla} u) = 0 \tag{1.63}$$

Najskôr kuchynský recept na riešenie

Rovnicu zapíšeme v tvare

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{1.64}$$

Teda sme nahradili $\partial_{x_i} u \to p_i$ a $u \to z$. Riešenie rovnice (1.63) je dané nasledujúcou sústavou ODE:

$$\dot{x}_i = \partial_{p_i} F \tag{1.65a}$$

$$\dot{p}_i = -\partial_{x_i} F - p_i \partial_z F \tag{1.65b}$$

$$\dot{z} = p_i \partial_{p_i} F \tag{1.65c}$$

Ide o $2n+1$ rovníc, ktoré k sebe potrebujú $2n+1$ počiatočných podmienok. Tie dostaneme z toho, že pre parameter $s = 0$ (opäť označujeme $x_i(0, \tau) = x_{i0}$ a podobne pre ostatné premenné):

- Musí byť splnená rovnica
$$F(\vec{x}_0, z_0, \vec{p}_0) = 0 \ . \tag{1.66}$$
- Bod $(\vec{x}_0, z_0)$ musí ležať na Γ, t.j.
$$\vec{x}_0 \in \gamma \ , z_0 = f(\vec{x}_0) \ . \tag{1.67}$$

- Súradnice p_0 musia správne určovať prvé derivácie funkcie f v tomto bode. Tu sa oplatí byť o čosi podrobnejší. Bod na γ je daný sadou parametrov τ_j, z_0 je teda tiež funkcia týchto parametrov, jej derivácia podľa τ_j je potom

$$\frac{\partial z_0}{\partial \tau_j} = \frac{\partial z_0}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \tau_j}\bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \ , \ j = 1, \ldots, n-1 \tag{1.68}$$

  Prvý z týchto členov je hodnota p_{i0}, druhý vieme vypočítať zo zadania krivky γ.

Dostávame teda postupne $1, n+1, n-1$ rovníc, ktoré dajú dohromady $2n+1$ počiatočných podmienok.

Riešenie potom dostaneme ako $u = z(s, \tau)$, pričom sa môžeme pokúsiť z vyjadrenia $\vec{x}(s, \tau)$ dostať vyjadrenie $(s, \tau)(\vec{x})$ a explicitné vyjadrenie $u(\vec{x})$.

Niekoľko poznámok k metóde:

- Len pre ujasnenie, doteraz boli a takmer vždy budú parametre τ dané priamo nejakými súradnicami $x_0, y_0, \ldots$

- Nie je ťažké overiť, že za týchto podmienok dostaneme pre funkcie $\vec{x}(s), u(s) = z(s), \vec{p}(s)$

$$\frac{d}{ds}F(\vec{x}, z, \vec{p}) = 0 \tag{1.69}$$

  a teda že rovnica platí pozdĺž celej čiary danej $\vec{x}(s)$, keďže tam platila v bode $\vec{x}_0$.

- Urobili sme teda čosi podobne ako v prípade kvázilineárnej rovnice. Prešli sme do bohatšieho priestoru, v ktorom je riešenie dané ako nejaká plocha, ktorú nájdeme ako zjednotenie charakteristík prechádzajúcich cez počiatočnú podmienku. Tomuto priestoru sa hovorí priestor 1-jetov a budeme ho označovať J^1.

- V prípade dvoch rozmerov $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{p} = (p, q)$ je rovnica

$$F(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) = 0 \ , \ u|_\gamma = f(x, y) \tag{1.70}$$

  pričom γ je jednorozmerná, takže body na nej sú dané jedným parametrom τ. Recept na riešenie v tomto prípade vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = \partial_p F & \\ \dot{y} = \partial_q F & \gamma = \{x_0 = x_0(\tau), y_0 = y_0(\tau)\} \\ \dot{p} = -\partial_x F - p\partial_z F & z_0 = f\left(x_0(\tau), y_0(\tau)\right) \\ \dot{q} = -\partial_y F - q\partial_z F & F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0 \\ \dot{z} = p\partial_p F + q\partial_q F & \frac{dz_0}{d\tau} = p_0\frac{dx_0}{d\tau} + q_0\frac{dy_0}{d\tau} \end{array} \tag{1.71}$$

- **Podmienka transverzality:** Aby hľadaná plocha $u(\vec{x})$ naozaj vznikla a charakteristiky priestor pokryli jednoznačne (a nezhustili sa len pozdĺž počiatočnej krivky γ), priemet charakteristického smeru do roviny $\vec{x}$ nesmie byť rovnobežný s dotyčnicou k γ. V dvoch rozmeroch, ak je γ parametrizovaná ako $(x_0(\tau), y_0(\tau))$, to znamená, že determinant ich smerových vektorov musí byť nenulový:

$$\det\begin{pmatrix} x_0'(\tau) & y_0'(\tau) \\ F_p & F_q \end{pmatrix} = x_0' F_q - y_0' F_p \neq 0 \tag{1.72}$$

Ak táto podmienka neplatí, metóda zlyháva, počiatočná krivka je sama charakteristikou a riešenie z nej nevieme jednoznačne rozšíriť. Z geometrického hľadiska Mongeovho kužeľa to znamená, že počiatočná krivka sa kužeľa nedotýka zvonku, ale „kĺže“ priamo po jeho povrchu.

Príklad 11. Nájdite riešenie rovnice

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \ , \ u(x,x) = 0 \ . \tag{1.73}$$

□

Riešenie. Identifikujeme ingrediencie (derivovanie podľa parametra τ budeme označovať čiarkou) a počiatočné podmienky. Krivku γ parametrizujeme ako priamku $y = x$:

$$\begin{array}{lll} F(x,y,z,p,q) = p^2 + q^2 - 1 & \Rightarrow p_0^2 + q_0^2 = 1 & \\ x_0(\tau) = \tau & \Rightarrow x_0' = 1 & \\ y_0(\tau) = \tau & \Rightarrow y_0' = 1 & \Rightarrow 0 = p_0 \cdot 1 + q_0 \cdot 1 \\ z_0(\tau) = 0 & \Rightarrow z_0' = 0 & \end{array} \tag{1.74}$$

Z tretej rovnice priamo vyplýva $q_0 = -p_0$, čo po dosadení do prvej dáva $2p_0^2 = 1$. Máme teda dve možnosti pre počiatočné hybnosti: $p_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $q_0 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kontrola transverzality: $\det = x_0' F_q - y_0' F_p = 1(2q_0) - 1(2p_0) = 2(q_0 - p_0)$. Keďže $q_0 = -p_0$, determinant je $\mp 2\sqrt{2} \neq 0$. Podmienka je bezpečne splnená.

Dostať charakteristický systém rovníc je priamočiare, jeho riešením je (využijeme $p^2 + q^2 = 1$):

$$p = c_1 \ , q = c_2 \ , \ x = 2c_1 s + c_3 \ , \ y = 2c_2 s + c_4 \ , \ z = 2s + c_5 \tag{1.75}$$

Z počiatočných podmienok potom dostaneme pre zvolené znamienko:

$$c_1 = p_0 \ , \ c_2 = q_0 \ , \ c_3 = \tau \ , \ c_4 = \tau \ , \ c_5 = 0 \tag{1.76}$$

Dosadením do rovníc pre súradnice máme:

$$x = 2p_0 s + \tau \ , \quad y = 2q_0 s + \tau \ , \quad z = 2s \tag{1.77}$$

Z rovníc pre x a y eliminujeme τ ich odčítaním:

$$x - y = 2s(p_0 - q_0) \tag{1.78}$$

Nakoľko $q_0 = -p_0$, dostávame $x - y = 4p_0 s$, z čoho si vyjadríme parameter $s = \frac{x-y}{4p_0}$. Keďže $z = 2s$, výsledné riešenie je:

$$u(x,y) = z = 2\left(\frac{x-y}{4p_0}\right) = \frac{x-y}{2p_0} \tag{1.79}$$

Po dosadení $p_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ dostávame dve platné riešenia úlohy:

$$u(x,y) = \pm\frac{x-y}{\sqrt{2}} \tag{1.80}$$

Ľahko sa dá overiť, že $u_x^2 + u_y^2 = (\pm 1/\sqrt{2})^2 + (\mp 1/\sqrt{2})^2 = 1/2 + 1/2 = 1$, a $u(x,x) = 0$. ■

Príklad 12. Nájdite riešenie rovnice s nenulovou počiatočnou podmienkou

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \ , \ u(x,x) = x \ . \tag{1.81}$$

□

Riešenie. Postupujeme rovnako, pričom krivku γ parametrizujeme ako priamku $y = x$ a počiatočná hodnota z bude priamo τ:

$$\begin{array}{lll} F(x,y,z,p,q) = p^2 + q^2 - 1 & \Rightarrow p_0^2 + q_0^2 = 1 & \\ x_0(\tau) = \tau & \Rightarrow x_0' = 1 & \\ y_0(\tau) = \tau & \Rightarrow y_0' = 1 & \Rightarrow 1 = p_0 \cdot 1 + q_0 \cdot 1 \\ z_0(\tau) = \tau & \Rightarrow z_0' = 1 & \end{array} \tag{1.82}$$

Z tretej rovnice si vyjadríme $q_0 = 1 - p_0$ a dosadíme do prvej (podmienka z rovnice $F = 0$):

$$p_0^2 + (1 - p_0)^2 = 1 \Rightarrow 2p_0^2 - 2p_0 = 0 \Rightarrow 2p_0(p_0 - 1) = 0 \tag{1.83}$$

Dostávame opäť dve sady počiatočných hybností, tentoraz $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ (prvá vetva) a $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ (druhá vetva).

Kontrola transverzality: Pre obe vetvy skontrolujeme determinant zložiek:

$$\det = x_0' F_q - y_0' F_p = 1(2q_0) - 1(2p_0) = 2(q_0 - p_0) \tag{1.84}$$

Pre prvú vetvu je $\det = -2 \neq 0$. Pre druhú vetvu je $\det = 2 \neq 0$. Obe vetvy sú teda v poriadku a metóda bude fungovať.

Charakteristický systém a jeho integrácia pre $F = p^2 + q^2 - 1$ je zhodná s predchádzajúcim príkladom:

$$p = c_1 \ , q = c_2 \ , \ x = 2c_1 s + c_3 \ , \ y = 2c_2 s + c_4 \ , \ z = 2s + c_5 \tag{1.85}$$

Riešenie pre 1. vetvu ($p_0 = 1, q_0 = 0$): Konštanty z počiatočných podmienok sú $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = \tau, c_4 = \tau, c_5 = \tau$. Rovnice pre súradnice a riešenie:

$$x = 2s + \tau \ , \quad y = \tau \ , \quad z = 2s + \tau \tag{1.86}$$

Z rovnice pre y vieme, že $\tau = y$. Dosadíme do rovnice pre x:

$$x = 2s + y \Rightarrow 2s = x - y \tag{1.87}$$

Výsledné riešenie $u(x,y)$ je hodnota z:

$$u(x,y) = z = (x - y) + y = x \tag{1.88}$$

Riešenie pre 2. vetvu ($p_0 = 0, q_0 = 1$): Konštanty sú $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = \tau, c_4 = \tau, c_5 = \tau$.

$$x = \tau \ , \quad y = 2s + \tau \ , \quad z = 2s + \tau \tag{1.89}$$

Z rovnice pre x máme $\tau = x$. Dosadíme do y:

$$y = 2s + x \Rightarrow 2s = y - x \tag{1.90}$$

Výsledné riešenie pre túto vetvu:

$$u(x, y) = z = (y - x) + x = y \tag{1.91}$$

Obe riešenia $u(x, y) = x$ a $u(x, y) = y$ spĺňajú pôvodnú rovnicu $u_x^2 + u_y^2 = 1$ aj počiatočnú podmienku $u(x, x) = x$. ■

Príklad 13. Nájdite riešenie rovnice

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \ , \ u(x, 0) = \frac{1}{2}x \ . \tag{1.92}$$

□

Výsledok. Riešením je funkcia

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}y \ . \tag{1.93}$$

Dôležitá poznámka: vidíme, že sme dostali nejednoznačné riešenia, ale ľahko overíme, že vždy je splnená rovnica aj počiatočná podmienka. Jednoznačnosť riešenia je zaručená až po získaní hodnôt počiatočných parametrov p_0, q_0. Tie ale nemusia byť určené jednoznačne, lebo rovnice pre ne nie sú lineárne a môžu mať viac riešení.

Odvodenie receptu

V tejto časti budeme pracovať s pevným, ale ľubovoľným bodom priestoru J^0, ktorý nemusí ležať na Γ. Aby sme ho nezamieňali s bodmi na Γ, ktoré značíme indexom 0, označíme ho pruhom, $(\bar{\vec{x}}, \bar{z})$.

Opäť v priestore J^0. Nadplocha daná podmienkou $z = u(\vec{x})$ má v bode $\bar{\vec{x}}$ normálový vektor

$$\vec{N} = \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{\bar{\vec{x}}}, \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{\bar{\vec{x}}}, \ldots, -1 \right) = (\vec{p}, -1) \tag{1.94}$$

Riešenie rovnice (1.95) je $n - 1$ rozmerná plocha a na nej môžu ležať možné vektory $\vec{N}$. Ak sa nachádzame v nejakom konkrétnom bode $\bar{\vec{x}}, \bar{z}$, rovnica

$$F(\bar{\vec{x}}, \bar{z}, \vec{p}) = 0 \tag{1.95}$$

je rovnica pre možné hodnoty $\vec{p}$. V každom bode máme teda vejár možných normálových vektorov dotykovej roviny k riešeniu $u(\vec{x})$.

Všimnite si, že predtým bol celý tento vejár v rovine, nakoľko normálový vektor musel byť kolmý na smer daný vektorovým poľom $\vec{V}$.

Obálka všetkých možných rovín, ktoré spĺňajú predchádzajúcu podmienku, sa nazýva **Mongeov kužeľ** - dotyková rovina sa musí dotýkať tohto kužeľa. O skutočný geometrický kužeľ ide iba pre prípad kvadratických rovníc. A aj to nie vždy, ako uvidíme v úlohe 15. Pre vyššie mocniny ide o komplikovanejší útvar. Všeobecne ide o obálku rovín, ktorých normálový vektor sa nachádza na krivke danej (algebraickou) rovnicou (1.95).

Príklad 14. Ukážte, že pre rovnicu $u_x^2 + u_y^2 = 1$ je obálka možných dotykových rovín k riešeniu rovnice kužeľ. □

Riešenie. V každom bode musí platiť $p^2 + q^2 = 1$. Rovnica roviny, ktorá prechádza cez bod $\bar{\vec{x}}, \bar{z}$ a má normálový vektor $(p, q, -1)$, je

$$z - \bar{z} = p(x - \bar{x}) + q(y - \bar{y}) \tag{1.96}$$

Ak má byť táto rovina dotykovou k riešeniu rovnice, musí byť splnené $p^2 + q^2 = 1$.

Nás bude zaujímať, ako bude vyzerať dotyková rovina daná o trochu iným p, konkrétne $p + dp$. Z vyjadrenia $q = \pm\sqrt{1 - p^2}$ dostaneme

$$q + dq = \pm\sqrt{1 - p^2} + \frac{d\left(\pm\sqrt{1 - p^2}\right)}{dp} dp = \pm\sqrt{1 - p^2} \pm \frac{-p}{\sqrt{1 - p^2}} dp \tag{1.97}$$

a teda táto rovina má rovnicu

$$z - \bar{z} = (p + dp)\,(x - \bar{x}) + \left(\pm\sqrt{1 - p^2} \pm \frac{-p}{\sqrt{1 - p^2}} dp\right)(y - \bar{y}) \tag{1.98}$$

Prienik rovín (1.96) a (1.98) bude priamka, ktorá bude ležať v obálke, ktorú hľadáme (premyslieť) a teda

$$(x - \bar{x}) \pm \frac{-p}{\sqrt{1 - p^2}}(y - \bar{y}) = 0 \tag{1.99}$$

Z toho dostaneme, čomu sa rovná p pre dané x, y a dostaneme rovnicu pre obálku:

$$(z - \bar{z})^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 \tag{1.100}$$

čo je kužeľ s vrcholom v bode $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ a vrcholovým uhlom $\pi/2$ (povrchové priamky zvierajú s osou uhol $\pi/4$). ■

Riešenie nelineárnej rovnice je teda n-rozmerná nadplocha $u(\vec{x})$ v priestore J^0, ktorá sa v každom bode dotýka Mongeovho kužeľa a obsahuje zadanú $n - 1$ rozmernú plochu Γ.

Z čoho dostaneme podmienky?

- Rovnice priamok na kužeľoch v bodoch $\vec{x}$, lebo niektorú z týchto priamok musí obsahovať dotyková rovina k ploche $u(\vec{x})$.
- $\vec{p}$ sú derivácie u, lebo iba vtedy je to dotyková rovina k u.
- Všade musí platiť $F(\vec{x}, u, \vec{\nabla} u) = 0$.

To dáva:

- v bode $\bar{\vec{x}}$ máme dve rôzne roviny dané normálovými vektormi $\vec{p}$ a $\vec{p} + d\vec{p}$

$$z - \bar{z} = \vec{p} \cdot (\vec{x} - \bar{\vec{x}}) \tag{1.101a}$$

$$z - \bar{z} = (\vec{p} + d\vec{p}) \cdot (\vec{x} - \bar{\vec{x}}) \tag{1.101b}$$

ich prienik je daný rovnicou

$$(\vec{x} - \bar{\vec{x}}) \cdot d\vec{p} = 0 \tag{1.102}$$

Oba vektory majú určovať rovinu, ktorá spĺňa rovnicu, takže

$$F(\vec{p} + d\vec{p}) = F(\vec{p}) + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i = 0 \tag{1.103}$$

Porovnaním (1.102) a (1.103) dostávame dve podmienky pre ten istý malý vektor $d\vec{p}$ (ktorý predstavuje infinitezimálnu zmenu normály roviny, pričom stále ostávame na povrchu Mongeovho kužeľa):

$$(\vec{x} - \bar{\vec{x}}) \cdot d\vec{p} = 0 \tag{1.104}$$

$$\vec{\nabla}_p F \cdot d\vec{p} = 0 \tag{1.105}$$

Rovnica (1.105) hovorí, že povolené zmeny $d\vec{p}$ sú kolmé na gradient F v priestore $\vec{p}$. Rovnica (1.104) naopak hovorí, že vektor posunutia $(\vec{x} - \bar{\vec{x}})$, ktorý určuje tvoriacu priamku hľadanej obálky (kužeľa), musí byť tiež kolmý na každé takéto povolené $d\vec{p}$. Z lineárnej algebry vieme, že ak je vektor $(\vec{x} - \bar{\vec{x}})$ kolmý na ten istý podpriestor ako vektor $\vec{\nabla}_p F$, musia byť tieto dva vektory kolineárne. Preto volíme smer charakteristiky priamo úmerný gradientu funkcie F podľa $\vec{p}$:

$$(\vec{x} - \bar{\vec{x}})_i \sim \frac{\partial F}{\partial p_i} \tag{1.106}$$

O $(\vec{x} - \bar{\vec{x}})$ má zmysel hovoriť iba lokálne, nakoľko samotná dotyková rovina je iba lokálny objekt a teda píšeme namiesto toho $d\vec{x}$ a dostávame

$$\frac{dx_i}{\partial_{p_i} F} = const = dA \;\forall i \tag{1.107}$$

- Ak spravím takto daný krok $d\vec{x}$, ako sa zmení z? Takto:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot dx_i = p_i \partial_{p_i} F dA \tag{1.108}$$

- Chcem, aby rovnica platila aj v novom $\vec{x}$, potom

$$\frac{dF}{dx_i} = 0 \;\forall i \tag{1.109}$$

$$= F_{x_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial x_i} + F_{p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = F_{x_i} + p_i F_z + \frac{dx_j}{dA} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} =$$

$$= F_{x_i} + p_i F_z + \frac{dx_j}{dA} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \tag{1.110}$$

(upozorňujeme na implicitné sčítavanie cez index j podľa Einsteinovej konvencie). Kde sme mohli prehodiť i a j v poslednom člene, lebo $u_{ij} = u_{ji}$. Dostali sme teda

$$-\frac{dp_i}{F_{x_i} + p_i F_z} = dA \tag{1.111}$$

Keď teraz v rovniciach (1.107,1.108,1.111) prejdeme k $\vec{x}(s), \vec{p}(s), z(s)$, dostaneme že $dA = ds$ a dostaneme aj reklamovaný recept.

Potom je už veľmi priamočiare ukázať že $\frac{dF}{ds} = 0$.

Sústave rovníc z receptu sa hovorí charakteristické rovnice, ich riešeniam sa hovorí **charakteristické pásy**. Charakteristické pásy žijú v $2n+1$-rozmernom priestore $(\vec{x}, z, \vec{p})$, ktorému sa hovorí priestor 1-jetov J^1. Ich priemet do priestoru J^0 sú potom charakteristické krivky. Ktorú z kriviek v páse si vyberiem, potom určuje počiatočná podmienka svojou deriváciou.

Príklad 15. Nájdite riešenie rovnice

$$u_x u_y = u \ , \ u(0, y) = y^2 \ . \tag{1.112}$$

□

Riešenie. Ingrediencie:

$$F = pq - z \ , \ \gamma \ : \ \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = \tau \\ z_0 = \tau^2 \end{array} \right\}$$

Rovnice aj s riešením:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= q \\ \dot{y} &= p \\ \dot{p} &= p \ \Rightarrow \ p = c_1 e^s \\ \dot{q} &= q \ \Rightarrow \ q = c_2 e^s \\ \dot{z} &= 2pq \end{aligned}$$

A teda

$$\begin{aligned} x &= c_2 e^s + c_3 \\ y &= c_1 e^s + c_4 \\ z &= c_1 c_2 e^{2s} + c_5 \end{aligned}$$

Počiatočné podmienky dajú z derivácií počiatočnej krivky najskôr:

$$2\tau = p_0 \cdot 0 + q_0 \cdot 1 \ \Rightarrow \ q_0 = 2\tau = c_2$$

A následne zo samotnej rovnice pre $F = 0$:

$$p_0 q_0 - \tau^2 = 0 \ \Rightarrow \ p_0(2\tau) = \tau^2 \Rightarrow \ p_0 = \frac{1}{2}\tau = c_1$$

Zvyšné podmienky potom dajú:

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 = 0 \ &\Rightarrow \ c_3 = -2\tau \\ c_1 + c_4 = \tau \ &\Rightarrow \ c_4 = \frac{1}{2}\tau \\ c_1 c_2 + c_5 = \tau^2 \ &\Rightarrow \ c_5 = 0 \end{aligned}$$

Dostávame teda parametrické riešenie

$$x = 2\tau\,(e^s - 1)\ ,\ y = \frac{1}{2}\tau\,(e^s + 1)\ ,\ z = \tau^2 e^{2s}$$

Z toho vieme vyjadriť, čomu sa rovná e^s, τ a dostaneme

$$u(x,y) = \frac{(x+4y)^2}{16}\ . \tag{1.113}$$

Geometrická poznámka k Mongeovmu kužeľu: V tomto prípade ($pq = z$) nemá Mongeov kužeľ klasický rotačný tvar. Dosadením väzby $q = \bar{z}/p$ do rovnice dotykovej roviny $z - \bar{z} = p(x - \bar{x}) + q(y - \bar{y})$ dostaneme zväzok rovín parametrizovaný hodnotou p. Ak tento zväzok zderivujeme podľa p a položíme rovný nule (hľadáme obálku zväzku), dostaneme po úprave rovnicu Mongeovho kužeľa v tvare:

$$(z - \bar{z})^2 = 4\bar{z}(x - \bar{x})(y - \bar{y}) \tag{1.114}$$

Ide o eliptický kužeľ (s hyperbolickými prierezmi pre konštantné z), ktorého tvar navyše dynamicky závisí od aktuálnej výšky $\bar{z}$. Pri prechode rovinou $\bar{z} = 0$ kužeľ dokonca úplne degeneruje na rovinu. ■

1.4 Aplikácie rovníc prvého rádu

1.4.1 Transportná rovnica, Burgersova rovnica a vznik rázov

Transportná rovnica. Premenné označíme (x, t), teda jednorozmerná poloha a čas:

$$u_t + cu_x = 0\ ,\ u(x,0) = f(x)\ . \tag{1.115}$$

Charakteristiky sú dané rovnicami

$$\begin{matrix} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = c \end{matrix} \quad \Rightarrow\ x = ct + c_1 = ct + x_0\ , \tag{1.116}$$

a počiatočná podmienka dá

$$u(x,t) = u(x_0,0) = f(x_0) = f(x - ct)\ , \tag{1.117}$$

teda pohyb profilu $f(x)$ rýchlosťou c, avšak iba jedným smerom. Ak je u koncentrácia častíc, potom táto rovnica popisuje pohyb týchto častíc v médiu, ktorého rýchlosť je c. Ak tá závisí od x alebo od t, riešenie pre x_0 bude komplikovanejšie, ale podmienka $u = f(x_0)$ bude platiť ďalej (hodnota f odniekadiaľ dotiekla, otázka je len, že odkiaľ). Nenulová pravá strana potom mení aj koncentráciu častíc. Tie môžu vznikať, zanikať, množiť sa, zomierať a podobne.

(Bezviskózna) Burgersova rovnica. Budeme popisovať častice, ktoré sa pohybujú samostatne a nie sú ničím unášané. Majme teda veľa častíc na priamke, každá nech má nejakú rýchlosť. Ak sú častice voľné, pre ich polohu platí $x_i(t) = x_{i0} + v_i t$ a $\ddot{x}_i(t) = 0$. Častíc tiež nech je veľmi veľa, aby sme ich rozdelenie mohli považovať za spojité. Častice teraz budeme popisovať poľom rýchlosti $u(x,t)$, t. j. hodnotou rýchlosti, ktorú má častica, ktorá sa v čase t nachádza v mieste x. Akú rovnicu spĺňa u?

Keď počítame úplnú deriváciu u, musíme zahrnúť to, že profil rýchlosti sa môže meniť s časom a mení sa aj častica, ktorá sa v danom mieste nachádza, takže

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + uu_x \ . \tag{1.118}$$

To je ale rovné $\dot{v} = \ddot{x} = 0$, takže dostávame Burgersovu rovnicu:

$$u_t + uu_x = 0 \ . \tag{1.119}$$

Ide o nelineárnu rovnicu podobnú (1.115), kde rýchlosť šírenia je priamo hodnota u. Hneď uvidíme, že to vedie na problémy. Oplatí sa spomenúť si na konvektívnu deriváciu a Eulerovu rovnicu z mechaniky tekutín na teoretickej mechanike.

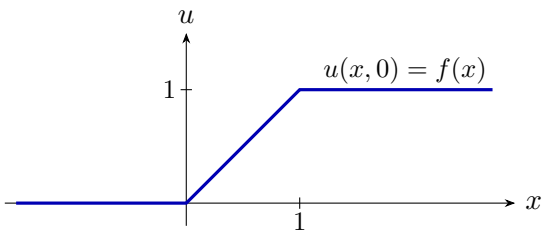
S počiatočnou podmienkou $u(x,0) = f(x)$ ju vieme hravo vyriešiť:

$$\begin{array}{lll} \dot{t} = 1 & t = s & \\ \dot{x} = u \quad \Rightarrow & & \Rightarrow \quad x = c_1 t + c_2 = f(x_0)t + x_0 \ . \\ \dot{u} = 0 & u = c_1 & \end{array} \tag{1.120}$$

Pre dané f je posledná rovnica rovnicou pre x_0 a z nej potom dostaneme $u(x,t) = f(x_0)$.

Majme počiatočnú podmienku k rovnici (1.119), ktorú ukazuje obrázok 8:

$$u(x_0,0) = f(x_0) = \begin{cases} 0 & x_0 < 0 \\ x_0 & 0 < x_0 < 1 \\ 1 & x_0 > 1 \end{cases} \ . \tag{1.121}$$



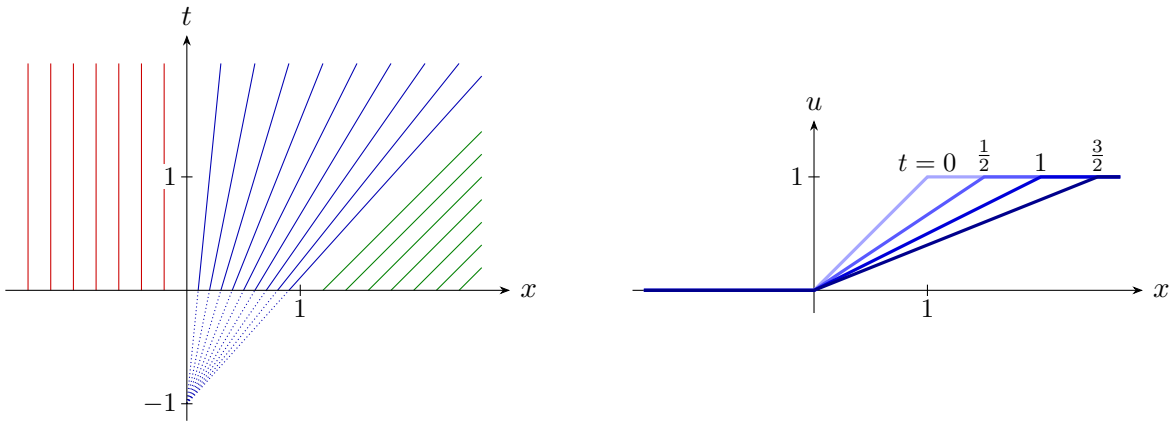
Obr. 8: Prvá počiatočná podmienka pre Burgersovu rovnicu.

Pýtame sa teda, aké je x_0 pre dané x a t. Tu musíme začať od konca, predpokladať hodnotu x_0 a potom zistiť, aké x, t vedie na túto hodnotu:

- $x_0 < 0$, potom $f(x_0) = 0$ a dostaneme rovnicu charakteristík $x = x_0$, v takom prípade je riešenie $u(x,t) = 0$ a platí pre $x < 0$,
- $x_0 > 1$, potom $f(x_0) = 1$ a dostaneme rovnicu charakteristík $x = t + x_0$, v takom prípade je riešenie $u(x,t) = 1$ a platí v oblasti, kde $x - t > 1$,
- $0 < x_0 < 1$, potom $f(x_0) = x_0$ a dostaneme rovnicu charakteristík

  $$x = x_0 t + x_0 \ \Rightarrow \ x_0 = \frac{x}{t+1} \ , \tag{1.122}$$

  v takom prípade je riešenie $u(x,t) = \frac{x}{t+1}$ (platí pre $0 < x < t + 1$).



Obr. 9: Riešenie Burgersovej rovnice s prvou počiatočnou podmienkou. Vľavo charakteristiky $x = f(x_0)t + x_0$: červené pre $x_0 < 0$, modré pre $0 < x_0 < 1$ a zelené pre $x_0 > 1$. Bodkované predĺženia modrých charakteristík do $t < 0$ sa stretávajú v bode $(0, -1)$. Vpravo riešenie $u(x, t)$ v časoch t uvedených pri profiloch.

Obrázok 9 lepší od tisíca slov.

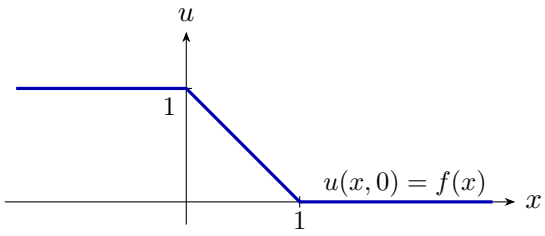
Nie je ťažké rozmyslieť si, čo tento príklad hovoril. Nainicializujeme častice tak, že pre $x < 0$ stoja, pre $x > 1$ sa pohybujú rýchlosťou 1 a medzi nimi rýchlosť rastie z jednej na druhú. Keď častice pustíme, stojace stoja, rýchle utekajú preč a tie medzi nestíhajú a medzera sa zväčšuje. A presne to hovorí obrázok.

Majme ale inú počiatočnú podmienku, ktorú ukazuje obrázok 10:

$$u(x_0, 0) = f(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 < 0 \\ 1 - x_0 & 0 < x_0 < 1 \\ 0 & x_0 > 1 \end{cases} . \tag{1.123}$$

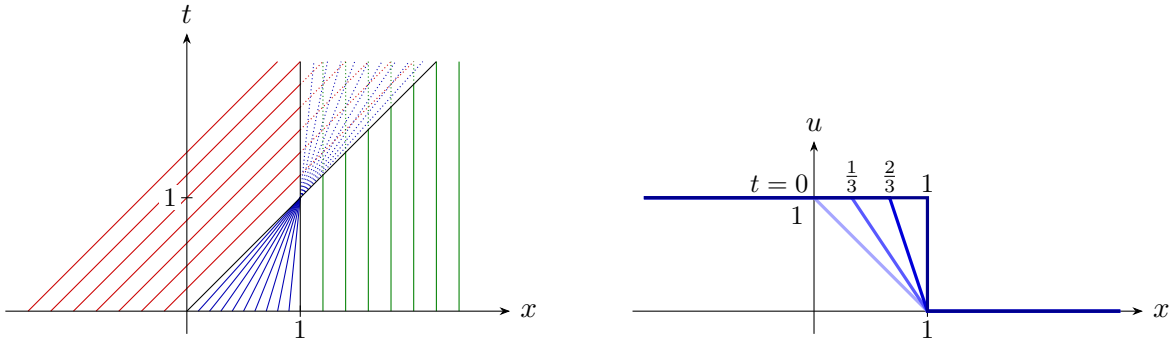
Postup je úplne analogický, takže bez veľkého komentára:

- $x_0 < 0$, $f(x_0) = 1$, $u(x, t) = 1$, $x = t + x_0$ a teda $x - t < 0$,
- $x_0 > 1$, $f(x_0) = 0$, $u(x, t) = 0$, $x = x_0$ a teda $x > 1$,
- $0 < x_0 < 1$, $f(x_0) = 1 - x_0$, $u(x, t) = (1 - x)/(1 - t)$, $x = (1 - x_0)t + x_0$.



Obr. 10: Druhá počiatočná podmienka pre Burgersovu rovnicu.

Tu obrázok 11 hovorí oveľa tragickejší príbeh. V čase $t = 1$ sa charakteristiky pretnú a riešenie prestáva byť dané jednoznačne.



Obr. 11: Riešenie Burgersovej rovnice s druhou počiatočnou podmienkou. Vľavo charakteristiky $x = f(x_0)t + x_0$: červené pre $x_0 < 0$, modré pre $0 < x_0 < 1$ a zelené pre $x_0 > 1$. Po čase $t = 1$ sa charakteristiky pretínajú v oblasti medzi priamkami $x = 1$ a $x = t$, kde sú nakreslené bodkovane. Vpravo riešenie $u(x, t)$ v časoch t uvedených pri profiloch, v čase $t = 1$ vzniká v mieste $x = 1$ skok.

Pekne to vidno, keď si rozmyslíme, čo sa deje s časticami, ktoré majú takto nainicializované rýchlosti. Častice pre $x > 1$ stoja a častice pre $x < 1$ ich dobiehajú a v čase $t = 1$ sa v mieste $x = 1$ vytvorí schod, nespojitosť u a nekonečnosť u_x. Tomuto sa hovorí **ráz** (po anglicky *shock*). Z matematického hľadiska rovnica vybuchne a zamrzne ako Windows, z fyzikálneho hľadiska to hovorí, že v tom momente prichádza do hry nejaká iná fyzika.

Je dobré vyjasniť si, že to, čo sa pretlo, sú charakteristiky v priestore $\mathbb{R}^2$, čo je priemet charakteristík v J^0 na túto rovinu. V priestore J^0 sa charakteristiky nepretínajú, avšak počiatočná podmienka Γ si z nich vybrala tak, že ich priemety sa pretínajú.

Všeobecne(jšie) o rázoch. Riešenie Burgersovej rovnice (1.119) je $u = f(x-ut)$, čo keď derivujeme podľa x, dostaneme

$$u_x = f' \cdot (1 - u_x t) \;\Rightarrow\; u_x = \frac{f'}{1 + f't} \,, \tag{1.124}$$

a teda evidentne vznikne problém, ak je niekde $f'(x_0) < 0$, lebo pozdĺž tej charakteristiky sa s rastúcim časom bude derivácia u_x zväčšovať a v čase

$$t = \min_{f'<0} \left(-\frac{1}{f'(x_0)} \right) \tag{1.125}$$

sa charakteristiky prvýkrát stretnú a riešenie vybuchne.

Ak máme všeobecnejšiu rovnicu v tvare

$$u_t + c(u)u_x = 0 \,, \tag{1.126}$$

t. j. rýchlosť nie je priamo u, ale čosi, čo závisí od u, riešenie dostaneme nezložito ako

$$u = f\big(x - c(u)t\big) \,, \tag{1.127}$$

a v tom prípade dostávame

$$u_x = f' \cdot (1 - c' u_x t) \;\Rightarrow\; u_x = \frac{f'}{1 + c' f' t} \; . \tag{1.128}$$

Ráz teda vznikne v čase (berieme minimum cez oblasť, kde je menovateľ záporný):

$$T = \min_{c'f'<0} \left(-\frac{1}{c'(f(x_0))f'(x_0)} \right) \; . \tag{1.129}$$

Čo robiť, aby rázy nevznikali? Pridať na pravú stranu brzdenie:

- Člen εu_{xx} sa pre malé druhé derivácie neprejaví, ale ak začne vznikať singularita, bude dominantný a spôsobí pre záporné u_x, ktoré veľmi rýchlo klesá, veľké brzdenie. K tejto rovnici sa vrátime na konci semestra.

- Pridať na pravú stranu odporovú silu $-ku$, potom:

$$\begin{array}{lll} \dot{t} = 1 & t = s & \\ \dot{x} = u \quad \Rightarrow & & \Rightarrow \quad x = -\frac{f(x_0)}{k} e^{-kt} + c_2 \; . \\ \dot{u} = -ku & u = c_1 e^{-kt} = f(x_0) e^{-kt} & \end{array} \tag{1.130}$$

  V nulovom čase potom dostávame

$$x_0 = c_2 - \frac{f(x_0)}{k} \;\Rightarrow\; x = x_0 + \frac{f(x_0)}{k} \left(1 - e^{-kt}\right) = x_0 + \frac{u e^{kt}}{k} \left(1 - e^{-kt}\right) \; , \tag{1.131}$$

  čo dá

$$u = f\left(x - \frac{u}{k} \left(e^{kt} - 1\right) \right) e^{-kt} \;\Rightarrow\; u_x = e^{-kt} f' \cdot \left(1 - \frac{u_x}{k} \left(e^{kt} - 1\right) \right) \; , \tag{1.132}$$

  a teda

$$u_x = \frac{e^{-kt} f'}{1 + \frac{f'}{k} \left(1 - e^{-kt}\right)} \; . \tag{1.133}$$

  Aby bola v každom čase táto derivácia konečná, výraz v menovateli nesmie byť nikdy nulový, a teda musí pre všetky x_0 platiť $k > \max(-f'(x_0))$. Rozmyslieť si, o čo ide – odporová sila musí byť dosť silná, aby v dostatočnom čase zabrzdila veľmi rýchle častice a tie nedobehli pomalšie častice pred nimi.

Príklad 16. Aké musí byť k v rovnici $u_t + c(u)u_x = -ku$, aby pre zadanú počiatočnú podmienku $u(x, 0) = f(x)$ nenastal nikdy ráz? □

Zákony zachovania. Burgersova rovnica sa dá zapísať ako (jednorozmerný) zákon zachovania

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x = 0 \; , \quad \text{všeobecnejšie} \quad u_t + (f(u))_x = 0 \; . \tag{1.134}$$

Idea je z teoretickej mechaniky alebo teórie elektromagnetického poľa, u je hustota veličiny a $f(u)$ je hustota jej toku. Zákon potom hovorí, že ak sa mení hustota, veci museli odtiecť alebo pritiecť, ale nevznikli ani nezanikli.

Všeobecnejšie rovnicu (1.119) vynásobíme u^{n-1} a použitím Leibnizovho pravidla (ktoré platí, pokiaľ je funkcia u hladká) dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^n}{n}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=0\ , \tag{1.135}$$

čo je lokálny zákon zachovania $\rho_t^{(n)}+j_x^{(n)}=0$. Hovorí, že ak sa v danom mieste mení hustota veličiny ρ, potom to znamená, že veličina do daného miesta priteká tokom j, že v danom mieste nevzniká ani nezaniká. To tiež znamená, že sa zachováva veličina

$$Q_n=\int dx\,\rho^{(n)}(x)=\int dx\,\frac{u^n}{n}\ . \tag{1.136}$$

Takýto zákon zachovania dostaneme pre ľubovoľné $n\geq 1$.

Majme teraz nespojitosť v u, ktorá je v mieste $X(t)$, ktoré sa môže meniť (ráz sa hýbe). Naša rovnica už teda nebude platiť všade, lebo u_x už nemá dobrý zmysel, ale predpokladajme, že (niektoré) zákony zachovania platia ďalej. Z $\dot{Q}_n=0$ dostávame

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{X(t)}dx\,\frac{u^n}{n}+\int_{X(t)}^{\infty}dx\,\frac{u^n}{n}\right)&=0\ ,\\ \left.\frac{u^n}{n}\right|_{x\to X^-(t)}\frac{dX}{dt}+\int_{-\infty}^{X(t)}dx\,\frac{\partial}{\partial t}\frac{u^n}{n}-\left.\frac{u^n}{n}\right|_{x\to X^+(t)}\frac{dX}{dt}+\int_{X(t)}^{\infty}dx\,\frac{\partial}{\partial t}\frac{u^n}{n}&=0\ .\end{aligned} \tag{1.137}$$

Urobíme zrejmé označenie a použijeme lokálny zákon zachovania. Predpokladáme, že v oblasti, kde je u spojité, rovnica (1.119) platí stále, čím dostaneme

$$\begin{aligned}(u_-^n-u_+^n)\dot{X}-\int_{-\infty}^{X(t)}dx\,\frac{n}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}u^{n+1}-\int_{X(t)}^{\infty}dx\,\frac{n}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}u^{n+1}&=0\ ,\\ (u_-^n-u_+^n)\dot{X}=\frac{n}{n+1}\left[\left(u_-^{n+1}-u_+^{n+1}\right)+j(\infty)-j(-\infty)\right]&\ .\end{aligned} \tag{1.138}$$

Nakoľko Q_n sa zachováva, rozdiel tokov v nekonečne je nula a

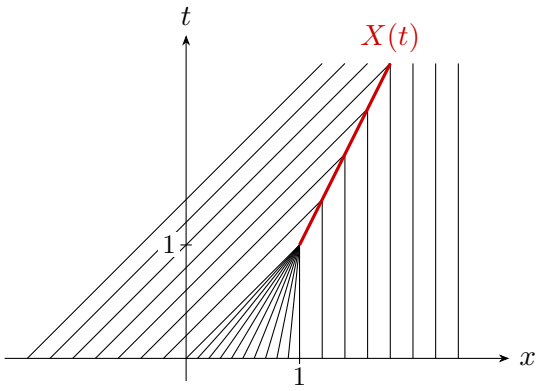
$$\dot{X}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{u_-^{n+1}-u_+^{n+1}}{u_-^n-u_+^n}\right)\ . \tag{1.139}$$

Ako by toto odvodenie (a zachovávajúca sa veličina (1.136)) vyzeralo pre prípad nenulových tokov v nekonečne (taký prípad budeme mať!)?

Od teórie, ktorá bude popisovať pohyb rázov, očakávame, že bude dávať iba jednu hodnotu $\dot{X}$, a teda bude vymedzovať jedno n, pre ktoré platí zákon zachovania aj v prítomnosti rázu (keďže pri nespojitosti už Leibnizovo pravidlo použité pri odvodení zákonov zachovania pre vyššie n neplatí). Ak sa fyzikálne zachováva priamo samotné u, teda prípad $n=1$ (napríklad pri autách z ďalšej časti to zodpovedá zachovaniu počtu áut, čo je rozumný predpoklad), dostaneme

$$\dot{X}=\frac{1}{2}\left(u_++u_-\right)\ . \tag{1.140}$$

Pre druhú z počiatočných podmienok, s ktorými sme vyššie riešili Burgersovu rovnicu, je $u_-=1$ a $u_+=0$. Ráz teda vznikne v čase $t=1$ v mieste $x=1$ a ďalej sa pohybuje rýchlosťou $\frac{1}{2}$, ako ukazuje obrázok 12.



Obr. 12: Riešenie Burgersovej rovnice v prítomnosti rázu. Tenké čiary sú charakteristiky, ktoré končia na ráze, hrubá červená čiara je poloha rázu $X(t) = (t+1)/2$.

1.4.2 Cestná premávka

Predpoklady: jeden pruh, hustota áut je daná funkciou $\rho(x,t)$, autá sa v danom mieste hýbu rýchlosťou $v(x,t)$ doprava. Počet áut medzi a a b je

$$\int_a^b dx\, \rho(x,t) = N \ . \tag{1.141}$$

Za čas dt prejde cez miesto x v čase t počet áut

$$dn = \rho(x,t)v(x,t)dt \ . \tag{1.142}$$

Potom musí platiť

$$dN = dn|_a - dn|_b = [\rho(a,t)v(a,t) - \rho(b,t)v(b,t)]\, dt \ . \tag{1.143}$$

Ak zoberieme $a = x$ a $b = x + dx$, dostaneme z definície parciálnej derivácie

$$dN = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} dxdt \ , \tag{1.144}$$

a z (1.141) dostaneme

$$dN = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdt \ , \tag{1.145}$$

čo dohromady dáva

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \ . \tag{1.146}$$

Predpokladáme nejakú závislosť $v(\rho)$, z čoho

$$\rho_t + \left(v + \rho \frac{dv}{d\rho}\right) \rho_x = \rho_t + c(\rho)\rho_x = 0 \ . \tag{1.147}$$

Predtým, ako zvolíme nejaké konkrétne $c(\rho)$, pozrime sa na **vlny v rovnovážnom riešení**. Rovnica (1.147) má evidentne riešenie $\rho = \rho_R = \text{const}$. Čo sa stane, keď v tomto riešení vznikne malá porucha $\rho = \rho_R + \tilde{\rho}$? Potom linearizujeme:

$$c(\rho) = c(\rho_R) + \left.\frac{dc}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_R} \tilde{\rho} \ , \tag{1.148}$$

a rovnica do prvého rádu v tildách bude proste a iba

$$\tilde{\rho}_t + c(\rho_R)\tilde{\rho}_x = 0 \ . \tag{1.149}$$

Rovnica pre $\tilde{\rho}$ je už potom obyčajná transportná rovnica daná rýchlosťou pre ρ_R. Tá môže byť záporná, takže porucha $\tilde{\rho}$ sa môže šíriť aj proti smeru dopravy. Pre vzťah (1.150) to nastane, ak $\rho_R > \rho_0/2$.

Najjednoduchší tvar závislosti rýchlosti od hustoty je

$$v(\rho) = v_0\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \ \Rightarrow \ c(\rho) = v_0\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_0}\right) \ . \tag{1.150}$$

Vidíme teda, že opäť budeme mať do činenia s rázmi. Majme teda rovnicu

$$\rho_t + v_0\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_0}\right)\rho_x = 0 \ . \tag{1.151}$$

Jej riešenie je priamočiare:

$$\begin{array}{lll} \dot{t} = 1 & & t = s \\ \dot{x} = v_0\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_0}\right) & \Rightarrow & \\ \dot{\rho} = 0 & & \rho = c_1 = f(x_0) \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = v_0\left(1 - \frac{2f(x_0)}{\rho_0}\right)t + x_0 \ . \tag{1.152}$$

Prvá počiatočná podmienka = **semafor**:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \rho_0 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{array} \right. \ . \tag{1.153}$$

Opäť ako predtým musíme rozdeliť riešenie na dve časti:

- $x_0 < 0$, potom $f(x_0) = \rho_0$ a

$$x = v_0(1 - 2\rho_0/\rho_0)t + x_0 \ \Rightarrow \ x = -v_0 t + x_0 \ , \tag{1.154}$$

- $x_0 > 0$, potom $f(x_0) = 0$ a

$$x = v_0 t + x_0 \ . \tag{1.155}$$

Narazili sme na problém, ktorý je typický pre nelineárne rovnice. V časti priestoru (medzi $-v_0 t$ a $v_0 t$) máme nedefinované riešenie. Problém je ale priamo v charakteristikách, neexistujú charakteristiky, ktoré by prechádzali cez túto časť priestoru. Hovorí sa tomu vlna zriedenia (po anglicky *rarefaction wave*).

Opravíme to trochu pozmenenou počiatočnou podmienkou:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \rho_0 & x < 0 \\ \rho_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 < x < L \\ 0 & x > L \end{array} \right. \ . \tag{1.156}$$

V oblastiach $x_0 < 0$ a $x_0 > L$ dostaneme to čo predtým, v oblasti medzi dostávame

$$x = v_0\left(1 - 2\left(1 - \frac{x_0}{L}\right)\right)t + x_0 \ \Rightarrow \ x_0 = L\frac{tv_0 + x}{L + 2v_0 t} \ . \tag{1.157}$$

Dostali sme vejár charakteristík, ktoré prechádzajú z ľavého do pravého druhu charakteristiky a majú slušnú limitu $L \to 0$. Riešenie je v tejto oblasti (t. j. medzi $-v_0 t$ a $v_0 t + L$):

$$\rho(x,t) = \rho_0 \left(1 - \frac{x + v_0 t}{L + 2v_0 t}\right) \ , \tag{1.158}$$

a tiež má peknú limitu $L \to 0$.

Riešenie úlohy o semafore je teda také, že v čase $t = 0$ autá na čiare vyštartujú, ale autá vo vzdialenosti d za semaforom sa pohnú až o čas d/v_0, postupne sa rozriedia a postupne zrýchlia (na mieste semaforu $x = 0$ je hustota $\rho_0/2$ a rýchlosť $v_0/2$).

Iná úloha, **riedka premávka naráža na hustejšiu premávku** ($A < B$):

$$f(x) = \begin{cases} A & x < 0 \\ (A-B)\left(1 - \frac{x}{L}\right) + B & 0 < x < L \\ B & x > L \end{cases} \ . \tag{1.159}$$

Opäť riešime ako predtým:

- $x_0 < 0$, potom $f(x_0) = A$ a

$$x = v_0 \left(1 - \frac{2A}{\rho_0}\right) t + x_0 \ , \quad \text{okraj intervalu:} \quad X_- = v_0 \left(1 - \frac{2A}{\rho_0}\right) t \ , \tag{1.160}$$

- $x_0 > L$, potom $f(x_0) = B$ a

$$x = v_0 \left(1 - \frac{2B}{\rho_0}\right) t + x_0 \ , \quad \text{okraj intervalu:} \quad X_+ = v_0 \left(1 - \frac{2B}{\rho_0}\right) t + L \ , \tag{1.161}$$

- $0 < x_0 < L$, dostaneme čosi divoké, ale asi nás neprekvapí, že výsledok je lineárny nárast z hodnoty A na hodnotu B.

Šírka intervalu, na ktorom sa mení hustota, je

$$\Delta x = X_+ - X_- = L + \frac{2v_0}{\rho_0}(A - B)t \ , \tag{1.162}$$

ktorý sa scvrkne do nuly po čase

$$T = \frac{L\rho_0}{2v_0(B - A)} \ . \tag{1.163}$$

Všimnite si, že to je konzistentné so vzťahom (1.129).

1.4.3 Rovnica eikonálu

Vlnová rovnica pre elektromagnetický (skalárny) potenciál je

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{1.164}$$

Zvolíme ansatz pre riešenie vo forme vlny s rýchlo oscilujúcou fázou:

$$\Phi = A(\vec{x}) e^{-i\omega(T(\vec{x}) + t)} \ . \tag{1.165}$$

Dosadíme do rovnice a počítame; dostaneme dve rovnice, jednu za reálnu a jednu za imaginárnu časť.

Prvá rovnica (reálna časť) má tvar

$$\Delta A - \omega^2 A|\vec{\nabla}T|^2 = -\frac{A\omega^2}{c^2} \ . \tag{1.166}$$

V limite geometrickej optiky $\omega \to \infty$ dostaneme

$$|\vec{\nabla}T|^2 = \frac{1}{c^2} \ , \tag{1.167}$$

a keď prejdeme k optickej dráhe substitúciou $T(\vec{x}) = \frac{u(\vec{x})}{c_0}$ (kde c_0 je rýchlosť svetla vo vákuu a $n = c_0/c$ je index lomu prostredia), dostaneme

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = n^2(x, y, z) \ , \tag{1.168}$$

čo je **rovnica eikonálu**.

Druhá rovnica (imaginárna časť) dá

$$2\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}u + A\Delta u = 0 \ , \tag{1.169}$$

čo je transportná rovnica pre amplitúdu A pozdĺž gradientu (už) známeho u. Na riešenie rovnice eikonálu existujú efektívne numerické algoritmy (napr. *fast marching method*), ktoré sa hojne používajú aj v počítačovej grafike.

Špeciálny prípad – vákuum $n = 1$ v 2D, kde máme:

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \ , \ \ u|_\gamma = 0 \ . \tag{1.170}$$

Riešenie $u(x, y)$ v tomto prípade udáva euklidovskú vzdialenosť bodu (x, y) od krivky γ. Navyše, každé hladké riešenie tejto rovnice je vzdialenosťou od nejakej krivky (plus prípadne konštanta), keďže za novú počiatočnú krivku $\tilde{\gamma}$ si môžeme zvoliť ľubovoľnú vrstevnicu $u(x, y) = C$.

Prečo je to tak, vidno priamo z metódy charakteristík pre $F = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - 1) = 0$:

$$\dot{x} = p \ , \quad \dot{y} = q \ , \quad \dot{p} = 0 \ , \quad \dot{q} = 0 \ , \quad \dot{z} = p^2 + q^2 = 1 \ . \tag{1.171}$$

Keďže $\dot{p} = \dot{q} = 0$, smerový vektor (p_0, q_0) je konštantný a charakteristiky sú priamky (svetelné lúče):

$$x(s) = x_0(\tau) + p_0 s \ , \quad y(s) = y_0(\tau) + q_0 s \ . \tag{1.172}$$

Podmienka pre počiatočné derivácie pri $z_0(\tau) = 0$ dáva $0 = z_0' = p_0 x_0' + q_0 y_0'$, čo znamená, že charakteristiky vybiehajú z krivky γ kolmo. Z rovnice $\dot{z} = 1$ a podmienky $z_0 = 0$ máme $u(x, y) = z(s) = s$. Pre vzdialenosť d bodu (x, y) od počiatočného bodu (x_0, y_0) na krivke potom platí:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = s\sqrt{p_0^2 + q_0^2} = s = u(x, y) \ . \tag{1.173}$$

Z pohľadu Mongeovho kužeľa (ktorý má sklon stien $\pi/4$, teda $z = r$) je riešenie obálkou kužeľov s vrcholmi husto naukladanými pozdĺž krivky γ v rovine $z = 0$. Výška $z = u(x, y)$ tejto obálky nad bodom (x, y) je potom určená vrcholom najbližšieho kužeľa na γ a pri sklone $\pi/4$ sa presne rovná vodorovnej vzdialenosti od neho. Tam, kde sa stretnú svahy z rôznych častí krivky γ, sa charakteristiky pretnú a vznikne „hrebeň“, na ktorom riešenie stráca diferencovateľnosť – ide o presnú geometrickú analógiu vzniku rázu v Burgersovej rovnici.

1.4.4 Ďalšie fyzikálne aplikácie

Rovnice prvého rádu a metóda charakteristík tvoria matematickú kostru mnohých kľúčových konceptov teoretickej fyziky, s ktorými sa čitatelia stretnú v iných kurzoch:

Hamiltonova–Jacobiho rovnica (Analytická mechanika). Najfundamentálnejšou nelineárnou PDE prvého rádu v mechanike je rovnica pre akciu $S(\vec{q}, t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) = 0 \ . \tag{1.174}$$

Ak označíme zovšeobecnené hybnosti ako $\vec{p} = \vec{\nabla} S$, charakteristický systém pre funkciu $F(t, \vec{q}, S, p_t, \vec{p}) = p_t + H(\vec{q}, \vec{p}, t) = 0$ (pri voľbe parametra $s = t$) priamo generuje kanonické Hamiltonove pohybové rovnice:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ . \tag{1.175}$$

Klasické trajektórie častíc vo fázovom priestore sú teda presne charakteristickými pásmi v priestore 1-jetov J^1, ktoré budujú plochu akcie S. Časovo nezávislá verzia tejto rovnice pre konštantnú energiu $H(\vec{q}, \vec{\nabla} W) = E$ je mechanickým ekvivalentom optickej rovnice eikonálu.

Liouvillova a Vlasovova rovnica (Štatistická fyzika a kinetická teória). Časový vývoj hustoty pravdepodobnosti $\rho(\vec{q}, \vec{p}, t)$ vo fázovom priestore je daný Liouvillovou rovnicou:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) = 0 \ . \tag{1.176}$$

Ide o lineárnu homogénnu transportnú rovnicu v $2n$-rozmernom fázovom priestore. Jej charakteristikami sú opäť Hamiltonove trajektórie a podmienka $\dot{\rho} = 0$ pozdĺž nich priamo vyjadruje Liouvillovu vetu o zachovávaní fázového objemu (nestlačiteľnosti fázovej kvapaliny). Zahrnutím vlastného elektromagnetického poľa generovaného samotnými časticami dostávame bezrážkovú Vlasovovu rovnicu vo fyzike plazmy.

Callanova–Symanzikova rovnica (Kvantová teória poľa a fázové prechody). To, že fyzikálne predpovede nezávisia od voľby renormalizačnej škály μ, vyjadruje lineárna PDE prvého rádu pre renormalizované n-bodové Greenove funkcie $G^{(n)}$:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma(g) \right) G^{(n)}(p; g, \mu) = 0 \ . \tag{1.177}$$

Riešenie tejto rovnice metódou charakteristík prirodzene zavádza koncept *bežiacej väzbovej konštanty* (*running coupling*) $\bar{g}(\mu)$, ktorej vývoj so škálou energie riadi charakteristická rovnica $\mu \frac{d\bar{g}}{d\mu} = \beta(\bar{g})$.

Tvar sypkých materiálov (Mechanika kontinua). Rovnica eikonálu $|\vec{\nabla} u|^2 = \tan^2 \alpha$ popisuje aj rovnovážny povrch $u(x, y)$ kopy piesku so sypným uhlom α nasypaného na podložku s okrajom γ (kde $u|_{\gamma} = 0$). Miesta, kde sa charakteristiky vychádzajúce kolmo z okraja γ pretnú, tvoria ostré hrebene na povrchu piesku, na ktorých funkcia stráca diferencovateľnosť.

2 Parciálne diferenciálne rovnice druhého rádu – úvod

V tejto kapitole prejdeme k rovniciam druhého rádu. Hľadáme neznámu funkciu $u(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, ktorá spĺňa rovnicu

$$F(\vec{x}, u, \partial_i u, \partial_{ij} u) = 0 \ , \tag{2.1}$$

kde $\partial_i u \equiv \partial_{x_i} u$ a $\partial_{ij} u \equiv \partial_{x_i} \partial_{x_j} u$, $i, j = 1, \ldots, n$, označujú všetky prvé a druhé parciálne derivácie funkcie u. Na rozdiel od kapitoly 1 sa tu nebudeme zaoberať všeobecnými nelineárnymi rovnicami a obmedzíme sa na rovnice, ktoré sú lineárne aspoň v najvyšších, teda druhých deriváciách. Takéto rovnice nazývame rovnako ako pri rovniciach prvého rádu **kvázilineárne**. Majú tvar

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \partial_{ij} u + G(\vec{x}, u, \partial_i u) = 0 \ , \quad a_{ij} = a_{ij}(\vec{x}, u, \partial_k u) \ , \tag{2.2}$$

kde funkcia G obsahuje všetky členy bez druhých derivácií. Ak koeficienty a_{ij} závisia iba od $\vec{x}$ a lineárne sú aj ostatné členy, dostaneme **lineárnu** rovnicu[6]

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\, \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(\vec{x})\, \partial_i u + c(\vec{x})\, u = f(\vec{x}) \ . \tag{2.3}$$

Členom s druhými deriváciami budeme hovoriť **hlavná časť** rovnice. Pre dvakrát spojite diferencovateľnú funkciu nezáleží na poradí derivovania, $\partial_{ij} u = \partial_{ji} u$, a preto v hlavnej časti záleží iba na súčte $a_{ij} + a_{ji}$. Koeficienty teda môžeme vždy zvoliť symetrické (stačí a_{ij} nahradiť výrazom $(a_{ij} + a_{ji})/2$) a v ďalšom budeme predpokladať, že $a_{ij} = a_{ji}$. Uvidíme, že práve hlavná časť rozhoduje o tom, akého typu je rovnica, a tým aj o tom, aké podmienky k nej prirodzene patria a ako sa správajú jej riešenia.

2.1 Klasifikácia rovníc v n rozmeroch

Pri rovniciach prvého rádu sme si pomohli vhodnou voľbou súradníc, v ktorých sa z rovnice stala obyčajná diferenciálna rovnica pozdĺž charakteristík. Pri rovniciach druhého rádu skúsime niečo podobné: budeme hľadať súradnice, v ktorých má hlavná časť čo najjednoduchší tvar. Ukáže sa, že úplne sa jej zbaviť nevieme, vieme ju však zjednodušiť na niekoľko základných tvarov, ktoré sa od seba podstatne líšia.

Uvažujme lineárnu rovnicu (2.3). Jej hlavnej časti priradíme **charakteristickú formu**

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x}) \lambda_i \lambda_j \ , \tag{2.4}$$

ktorú dostaneme tak, že v hlavnej časti nahradíme každú deriváciu ∂_i premennou λ_i. Je to kvadratická forma so symetrickou maticou $A(\vec{x}) = (a_{ij}(\vec{x}))$. Všetko, čo v tejto kapitole povieme, závisí iba od hlavnej časti, a preto to platí aj pre kvázilineárne rovnice (2.2). Tam však koeficienty a_{ij} závisia od u a jej derivácií, takže typ rovnice môže závisieť aj od toho, ktoré riešenie práve skúmame.

[6] Samotná podmienka $a_{ij} = a_{ij}(\vec{x})$ na linearitu nestačí. Rovnice, v ktorých koeficienty pri druhých deriváciách závisia iba od $\vec{x}$, ale zvyšok môže byť nelineárny, sa nazývajú semilineárne. Príkladom je nelineárna Kleinova–Gordonova rovnica z úvodu.

Pozrime sa najprv, ako sa hlavná časť zmení, ak prejdeme k novým súradniciam $\xi_k = \xi_k(\vec{x})$, $k = 1, \ldots, n$. Podľa pravidla pre deriváciu zloženej funkcie je

$$\partial_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\, \partial_{\xi_k} \ , \tag{2.5}$$

a teda

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} u = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}\, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l} u + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}\, \partial_{\xi_k} u \ . \tag{2.6}$$

Druhý súčet obsahuje iba prvé derivácie funkcie u, takže patrí k nižším členom. Hlavná časť má v nových súradniciach koeficienty

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} J_{ki}\, a_{ij}\, J_{lj} \ , \quad \text{t. j.} \quad \bar{A} = JAJ^T \ , \quad J_{ki} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \ , \tag{2.7}$$

kde J je Jacobiho matica zámeny súradníc. Charakteristická forma sa teda pri zámene súradníc správa ako kvadratická forma: v nových súradniciach dostaneme tú istú formu, len vyjadrenú v nových premenných μ_k, ktoré súvisia s λ_i rovnako ako derivácie, $\lambda_i = \sum_k J_{ki}\mu_k$.

V pevnom bode $\vec{x}_0$ môže byť J ľubovoľná regulárna matica B, stačí zvoliť lineárnu zámenu $\vec{\xi} = B\vec{x}$. Z lineárnej algebry je známe, že symetrickú maticu $A(\vec{x}_0)$ možno transformáciou BAB^T previesť na diagonálny tvar s číslami ± 1 a 0 na diagonále: najprv ju ortogonálnou transformáciou diagonalizujeme, čím dostaneme na diagonále jej vlastné čísla, a potom zmeníme mierku každej súradnice, ktorej zodpovedá nenulové vlastné číslo ν, faktorom $1/\sqrt{|\nu|}$. Existujú teda súradnice, v ktorých má charakteristická forma v bode $\vec{x}_0$ tvar

$$Q(\mu_1, \ldots, \mu_n) = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mu_k^2 \ , \quad \varepsilon_k = \pm 1, 0 \ . \tag{2.8}$$

Transformácia B nie je určená jednoznačne, počet kladných, záporných a nulových čísel ε_k však od jej voľby nezávisí. Tvrdí to Sylvestrov zákon zotrvačnosti z lineárnej algebry; tieto počty sú rovné počtu kladných, záporných a nulových vlastných čísel matice $A(\vec{x}_0)$. Preto má zmysel podľa nich rovnice triediť.

Problém je v tom, že takto vieme formu upraviť iba v jednom bode. Matica $A(\vec{x})$ sa vo všeobecnosti mení s polohou a matice $B(\vec{x})$, ktoré ju prevádzajú na tvar (2.8), sú v rôznych bodoch rôzne. Potrebovali by sme teda zámenu súradníc, ktorej Jacobiho matica sa v každom bode rovná niektorej z vhodných matíc $B(\vec{x})$. Riadky Jacobiho matice sú však gradienty funkcií ξ_k, a preto musia spĺňať podmienky $\partial_j J_{ki} = \partial_i J_{kj}$. Nemáme zaručené, že sa matice $B(\vec{x})$ dajú zvoliť tak, aby ich spĺňali. Výnimkou je rovnica s konštantnými koeficientmi a_{ij}: vtedy stačí jedna lineárna zámena $\vec{\xi} = B\vec{x}$ a hlavná časť bude mať tvar (2.8) všade. Rovnicu, ktorej hlavná časť má v celej oblasti tvar $\sum_k \varepsilon_k \partial^2_{\xi_k} u$, budeme nazývať rovnicou v **kanonickom tvare**.

Či sa kanonický tvar dá dosiahnuť v celej oblasti, vieme odhadnúť na prstoch. Chceme, aby mimodiagonálne prvky matice $\bar{A}$ boli nulové a diagonálne rovné ± 1 alebo 0. To je $n(n+1)/2$ podmienok,

presne toľko, koľko má symetrická matica nezávislých prvkov. K dispozícii máme n funkcií $\xi_k(\vec{x})$ a navyše môžeme celú rovnicu vynásobiť nenulovou funkciou, spolu teda $n+1$ funkcií. Pre $n \geq 3$ je

$$\frac{n(n+1)}{2} > n+1 \ , \tag{2.9}$$

podmienok je viac ako voľnosti a vo všeobecnosti nemôžeme očakávať, že kanonický tvar v celej oblasti existuje. Pre $n = 2$ sa obe čísla rovnajú a v časti 2.2 uvidíme, že v dvoch rozmeroch sa to v okolí každého bodu naozaj dá. Takéto počítanie je, samozrejme, iba heuristika: rovnaký počet podmienok a neznámych funkcií ešte existenciu riešenia nezaručuje.

Podľa toho, aké sú čísla ε_k v (2.8), delíme rovnice druhého rádu v bode $\vec{x}_0$ na

- **eliptické**, ak sú všetky $\varepsilon_k = 1$ alebo všetky $\varepsilon_k = -1$,
- **hyperbolické**, ak je jedno ε_k rovné -1 a všetky ostatné sú $+1$, alebo naopak,
- **parabolické**, ak je jedno ε_k rovné 0 a všetky ostatné majú rovnaké znamienko, teda sú všetky $+1$ alebo všetky -1.

Na celkovom znamienku nezáleží, lebo rovnicu môžeme vynásobiť číslom -1. Rovnica je eliptická (hyperbolická, parabolická) v oblasti, ak je taká v každom jej bode. Pre $n \geq 3$ tieto tri typy nepokrývajú všetky možnosti. Napríklad rovnicu s $n = 4$ a $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4) = (1, 1, -1, -1)$ nazývame ultrahyperbolickou a podobne nezaradené ostávajú rovnice s viacerými nulami alebo s nulou a rôznymi znamienkami. Takýmito rovnicami sa zaoberať nebudeme.

Typických zástupcov všetkých troch typov už poznáme z úvodu. Laplaceova rovnica $\Delta u = 0$ má všetky $\varepsilon_k = 1$, je teda eliptická. Vlnová rovnica $u_{tt} - \Delta u = 0$ má pri premennej t číslo $\varepsilon = 1$ a pri priestorových premenných $\varepsilon = -1$, je hyperbolická. Rovnica vedenia tepla $u_t - \Delta u = 0$ neobsahuje druhú deriváciu podľa času, takže pri t má $\varepsilon = 0$ a pri priestorových premenných $\varepsilon = -1$, je parabolická. Samotné názvy pochádzajú z kužeľosečiek. Pre $n = 2$ je krivka $Q(\lambda_1, \lambda_2) = \text{const}$ pri eliptickej rovnici elipsa a pri hyperbolickej hyperbola. Pri parabolickej rovnici sa z nej stane dvojica rovnobežných priamok a parabolu dostaneme, až keď v rovnici vedenia tepla $u_t - u_{xx} = 0$ nahradíme premennými aj deriváciu prvého rádu, $\lambda_t - \lambda_x^2 = 0$.

Prečo je toto delenie dôležité? Typ rovnice určuje, ako sa správajú jej riešenia a aké podmienky k nej prirodzene patria. V hyperbolických a parabolických rovniciach má jedna premenná osobitné postavenie: pri hyperbolickej rovnici je to premenná, pri ktorej má ε opačné znamienko ako pri ostatných, pri parabolickej premenná s $\varepsilon = 0$[7]. Túto premennú stotožníme s časom. Takéto rovnice opisujú vývoj v čase a prirodzene k nim patria počiatočné podmienky. Eliptické rovnice nemajú žiadnu význačnú premennú a opisujú stacionárne situácie, napríklad rovnovážne rozloženie teploty alebo elektrostatický potenciál. K nim patria okrajové podmienky. Ako veľmi sa líši správanie riešení vlnovej rovnice a rovnice vedenia tepla, uvidíme v kapitole 3, okrajovým úlohám pre eliptické rovnice sa venuje kapitola 6.

[7] Aby išlo naozaj o vývoj v čase, musí v parabolickej rovnici vystupovať aspoň prvá derivácia podľa tejto premennej, ako u_t v rovnici vedenia tepla. Inak by táto premenná vystupovala len ako parameter.

2.2 Klasifikácia rovníc v dvoch rozmeroch

Podľa odhadu z predchádzajúcej časti by sa v dvoch rozmeroch mala dať hlavná časť upraviť nielen v jednom bode, ale v celom okolí bodu. Teraz ukážeme, že to naozaj ide. Pre funkciu $u(x, y)$ budeme hlavnú časť zapisovať v tvare

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy}\ , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\ , \tag{2.10}$$

kde a, b, c sú funkcie premenných x, y. Faktor 2 pri zmiešanej derivácii pochádza z toho, že $a_{12} = a_{21} = b$. Hľadáme súradnice $X(x, y)$, $Y(x, y)$, v ktorých bude mať matica hlavnej časti tvar

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \varepsilon r \end{pmatrix}\ , \quad \varepsilon = 0, \pm 1\ , \tag{2.11}$$

kde r je nenulová funkcia a hodnota ε závisí od typu rovnice. Po vydelení celej rovnice funkciou r dostaneme kanonický tvar.

Typ rovnice v danom bode vieme zistiť bez toho, aby sme maticu A diagonalizovali. Jej determinant je súčin vlastných čísel, takže je záporný, ak majú vlastné čísla opačné znamienka, kladný, ak majú rovnaké znamienko, a nulový, ak je jedno z nich nulové. Platí teda

$$-\det A = b^2 - ac \begin{cases} < 0 \text{ pre eliptickú rovnicu,} \\ = 0 \text{ pre parabolickú rovnicu,} \\ > 0 \text{ pre hyperbolickú rovnicu.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Z transformačného pravidla (2.7) navyše vidno, že $\det \bar{A} = (\det J)^2 \det A$, takže znamienko výrazu $b^2 - ac$ sa pri regulárnej zámene súradníc nemení a typ rovnice nezávisí od toho, v akých súradniciach ju zapíšeme. Výraz $b^2 - ac$ je však vo všeobecnosti funkciou x a y a jeho znamienko sa môže meniť, takže rovnica môže byť v rôznych častiach roviny rôzneho typu. Typickým príkladom je Tricomiho rovnica

$$y\,u_{xx} + u_{yy} = 0\ , \tag{2.13}$$

ktorá je eliptická pre $y > 0$ a hyperbolická pre $y < 0$. Používa sa ako model prúdenia plynu rýchlosťou blízkou rýchlosti zvuku: tam, kde je prúdenie podzvukové, je rovnica eliptická, a tam, kde je nadzvukové, hyperbolická. Kanonický tvar preto budeme hľadať vždy len v oblasti, v ktorej sa typ rovnice nemení.

Prvým krokom bude nájsť súradnice $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, v ktorých má matica hlavnej časti tvar

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\ , \tag{2.14}$$

teda z hlavnej časti zostane iba člen $2\alpha\,u_{\xi\eta}$. K súradniciam X, Y sa od nich dostaneme až potom. Pri takejto zámene je

$$\partial_x = \xi_x \partial_\xi + \eta_x \partial_\eta\ , \quad \partial_y = \xi_y \partial_\xi + \eta_y \partial_\eta \tag{2.15}$$

a pre druhé derivácie dostaneme

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} \ , \tag{2.16a}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \ , \tag{2.16b}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} \ . \tag{2.16c}$$

Posledné dva členy v každom riadku obsahujú iba prvé derivácie funkcie u, takže do hlavnej časti neprispievajú. Po dosadení je koeficient pri $u_{\xi\xi}$ rovný $a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2$ a pri $u_{\eta\eta}$ ten istý výraz s funkciou η. Oba majú byť nulové, dostávame teda podmienky

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0 \ , \tag{2.17a}$$

$$a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \ . \tag{2.17b}$$

Koeficient pri zmiešanej derivácii je potom 2α, kde

$$\alpha = a\xi_x\eta_x + b\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + c\xi_y\eta_y \ . \tag{2.18}$$

Obe podmienky (2.17) sú tá istá nelineárna rovnica prvého rádu, raz pre funkciu ξ a raz pre η. Jej ľavá strana je charakteristická forma (2.4) s premennými $\lambda_1 = \xi_x$, $\lambda_2 = \xi_y$, a preto ju môžeme vyriešiť ako kvadratickú rovnicu pre pomer ξ_x/ξ_y. Ak $a \neq 0$, dostaneme

$$\xi_x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}\,\xi_y \tag{2.19}$$

a rovnakú rovnicu pre η. (Ak $a = 0$, ale $c \neq 0$, stačí vymeniť úlohy premenných x a y. Ak $a = c = 0$, má rovnica hľadaný tvar už od začiatku.) Pre ξ zoberieme jedno znamienko a pre η druhé; k tomu, čo robiť, keď obe riešenia splývajú, sa ešte dostaneme. Máme teda rovnice

$$\xi_x + \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}\,\xi_y = 0 \ , \quad \eta_x + \frac{b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{a}\,\eta_y = 0 \ . \tag{2.20}$$

To sú lineárne rovnice prvého rádu, ktoré vieme riešiť metódou charakteristík z kapitoly 1, a ich riešením dostaneme funkcie ξ a η. Funkcia ξ je konštantná pozdĺž kriviek, pre ktoré $dy/dx = (b \pm \sqrt{b^2 - ac})/a$, a funkcia η pozdĺž kriviek s opačným znamienkom pri odmocnine. Obe rodiny kriviek teda spĺňajú rovnicu

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0 \tag{2.21}$$

a nazývame ich **charakteristiky** rovnice druhého rádu (prečo práve takto, uvidíme na konci tejto časti). Hyperbolická rovnica má v každom bode dva rôzne reálne smery charakteristík, parabolická jeden a eliptická žiadny (jej charakteristiky sú komplexné). Aby ξ a η boli naozaj nové súradnice, musia byť nezávislé, teda $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$. Ak $b^2 - ac \neq 0$ a gradienty funkcií ξ, η sú nenulové, je to splnené, lebo podľa (2.20) majú pomery ξ_x/ξ_y a η_x/η_y rôzne hodnoty.

Ďalej postupujeme podľa typu rovnice.

- **Hyperbolická rovnica**, $b^2 - ac > 0$. Súradnice ξ, η sú reálne a rovnica má v nich tvar $2\alpha\,u_{\xi\eta} + \ldots = 0$. Aj tento tvar sa často považuje za kanonický a v kapitole 3 uvidíme, že vlnovú rovnicu

je najvýhodnejšie riešiť práve v ňom. Ak chceme dostať diagonálnu maticu $\bar{A}$, zostrojíme z ξ, η súradnice

$$X = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \ , \quad Y = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \ . \tag{2.22}$$

Keďže $\xi = X + Y$ a $\eta = X - Y$, je $\partial_\xi = \frac{1}{2}(\partial_X + \partial_Y)$, $\partial_\eta = \frac{1}{2}(\partial_X - \partial_Y)$, a teda

$$\partial_\xi \partial_\eta = \frac{1}{4}\left(\partial_X^2 - \partial_Y^2\right) \ . \tag{2.23}$$

Zámena je lineárna, preto pri nej nevzniknú žiadne nové členy s prvými deriváciami. Hlavná časť má tvar $\frac{\alpha}{2}(u_{XX} - u_{YY})$, takže $r = \alpha/2$ a $\varepsilon = -1$.

- **Eliptická rovnica**, $b^2 - ac < 0$. Odmocnina v (2.20) je imaginárna, rovnice pre ξ a η majú komplexne združené koeficienty a ich riešenia môžeme zvoliť komplexne združené, $\eta = \bar{\xi}$. Stačí teda vyriešiť jednu z nich. Reálne súradnice X, Y potom dostaneme ako

$$X = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \mathrm{Re}\,\xi \ , \quad Y = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = \mathrm{Im}\,\xi \ . \tag{2.24}$$

Teraz $\xi = X + iY$ a $\eta = X - iY$, takže $\partial_\xi = \frac{1}{2}(\partial_X - i\partial_Y)$, $\partial_\eta = \frac{1}{2}(\partial_X + i\partial_Y)$ a

$$\partial_\xi \partial_\eta = \frac{1}{4}\left(\partial_X^2 + \partial_Y^2\right) \ . \tag{2.25}$$

Hlavná časť má tvar $\frac{\alpha}{2}(u_{XX} + u_{YY})$, takže $r = \alpha/2$ a $\varepsilon = 1$. Funkcia α je reálna, lebo pre $\eta = \bar{\xi}$ sa výraz pre α pri komplexnom združení nemení.

Pri eliptickej rovnici je tento postup len náčrtom. Rovnice (2.20) majú komplexné koeficienty a metóda charakteristík z kapitoly 1 sa na ne priamo nevzťahuje. Ak sú koeficienty a, b, c konštantné, riešenia týchto rovníc ľahko uhádneme (pozri príklad nižšie), a ak sú analytické, dá sa postup urobiť korektne. Pre koeficienty, ktoré sú len hladké, súradnice X, Y v okolí každého bodu stále existujú, dôkaz si však vyžaduje inú a podstatne náročnejšiu úvahu.

- **Parabolická rovnica**, $b^2 - ac = 0$. Obe rovnice (2.20) splývajú do jednej,

$$a\xi_x + b\xi_y = 0 \ , \tag{2.26}$$

a máme len jednu rodinu charakteristík. Riešenie tejto rovnice zvolíme za jednu zo súradníc, $Y = \xi$, takže koeficient pri u_{YY} je nulový. Za druhú súradnicu X zoberieme ľubovoľnú funkciu premenných x, y, pre ktorú

$$aX_x^2 + 2bX_xX_y + cX_y^2 \neq 0 \ . \tag{2.27}$$

Vďaka $b^2 = ac$ je ľavá strana rovná $(aX_x + bX_y)^2/a$, takže podmienka (2.27) hovorí, že X nie je konštantná pozdĺž charakteristík, a to je to isté ako požiadavka, aby boli X a Y nezávislé. Zmiešaný člen pritom zmizne sám od seba. Jeho koeficient je dvojnásobkom výrazu

$$aX_xY_x + b(X_xY_y + X_yY_x) + cX_yY_y = X_x(aY_x + bY_y) + X_y(bY_x + cY_y) = 0 \ , \tag{2.28}$$

kde sme využili, že $aY_x + bY_y = 0$ a pri $c = b^2/a$ je aj $bY_x + cY_y = \frac{b}{a}(aY_x + bY_y) = 0$. Hlavná časť má tvar $r\,u_{XX}$, kde r je ľavá strana (2.27), a $\varepsilon = 0$.

Pri prevádzaní na kanonický tvar si treba dávať pozor na prípad, keď vzťahy pre X, Y nie sú lineárne. Vtedy druhé derivácie súradníc v (2.16) prispejú k členom s prvými deriváciami u_X, u_Y. Hlavná časť sa teda zjednoduší, ale nižšie členy sa môžu skomplikovať, ako uvidíme v druhej časti nasledujúceho príkladu.

Príklad 17. Preveďte na kanonický tvar nasledujúce rovnice

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0 \ , \tag{2.29}$$

$$y^2 u_{xx} + 4xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0 \ . \tag{2.30}$$

□

Riešenie. V prvej rovnici je $a = 1$, $b = 1$ a $c = 5$ (pozor na faktor 2 pri zmiešanej derivácii), takže

$$b^2 - ac = 1^2 - 1 \cdot 5 = -4 \tag{2.31}$$

a rovnica je eliptická v celej rovine. Podľa (2.20) dostávame rovnice

$$\xi_x + (1 - 2i)\xi_y = 0 \ , \quad \eta_x + (1 + 2i)\eta_y = 0 \ , \tag{2.32}$$

ktoré majú riešenia

$$\xi = f(y - (1 - 2i)x) \ , \quad \eta = g(y - (1 + 2i)x) \tag{2.33}$$

s ľubovoľnými funkciami f, g. Najjednoduchšou voľbou je priamo

$$\xi = y - (1 - 2i)x \ , \quad \eta = \bar{\xi} = y - (1 + 2i)x \ , \tag{2.34}$$

z ktorej dostaneme

$$X = y - x \ , \quad Y = 2x \ . \tag{2.35}$$

Pre derivácie potom platí

$$\partial_x = X_x \partial_X + Y_x \partial_Y = -\partial_X + 2\partial_Y \ , \quad \partial_y = \partial_X \tag{2.36}$$

a ďalej

$$\partial_{xx} = \partial_{XX} - 4\partial_{XY} + 4\partial_{YY} \ , \quad \partial_{yy} = \partial_{XX} \ , \quad \partial_{xy} = -\partial_{XX} + 2\partial_{XY} \ . \tag{2.37}$$

Dosadením týchto vyjadrení do pôvodnej rovnice dostaneme

$$4u_{XX} + 4u_{YY} - 32u = 0 \ , \quad \text{t. j.} \quad u_{XX} + u_{YY} - 8u = 0 \ . \tag{2.38}$$

Zámena je lineárna, preto sa člen bez derivácií nezmenil, a koeficient 4 zodpovedá $r = \alpha/2$, lebo tu $\alpha = 8$.

V druhej rovnici je $a = y^2$, $b = 2xy$ a $c = x^2$, takže

$$b^2 - ac = 4x^2y^2 - x^2y^2 = 3x^2y^2 \ . \tag{2.39}$$

Mimo súradnicových osí je tento výraz kladný a rovnica je tam hyperbolická. Na osiach je $b^2 - ac = 0$, rovnica je tam parabolická, a v počiatku sú všetky koeficienty nulové a rovnica tam nie je druhého

rádu. Budeme preto pracovať v niektorom z kvadrantov, kde $xy \neq 0$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade dostávame

$$\xi_x + \frac{x(2+\sqrt{3})}{y}\xi_y = 0 \ , \quad \eta_x + \frac{x(2-\sqrt{3})}{y}\eta_y = 0 \ . \tag{2.40}$$

Charakteristiky prvej z týchto rovníc spĺňajú $dy/dx = (2+\sqrt{3})x/y$, teda $y\,dy = (2+\sqrt{3})x\,dx$, a funkcia ξ je konštantná pozdĺž kriviek $y^2 - (2+\sqrt{3})x^2 = \text{const}$. Podobne pre η. Najjednoduchšie riešenia sú

$$\xi = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})x^2 \ , \quad \eta = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})x^2 \ , \tag{2.41}$$

z ktorých

$$X = \frac{1}{2}y^2 - x^2 \ , \quad Y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \ . \tag{2.42}$$

Jakobián tejto zámeny je $X_xY_y - X_yY_x = \sqrt{3}\,xy$, zámena je teda regulárna v každom kvadrante zvlášť, presne tam, kde je rovnica hyperbolická. Pre derivácie dostávame

$$\partial_x = -2x\partial_X - \sqrt{3}x\partial_Y \ , \quad \partial_y = y\partial_X \ . \tag{2.43}$$

Tentoraz je zámena nelineárna, a tak pri druhých deriváciách treba derivovať aj koeficienty x a y:

$$\partial_{yy} = \partial_X + y^2\partial_{XX} \ , \tag{2.44}$$

$$\partial_{xy} = -2xy\partial_{XX} - \sqrt{3}xy\partial_{XY} \ , \tag{2.45}$$

$$\partial_{xx} = -2\partial_X - \sqrt{3}\partial_Y + 4x^2\partial_{XX} + 4\sqrt{3}x^2\partial_{XY} + 3x^2\partial_{YY} \ . \tag{2.46}$$

Tieto vzťahy dosadíme do pôvodnej rovnice. Členy so zmiešanou deriváciou sa navzájom vyrušia a dostaneme

$$3x^2y^2(u_{YY} - u_{XX}) + (x^2 - 2y^2)u_X - \sqrt{3}y^2u_Y = 0 \ . \tag{2.47}$$

Na rozdiel od prvej rovnice tu vznikli členy s prvými deriváciami, hoci pôvodná rovnica žiadne nemala. Ostáva vyjadriť x, y pomocou X, Y. Z (2.42) je

$$x^2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,Y \ , \quad y^2 = 2X + 2x^2 = 2X - \frac{4}{\sqrt{3}}\,Y \ , \tag{2.48}$$

takže v každom kvadrante je $Y < 0$ a $X > 2Y/\sqrt{3}$. Rovnicu vydelíme výrazom $3x^2y^2$, ktorý je mimo osí nenulový, a koeficienty pri prvých deriváciách prepíšeme pomocou X, Y:

$$\frac{x^2 - 2y^2}{3x^2y^2} = \frac{1}{3y^2} - \frac{2}{3x^2} = \frac{1}{6X - 4\sqrt{3}\,Y} + \frac{1}{\sqrt{3}\,Y} \ , \tag{2.49}$$

$$-\frac{\sqrt{3}\,y^2}{3x^2y^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}\,x^2} = \frac{1}{2Y} \ . \tag{2.50}$$

Kanonický tvar druhej rovnice teda je

$$u_{YY} - u_{XX} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}\,Y} + \frac{1}{6X - 4\sqrt{3}\,Y}\right)u_X + \frac{1}{2Y}\,u_Y = 0 \ . \tag{2.51}$$

Koeficienty pri prvých deriváciách sú singulárne pre $Y = 0$ a pre $6X - 4\sqrt{3}\,Y = 3y^2 = 0$, teda presne na súradnicových osiach, kde rovnica prestáva byť hyperbolická. ■

Ešte ukážeme, ako postup funguje pre parabolickú rovnicu. V tomto prípade sa nám podarí nájsť aj všeobecné riešenie.

Príklad 18. Preveďte na kanonický tvar rovnicu

$$x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0 \tag{2.52}$$

a nájdite jej všeobecné riešenie. □

Riešenie. Tu je $a = x^2$, $b = xy$ a $c = y^2$, takže

$$b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0 \tag{2.53}$$

a rovnica je parabolická v celej rovine okrem počiatku, kde sú všetky koeficienty nulové. Budeme pracovať v oblasti $x \neq 0$. Rovnica (2.26) pre charakteristickú súradnicu má tvar

$$x^2\xi_x + xy\,\xi_y = 0\ , \quad \text{t. j.} \quad x\xi_x + y\xi_y = 0\ . \tag{2.54}$$

Charakteristiky spĺňajú $dy/dx = y/x$, sú to teda priamky $y = Cx$ prechádzajúce počiatkom, a funkcia ξ je na nich konštantná. Najjednoduchšia voľba je $\xi = y/x$. Zvolíme preto

$$X = x\ , \quad Y = \frac{y}{x}\ . \tag{2.55}$$

Podmienka (2.27) je splnená, lebo $aX_x^2 + 2bX_xX_y + cX_y^2 = x^2 \neq 0$, a jakobián zámeny je $X_xY_y - X_yY_x = 1/x \neq 0$. Na prepočet derivácií použijeme (2.16) s X a Y namiesto ξ a η. Potrebujeme

$$X_x = 1\ , \quad X_y = 0\ , \quad Y_x = -\frac{y}{x^2}\ , \quad Y_y = \frac{1}{x}\ , \quad Y_{xx} = \frac{2y}{x^3}\ , \quad Y_{xy} = -\frac{1}{x^2}\ , \quad Y_{yy} = 0\ , \tag{2.56}$$

všetky druhé derivácie X sú nulové. Dostaneme

$$u_{xx} = u_{XX} - \frac{2y}{x^2}\,u_{XY} + \frac{y^2}{x^4}\,u_{YY} + \frac{2y}{x^3}\,u_Y\ , \tag{2.57}$$

$$u_{xy} = \frac{1}{x}\,u_{XY} - \frac{y}{x^3}\,u_{YY} - \frac{1}{x^2}\,u_Y\ , \tag{2.58}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{x^2}\,u_{YY}\ . \tag{2.59}$$

Po dosadení do rovnice sa vyrušia nielen členy s u_{XY} a u_{YY}, ako to zaručuje všeobecný postup, ale aj členy s prvou deriváciou u_Y, hoci zámena je nelineárna. Zostane iba

$$x^2 u_{XX} = 0\ , \quad \text{t. j.} \quad u_{XX} = 0\ . \tag{2.60}$$

Túto rovnicu už vieme vyriešiť priamo. Dvojnásobnou integráciou podľa X dostaneme $u = f(Y) + X\,g(Y)$ s ľubovoľnými funkciami f, g, teda

$$u(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + x\,g\left(\frac{y}{x}\right)\ . \tag{2.61}$$

Výsledok má jednoduchú interpretáciu. Funkcia $f(y/x)$ je homogénna stupňa 0 a $x\,g(y/x)$ je homogénna stupňa 1. Rovnicu totiž môžeme zapísať pomocou operátora $E = x\partial_x + y\partial_y$ ako

$$x^2 u_{xx} + 2xy\,u_{xy} + y^2 u_{yy} = E(E-1)u = 0\ , \tag{2.62}$$

o čom sa ľahko presvedčíme rozpísaním E^2. Pre homogénnu funkciu stupňa k platí $Eu = k\,u$ (Eulerova veta o homogénnych funkciách), a preto rovnicu spĺňa každá homogénna funkcia stupňa 0 alebo 1. ■

Význam charakteristík. Na záver sa vráťme k otázke, prečo sa krivkám (2.21) hovorí charakteristiky. Pri rovnici druhého rádu je prirodzené zadať na nejakej krivke γ hodnotu riešenia aj jeho deriváciu v smere normály, podobne ako pri obyčajnej diferenciálnej rovnici druhého rádu zadávame polohu aj rýchlosť. Takej úlohe hovoríme **Cauchyho úloha**. Pýtame sa, či tieto údaje určujú riešenie v okolí krivky γ. Prvým krokom je zistiť, či z nich vieme vypočítať aspoň derivácie riešenia na samotnej krivke.

Nech je krivka γ zadaná parametricky ako $\big(x(s), y(s)\big)$. Zo zadanej hodnoty u na γ poznáme deriváciu v smere dotyčnice, $du/ds = u_x x' + u_y y'$, a spolu so zadanou deriváciou v smere normály tak na γ poznáme obe prvé derivácie $p(s) = u_x$ a $q(s) = u_y$. Ich derivovaním pozdĺž krivky dostaneme dve rovnice pre druhé derivácie a tretiu dodá samotná rovnica:

$$x' u_{xx} + y' u_{xy} = p' \ , \tag{2.63}$$

$$x' u_{xy} + y' u_{yy} = q' \ , \tag{2.64}$$

$$a\, u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = F \ , \tag{2.65}$$

kde F označuje nižšie členy rovnice, ktoré na γ už poznáme. Je to sústava troch lineárnych rovníc pre tri neznáme u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} s determinantom

$$\det \begin{pmatrix} x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \\ a & 2b & c \end{pmatrix} = a\, y'^2 - 2b\, x' y' + c\, x'^2 \ . \tag{2.66}$$

Ak je determinant nenulový, sú druhé derivácie na γ zadanými údajmi určené jednoznačne. Dá sa ukázať, že potom derivovaním rovnice určíme postupne aj všetky vyššie derivácie. Determinant je však nulový práve vtedy, keď smer dotyčnice (x', y') spĺňa rovnicu (2.21), teda keď sa γ v danom bode dotýka charakteristiky. Na charakteristike Cauchyho údaje druhé derivácie neurčujú: sústava má riešenie len vtedy, keď sú údaje navzájom zviazané, a potom ich má nekonečne veľa. Druhé derivácie riešenia preto môžu pri prechode cez charakteristiku skákať. Je to presná obdoba podmienky transverzality z kapitoly 1, kde počiatočná krivka tiež nesmela mať smer charakteristiky. Treba však dodať, že ani znalosť všetkých derivácií na γ ešte nezaručuje, že riešenie existuje. Pre analytické koeficienty a analytické údaje na necharakteristickej krivke to v jej okolí zaručuje Cauchyho–Kovalevskej veta spomínaná v úvode.

Pozrime sa, čo to znamená pre naše tri modelové rovnice. Pre vlnovú rovnicu $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ má rovnica (2.21) v premenných (x, t) tvar $dx^2 - c^2 dt^2 = 0$, charakteristiky sú teda priamky $x \pm ct = \text{const}$. Priamka $t = 0$ nie je charakteristikou, a preto na nej môžeme nezávisle zadať u aj u_t. Navyše v kapitole 3 uvidíme, že nespojitosti počiatočnej podmienky sa šíria práve pozdĺž charakteristík. Pre rovnicu vedenia tepla $u_t - u_{xx} = 0$ dostaneme $dt^2 = 0$, takže charakteristikami sú priamky $t = \text{const}$ a počiatočná priamka $t = 0$ je sama charakteristikou. Hodnoty u a u_t na nej preto nemôžeme zadať nezávisle, lebo rovnica z $u(x, 0)$ priamo určí $u_t = u_{xx}$. To je dôvod, prečo k rovnici vedenia tepla patrí iba jedna počiatočná podmienka. Eliptické rovnice reálne charakteristiky nemajú, takže z tohto pohľadu je každá krivka vhodná. Ukáže sa však, že Cauchyho úloha pre ne nie je dobre položená,

lebo riešenie veľmi citlivo závisí od údajov (Hadamardov príklad v kapitole 6). Prirodzené sú pre ne okrajové podmienky na celej hranici oblasti.

3 Vlnová rovnica a rovnica vedenia tepla v jednom rozmere

V kapitole 2 sme videli, že typ rovnice druhého rádu do veľkej miery určuje, ako sa správajú jej riešenia a aké podmienky k nej patria. V tejto kapitole to uvidíme na dvoch najjednoduchších predstaviteľoch, na hyperbolickej vlnovej rovnici a na parabolickej rovnici vedenia tepla v jednom priestorovom rozmere. Obe najprv odvodíme z jednoduchých fyzikálnych modelov, retiazky telies spojených pružinkami a tenkej tyče, a potom ich vyriešime na celej priamke, na polpriamke a na intervale. Vlnovú rovnicu riešime pomocou charakteristík, čo vedie na d'Alembertov vzorec, a rovnicu vedenia tepla Fourierovou transformáciou, čo vedie na Poissonov vzorec. V časti 3.3 obe riešenia porovnáme pre tú istú počiatočnú podmienku a v časti 3.4 sa pozrieme na to, na akých krivkách v rovine (x,t) môžeme údaje zadávať. V celej kapitole ponecháme rýchlosť šírenia vĺn c aj teplotnú vodivosť k všeobecné, aby bolo vidno ich fyzikálny význam a rozmery. Výsledky budú vzorom pre kapitolu 5, kde tie isté rovnice vyriešime vo viacerých rozmeroch, a pre Fourierovu metódu v kapitole 7.

3.1 Vlnová rovnica v jednom rozmere

Vlnová rovnica

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{3.1}$$

je pre spojité prostredia tým, čím je harmonický oscilátor pre sústavy častíc. Z teoretickej mechaniky vieme, že malé kmity ľubovoľnej sústavy okolo stabilnej rovnovážnej polohy opisujú lineárne rovnice, lebo potenciálnu energiu stačí rozvinúť do druhého rádu vo výchylkách, a sústava sa potom rozpadne na nezávislé harmonické oscilátory. Rovnaká úvaha pre spojité prostredie, v ktorom na seba pôsobia iba susedné časti, vedie k lineárnej rovnici pre výchylku $u(x,t)$ a v najjednoduchšom prípade homogénneho prostredia je to práve vlnová rovnica. Dostaneme ju pre kmity struny, pozdĺžne vlny v tyči aj zvuk v plyne. V troch rozmeroch, kde u_{xx} nahradí Δu, ju z Maxwellových rovníc dostaneme aj pre elektrické a magnetické pole vo vákuu a c je potom rýchlosť svetla. Súvislosť s oscilátorom je aj celkom priama. V kapitole 7 uvidíme, že kmity struny konečnej dĺžky sú superpozíciou módov, z ktorých každý kmitá ako harmonický oscilátor so svojou frekvenciou. Spojité prostredie je teda v istom zmysle sústava nekonečne veľa oscilátorov a ich kvantovaním dostaneme fonóny alebo fotóny.

V tejto časti vlnovú rovnicu najprv odvodíme pre jednoduchý model, na ktorom vidno túto súvislosť priamo, a potom ju vyriešime, najprv na celej priamke a potom na polpriamke a na intervale.

3.1.1 Odvodenie vlnovej rovnice

Modelom pružného prostredia bude retiazka N telies s hmotnosťou m spojených pružinkami s tuhosťou k, teda sústava viazaných harmonických oscilátorov. Retiazka má dĺžku L, susedné telesá sú v rovnováhe vo vzdialenosti $a = L/N$ a to je aj pokojová dĺžka pružiniek.

Pozdĺžne vlny. Označme $u_n(t)$ výchylku n-tého telesa z rovnovážnej polohy v smere retiazky. Pružinka medzi telesami n a $n+1$ je predĺžená o $u_{n+1}-u_n$ a ťahá teleso n k telesu $n+1$ silou $k(u_{n+1}-u_n)$. Pružinka na druhej strane je predĺžená o u_n-u_{n-1} a ťahá ho opačným smerom, takže pohybová rovnica

je

$$m\ddot{u}_n = k\,(u_{n+1} - u_n) - k\,(u_n - u_{n-1}) \ . \tag{3.2}$$

Zavedieme pomerné rozdiely

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{a} \ , \quad u''_n = \frac{u'_n - u'_{n-1}}{a} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{a^2} \ , \tag{3.3}$$

ktoré sú označené tak, aby pripomínali derivácie. Rozdiel u'_n je relatívne predĺženie pružinky medzi telesami n a $n+1$, a preto patrí bodu medzi nimi. V druhom rozdiele od neho odčítame u'_{n-1}, porovnávame teda predĺženia pružiniek po oboch stranách telesa n a výsledok je symetrický okolo tohto telesa. S lineárnou hustotou retiazky $\lambda_0 = m/a$ má pohybová rovnica tvar

$$\ddot{u}_n = \frac{ka}{\lambda_0}\, u''_n \ . \tag{3.4}$$

Význam súčinu ka uvidíme, keď celú retiazku natiahneme silou F. Každá pružinka sa predĺži o $\Delta a = F/k$ a celá retiazka o $\Delta L = N\Delta a$, a preto

$$F = ka\,\frac{\Delta a}{a} = ka\,\frac{\Delta L}{L} \ . \tag{3.5}$$

Súčin $C = ka$ je teda konštanta úmernosti medzi silou a relatívnym predĺžením, ktorej hovoríme tuhosť v ťahu. Pre tyč s prierezom S je $C = ES$, kde E je modul pružnosti v ťahu (Youngov modul). Na rozdiel od k nezávisí od toho, na koľko kúskov retiazku rozdelíme.

Teraz urobíme limitu $N \to \infty$, v ktorej sa L, C ani λ_0 nemenia, aby mala retiazka stále rovnakú dĺžku, hmotnosť aj tuhosť v ťahu:

$$a = \frac{L}{N} \to 0 \ , \quad m = \lambda_0 a \to 0 \ , \quad k = \frac{C}{a} \to \infty \ . \tag{3.6}$$

Namiesto N funkcií $u_n(t)$ potom výchylku retiazky opisuje jedna funkcia dvoch premenných $u(x,t)$, ktorá v bode $x = na$ nadobúda hodnotu $u_n(t)$. Pomerné rozdiely pre $a \to 0$ prejdú na derivácie,

$$u'_n = \frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} \to u_x \ , \quad u''_n = \frac{u(x+a,t) - 2u(x,t) + u(x-a,t)}{a^2} \to u_{xx} \ , \tag{3.7}$$

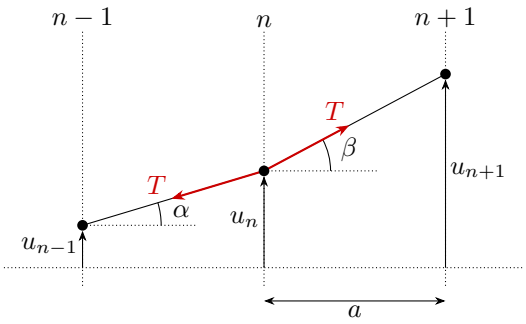
a pohybová rovnica sa zmení na vlnovú rovnicu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \ , \quad c^2 = \frac{C}{\lambda_0} \ . \tag{3.8}$$

Priečne vlny. Pri priečnych vlnách kmitajú telesá kolmo na smer šírenia, takže u_n teraz označuje výchylku n-tého telesa kolmo na retiazku. Retiazka musí byť napnutá silou T, teda pružinky sú natiahnuté už v rovnováhe a každá ťahá oba svoje konce silou T. Bez napätia by bola priečna sila úmerná tretej mocnine výchyliek a v lineárnom priblížení by sme žiadne vlny nedostali. Nech α a β sú uhly sklonu spojníc telies $n-1$, n a n, $n+1$ (obrázok 13). Priečna sila pôsobiaca na teleso n je potom $T\sin\beta - T\sin\alpha$. Pre malé výchylky je $\sin\beta \approx \tan\beta = u'_n$ a $\sin\alpha \approx \tan\alpha = u'_{n-1}$, pozdĺžne zložky síl sa v tomto priblížení vyrušia a dostávame

$$m\ddot{u}_n = T\,(u'_n - u'_{n-1}) = Ta\,u''_n \ . \tag{3.9}$$

Po vydelení $m = \lambda_0 a$ a v limite $N \to \infty$ je to opäť vlnová rovnica, tentoraz s $c^2 = T/\lambda_0$.



Obr. 13: Priečne kmity napnutej retiazky. Telesá $n-1$, n, $n+1$ sú vychýlené z rovnovážnych polôh (bodkované zvislé priamky) o u_{n-1}, u_n, u_{n+1}. Pružinky ťahajú teleso n silami veľkosti T smerom k susedným telesám, α a β sú uhly sklonu spojníc telies $n-1$, n a n, $n+1$.

3.1.2 d'Alembertov vzorec a Duhamelov princíp

Najprv nájdeme všeobecné riešenie vlnovej rovnice (3.1) na celej priamke, $x \in \mathbb{R}$. Počiatočnými podmienkami sa budeme zaoberať až potom. K všeobecnému riešeniu sa dá dostať niekoľkými spôsobmi a ukážeme si dva z nich.

Vlnová rovnica je hyperbolická a jej charakteristiky sú podľa časti 2.2 priamky $x \pm ct = \text{const}$. Tam sme tiež videli, že v súradniciach, ktoré sú pozdĺž charakteristík konštantné, zostane z hlavnej časti hyperbolickej rovnice iba zmiešaná derivácia. Zavedieme preto súradnice

$$\xi = x + ct \ , \quad \eta = x - ct \ . \tag{3.10}$$

Podľa pravidla pre deriváciu zloženej funkcie je

$$u_t = c\,(u_\xi - u_\eta) \ , \quad u_x = u_\xi + u_\eta \tag{3.11}$$

a ďalším derivovaním dostaneme

$$u_{tt} = c^2\,(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \ , \tag{3.12a}$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \ . \tag{3.12b}$$

Rovnica (3.1) tak prejde do tvaru

$$-4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \ . \tag{3.13}$$

Z rovnice $u_{\xi\eta} = 0$ vyplýva, že u_ξ nezávisí od η, teda je funkciou iba premennej ξ. Ďalšou integráciou podľa ξ dostaneme všeobecné riešenie

$$u(\xi,\eta) = g_1(\xi) + g_2(\eta) \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = g_1(x+ct) + g_2(x-ct) \ , \tag{3.14}$$

kde g_1 a g_2 sú ľubovoľné dvakrát spojite diferencovateľné funkcie jednej premennej. Člen $g_2(x-ct)$ je profil, ktorý sa bez zmeny tvaru posúva rýchlosťou c doprava, a člen $g_1(x+ct)$ sa rovnako posúva doľava.

Druhý spôsob využíva to, že vlnový operátor sa dá rozložiť na súčin dvoch operátorov prvého rádu, $\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$. Rovnicu (3.1) teda môžeme prepísať na dve rovnice prvého rádu

$$(\partial_t - c\partial_x)\, v = 0 \ , \quad (\partial_t + c\partial_x)\, u = v \tag{3.15}$$

a každú z nich vyriešiť metódou charakteristík z kapitoly 1. Prvú vyriešime hravo. Jej charakteristiky sú dané rovnicami

$$\dot{t} = 1 \ , \quad \dot{x} = -c \quad \Rightarrow \quad x + ct = \text{const} \ , \tag{3.16}$$

a keďže pravá strana je nulová, je v pozdĺž nich konštantná. Riešením je teda $v(x,t) = \bar{g}_1(x+ct)$ s ľubovoľnou funkciou $\bar{g}_1$. Po dosadení do druhej rovnice dostaneme

$$(\partial_t + c\partial_x)\, u = \bar{g}_1(x+ct) \ . \tag{3.17}$$

Jej charakteristiky sú priamky $x - ct = \eta = \text{const}$ a pozdĺž nich sa mení iba súradnica $\xi = x + ct$. V súradniciach (3.10) je $\partial_t + c\partial_x = 2c\,\partial_\xi$, takže

$$2c\,\partial_\xi u = \bar{g}_1(\xi) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2c}\int d\xi\, \bar{g}_1(\xi) + g_2(\eta) = g_1(\xi) + g_2(\eta) \ , \tag{3.18}$$

kde g_1 je primitívna funkcia k $\bar{g}_1/(2c)$. Dostali sme to isté riešenie ako prvým spôsobom.

Teraz pridáme počiatočné podmienky, teda budeme riešiť Cauchyho úlohu. Okrem rovnice

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \tag{3.19}$$

máme zadanú počiatočnú hodnotu a počiatočnú deriváciu podľa času

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \quad u_t(x,0) = \psi(x) \ . \tag{3.20}$$

Potrebujeme teda nájsť funkcie g_1 a g_2, pre ktoré všeobecné riešenie (3.14) tieto podmienky spĺňa. Pre všeobecné riešenie je

$$u(x,0) = g_1(x) + g_2(x) \ , \quad u_t(x,0) = cg_1'(x) - cg_2'(x) \ . \tag{3.21}$$

Prvá podmienka teda priamo určuje súčet $g_1 + g_2$. Druhú podmienku vydelíme c a zintegrujeme od 0 po x, čím dostaneme rozdiel $g_1 - g_2$:

$$g_1(x) + g_2(x) = \phi(x) \ , \quad g_1(x) - g_2(x) = \frac{1}{c}\int_0^x ds\, \psi(s) + g_1(0) - g_2(0) \ . \tag{3.22}$$

Z týchto dvoch rovníc vyjadríme

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x ds\, \psi(s) + \frac{1}{2}\left(g_1(0) - g_2(0)\right) \ , \tag{3.23}$$

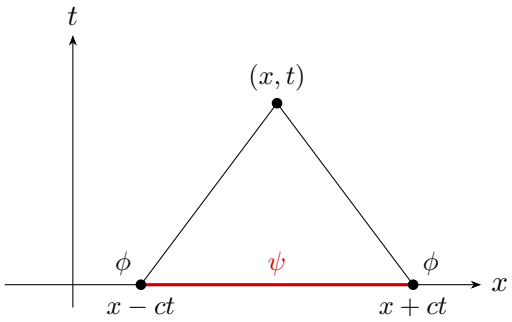
$$g_2(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x ds\, \psi(s) - \frac{1}{2}\left(g_1(0) - g_2(0)\right) \ . \tag{3.24}$$

Po dosadení do $u(x,t) = g_1(x+ct) + g_2(x-ct)$ sa konštanty $\pm\frac{1}{2}\left(g_1(0) - g_2(0)\right)$ navzájom vyrušia a rozdiel dvoch integrálov od nuly sa spojí do jedného. Dostávame

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} ds\, \psi(s) \ . \tag{3.25}$$

Tomuto vzťahu sa hovorí **d'Alembertov vzorec**. Aby bola funkcia (3.25) dvakrát spojite diferencovateľná, a teda naozaj riešením, stačí, aby $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ a $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Z d'Alembertovho vzorca vidíme, že riešenie v bode x a čase t závisí od hodnôt ϕ iba v dvoch bodoch $x \pm ct$ a od hodnôt ψ iba na intervale medzi týmito bodmi. Sú to body, v ktorých charakteristiky prechádzajúce bodom (x,t) pretínajú priamku $t=0$ (obrázok 14). Intervalu $[x-ct, x+ct]$ hovoríme **oblasť závislosti** bodu (x,t). Ak počiatočné podmienky mimo neho akokoľvek zmeníme, riešenie v bode (x,t) sa nezmení.



Obr. 14: Oblasť závislosti bodu (x,t). Charakteristiky prechádzajúce týmto bodom pretínajú priamku $t=0$ v bodoch $x \pm ct$. Riešenie v bode (x,t) závisí od hodnôt ϕ v týchto dvoch bodoch a od hodnôt ψ na intervale medzi nimi (červená úsečka).

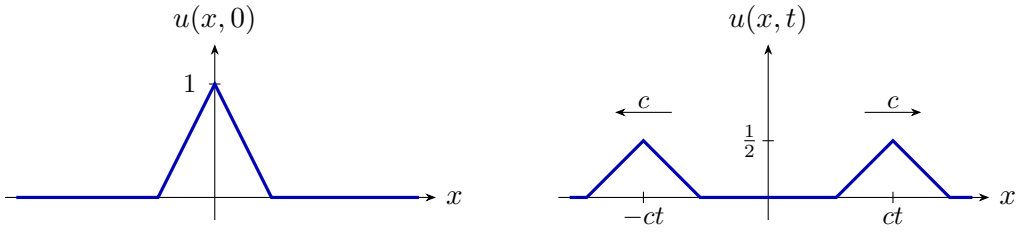
Na tú istú vlastnosť sa môžeme pozrieť aj z opačnej strany. Počiatočné podmienky v bode x_0 ovplyvnia riešenie v čase t iba v bodoch, pre ktoré $|x-x_0| \leq ct$. Tejto oblasti medzi charakteristikami $x = x_0 \pm ct$ hovoríme **oblasť vplyvu** bodu x_0. Ak sú teda počiatočné podmienky nenulové iba na intervale $[a,b]$, v čase t je riešenie nenulové nanajvýš na intervale $[a-ct, b+ct]$. Porucha sa šíri rýchlosťou najviac c, čo pri vlnách očakávame. Na konci kapitoly uvidíme, že rovnica vedenia tepla sa v tomto ohľade správa úplne inak.

Medzi oboma počiatočnými podmienkami je pritom rozdiel. Hodnota $\phi(x_0)$ sa v riešení v bode x prejaví iba v okamihoch, keď $|x-x_0| = ct$, teda keď do bodu x dorazí jedna z dvoch charakteristík vychádzajúcich z bodu x_0. Hodnota $\psi(x_0)$ sa naopak prejaví vo všetkých časoch $t \geq |x-x_0|/c$. Ak napríklad strunu, ktorá je v pokoji, na krátkom úseku udrieme, je $\phi = 0$ a ψ je nenulová iba na tomto úseku. V bode x mimo úseku sa porucha objaví v čase, keď k nemu dorazí, ale po jej prechode sa struna do pôvodnej polohy nevráti. Keď už interval $[x-ct, x+ct]$ obsahuje celý úsek, je

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \psi(s) \ , \tag{3.26}$$

takže struna ostane posunutá o konštantu a vlna za sebou nechá stopu. V kapitole 5 uvidíme, že v dvoch priestorových rozmeroch nechá vlna za sebou podobnú stopu, kým v troch rozmeroch prejde porucha každým bodom za konečný čas a za ňou je opäť pokoj. V tomto zmysle platí v troch rozmeroch **Huygensov princíp**, v jednom a v dvoch nie.

Ak je počiatočná rýchlosť ψ nulová, ostane z d'Alembertovho vzorca iba prvý člen. Počiatočný profil sa teda rozdelí na dve polovice, z ktorých jedna sa rozbehne rýchlosťou c doľava a druhá rovnakou rýchlosťou doprava (obrázok 15).



Obr. 15: Riešenie vlnovej rovnice s nulovou počiatočnou rýchlosťou, $\psi = 0$. Vľavo počiatočný profil ϕ, vpravo riešenie v čase t, keď sa jeho dve polovice už oddelili. Každá z nich má polovičnú výšku a pohybuje sa rýchlosťou c, ľavá doľava a pravá doprava.

Na tom istom obrázku vidno ešte jednu vlastnosť. Počiatočný profil má zlomy, teda body, v ktorých ϕ nemá deriváciu, a tieto zlomy sa presúvajú spolu s profilom po charakteristikách. Vo všeobecnosti, ak sú ϕ a ψ hladké všade okrem bodu x_0, je riešenie hladké všade okrem dvoch charakteristík $x \pm ct = x_0$ vychádzajúcich z bodu $(x_0, 0)$ a singularita počiatočných podmienok (skok funkcie alebo niektorej jej derivácie) sa šíri po nich. Presne to sme očakávali na konci časti 2.2: derivácie riešenia môžu byť nespojité iba pri prechode cez charakteristiku, a nespojitosti počiatočných podmienok sa preto šíria práve po charakteristikách. Takáto funkcia nie je všade dvakrát diferencovateľná, takže rovnicu v doterajšom zmysle spĺňa iba mimo týchto charakteristík. V kapitole 4 uvidíme, že v zmysle distribúcií je riešením aj na nich (príklad 33), a v kapitole 5 budú môcť byť distribúciami aj samotné počiatočné podmienky.

Cauchyho úloha pre vlnovú rovnicu má teda riešenie, ktoré je dané d'Alembertovým vzorcom, a iné riešenie neexistuje. Každé dvakrát spojite diferencovateľné riešenie vlnovej rovnice má totiž tvar (3.14) a počiatočné podmienky určia funkcie g_1 a g_2 až na konštantu, ktorá sa vo výsledku vyruší. Riešenie navyše spojite závisí od počiatočných podmienok. Ak sa dve dvojice počiatočných podmienok líšia málo, napríklad $|\phi(x) - \tilde{\phi}(x)| \leq \varepsilon$ a $|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| \leq \varepsilon$ pre všetky x, z d'Alembertovho vzorca pre rozdiel zodpovedajúcich riešení dostaneme

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} ds\, \varepsilon = (1+t)\,\varepsilon \ . \tag{3.27}$$

Na konečnom časovom intervale sa teda líšia málo aj riešenia. Úlohe, ktorá má riešenie, toto riešenie je jediné a spojite závisí od zadaných údajov, hovoríme **dobre položená** (v zmysle Hadamarda). Pri fyzikálnej úlohe je to prirodzená požiadavka, lebo počiatočné podmienky poznáme vždy len s nejakou presnosťou. Na konci časti 2.2 sme spomenuli, že Cauchyho úloha pre eliptické rovnice dobre položená nie je, a príklad uvidíme v kapitole 6.

Jednoznačnosť sa dá ukázať aj inak, bez toho, aby sme poznali tvar riešenia, a tento spôsob má širšie použitie. Pre riešenie vlnovej rovnice zavedieme

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) \ . \tag{3.28}$$

Pre retiazku z predchádzajúcej časti je $\lambda_0 E$ jej celková energia. Hustota kinetickej energie je totiž $\frac{1}{2}\lambda_0 u_t^2$ a hustota energie pružín je $\frac{1}{2}C u_x^2$, čo je vďaka $c^2 = C/\lambda_0$ to isté ako $\frac{1}{2}\lambda_0 c^2 u_x^2$ (pri priečnych vlnách je

namiesto C napätie T). Predpokladajme, že riešenie je v každom čase nenulové iba na ohraničenom intervale, čo podľa predchádzajúcich odsekov platí napríklad vtedy, keď sú také počiatočné podmienky. Potom

$$\frac{dE}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \Big(u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt} \Big) = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \left(u_t u_{xx} + u_x u_{xt} \right) = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \partial_x \left(u_t u_x \right) = 0 \ , \qquad (3.29)$$

kde sme v druhom kroku využili rovnicu a posledný integrál je nulový, lebo $u_t u_x$ je mimo ohraničeného intervalu nulové. Energia sa teda zachováva. Ak sú u a $\tilde{u}$ dve riešenia s rovnakými počiatočnými podmienkami, ich rozdiel $w = u - \tilde{u}$ rieši vlnovú rovnicu s nulovými počiatočnými podmienkami. Jeho energia je v čase $t = 0$ nulová, a preto je nulová stále. Integrand v (3.28) je nezáporný, takže $w_t = w_x = 0$ všade, funkcia w je konštantná a z počiatočnej podmienky $w = 0$.

Výpočet nepotreboval tvar riešenia, iba to, že okrajový člen $u_t u_x$ vypadne. Funguje preto aj na ohraničenom intervale, ak je koniec struny ukotvený ($u = 0$, a teda $u_t = 0$) alebo voľný ($u_x = 0$), a vo viacerých rozmeroch, kde sa $\partial_x(u_t u_x)$ zmení na divergenciu $\vec{\nabla} \cdot (u_t \vec{\nabla} u)$. Predpokladu, že riešenie je nenulové iba na ohraničenom intervale, sa dá zbaviť tak, že energiu nepočítame na celej priamke, ale iba na intervale $\left[x_0 - c(t_0 - t), x_0 + c(t_0 - t) \right]$, ktorý sa s rastúcim časom zmenšuje rýchlosťou c z každej strany. Podobný výpočet ukáže, že energia v ňom nerastie. Z toho vyplýva jednoznačnosť bez akýchkoľvek predpokladov o správaní v nekonečne a nezávisle od d'Alembertovho vzorca aj to, že porucha sa šíri rýchlosťou najviac c.

Budeme teraz hľadať riešenie nehomogénnej rovnice s rovnakými počiatočnými podmienkami,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \qquad (3.30a)$$

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \qquad (3.30b)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \ . \qquad (3.30c)$$

Plán útoku bude takýto: riešenie rozdelíme na dve časti, $u = u^A + v$, tak, aby platilo

$$\begin{array}{lcl} u^A_{tt} - c^2 u^A_{xx} = 0 \ , & & v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x,t) \ , \\ u^A(x,0) = \phi(x) \ , & \text{a} & v(x,0) = 0 \ , \\ u^A_t(x,0) = \psi(x) \ , & & v_t(x,0) = 0 \ . \end{array} \qquad (3.31)$$

Rovnica aj počiatočné podmienky sú lineárne, takže súčet $u^A + v$ potom rieši pôvodnú úlohu. Funkciu u^A dáva d'Alembertov vzorec (3.25), ostáva teda nájsť v.

Pri hľadaní v nám pomôže jednoznačnosť riešenia. Ak nájdeme nejaké riešenie, hoci aj uhádnutím, môžeme s čistým svedomím skončiť, lebo iné riešenie neexistuje. Rozdiel dvoch riešení úlohy pre v totiž spĺňa homogénnu vlnovú rovnicu s nulovými počiatočnými podmienkami, a preto je podľa d'Alembertovho vzorca nulový.

Funkciu v nájdeme dvoma rôznymi spôsobmi. Prvý vychádza z fyzikálnej predstavy. Ak u opisuje výchylku retiazky alebo struny z predchádzajúcej časti, zodpovedá pravá strana vonkajšej sile, ktorá na ňu pôsobí. Presnejšie, f je sila na jednotku dĺžky vydelená lineárnou hustotou λ_0, teda zrýchlenie, ktoré táto sila udeľuje. Rozdeľme čas na krátke intervaly dĺžky $\Delta\tau$. Počas intervalu okolo času τ zmení sila rýchlosť struny o $f(x,\tau)\Delta\tau$, ale jej výchylku za taký krátky čas takmer nezmení. Má teda rovnaký

účinok, ako keby sme strune v čase τ okamžite pridali rýchlosť $f(x,\tau)\Delta\tau$ a ďalej ju nechali kmitať voľne. Každý takýto impulz vyšle voľnú vlnu a vďaka linearite je výsledná výchylka súčtom vĺn od všetkých impulzov pred časom t. V limite $\Delta\tau \to 0$ sa súčet zmení na integrál.

Zadefinujeme preto pomocnú funkciu $U(x,t,\tau)$, ktorá pre každé pevné τ rieši homogénnu vlnovú rovnicu s počiatočnými podmienkami zadanými v čase $t = \tau$:

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \ , \tag{3.32a}$$

$$U(x,\tau,\tau) = 0 \ , \tag{3.32b}$$

$$U_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau) \ . \tag{3.32c}$$

Riešenie nájdeme hravo d'Alembertovým vzorcom, v ktorom čas t nahradíme časom $t-\tau$, ktorý uplynul od zadania počiatočných podmienok:

$$U(x,t,\tau) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} ds\, f(s,\tau) \ . \tag{3.33}$$

Impulz počas krátkeho intervalu $d\tau$ okolo času τ vyšle vlnu $U(x,t,\tau)\, d\tau$ a súčtom cez všetky impulzy pred časom t dostaneme kandidáta na riešenie,

$$v(x,t) = \int_0^t d\tau\, U(x,t,\tau) \ . \tag{3.34}$$

Fyzikálna úvaha nie je dôkaz, preto to overíme dosadením. Predpokladáme pritom, že f je spojite diferencovateľná, aby sme mohli derivovať pod integrálom. Pri derivovaní podľa t treba derivovať aj hornú hranicu integrálu, takže

$$v_t(x,t) = U(x,t,\tau)|_{\tau=t} + \int_0^t d\tau\, U_t(x,t,\tau) = \int_0^t d\tau\, U_t(x,t,\tau) \ , \tag{3.35}$$

lebo prvý člen je podľa druhej podmienky v (3.32) nulový. V čase $t = 0$ je interval integrácie prázdny, preto $v(x,0) = 0$ aj $v_t(x,0) = 0$. Funkcia v teda spĺňa počiatočné podmienky z (3.31) a ostáva ukázať, že spĺňa aj rovnicu. Ďalším derivovaním dostaneme

$$v_{tt} = U_t(x,t,\tau)|_{\tau=t} + \int_0^t d\tau\, U_{tt}(x,t,\tau) = f(x,t) + \int_0^t d\tau\, U_{tt}(x,t,\tau) \ , \tag{3.36}$$

$$c^2 v_{xx} = c^2 \int_0^t d\tau\, U_{xx}(x,t,\tau) = \int_0^t d\tau\, U_{tt}(x,t,\tau) \ , \tag{3.37}$$

kde sme v prvom riadku využili tretiu podmienku v (3.32) a v druhom samotnú rovnicu pre U. Odčítaním dostaneme

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = f \tag{3.38}$$

a vyhlasujeme prvé víťazstvo. Tomuto postupu sa hovorí **Duhamelov princíp**: riešenie nehomogénnej rovnice s nulovými počiatočnými podmienkami poskladáme z riešení homogénnej rovnice, ktorých počiatočné podmienky v čase τ určuje pravá strana $f(x,\tau)$.

Rovnaký postup poznáme z mechaniky. Vynútený oscilátor $\ddot{q} + \omega^2 q = f(t)$, ktorý je na začiatku v pokoji, $q(0) = \dot{q}(0) = 0$, má riešenie

$$q(t) = \int_0^t d\tau\, \frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega}\, f(\tau) \ . \tag{3.39}$$

Výraz $f(\tau)\sin\omega(t-\tau)/\omega$ je pohyb voľného oscilátora, ktorý v čase τ prechádza rovnovážnou polohou rýchlosťou $f(\tau)$. Hrá teda úlohu funkcie U a riešenie je opäť súčtom odoziev na jednotlivé impulzy $f(\tau)\,d\tau$.

Druhý spôsob, ako nájsť v, je priamy výpočet. V súradniciach (3.10) majú druhé derivácie tvar (3.12), takže rovnica pre v bude mať tvar

$$v_{\xi\eta} = -\frac{1}{4c^2} f(\xi,\eta)\ , \tag{3.40}$$

kde $f(\xi,\eta)$ je funkcia f vyjadrená v nových premenných. Počiatočné podmienky sú zadané na priamke $t=0$, ktorej v nových súradniciach zodpovedá priamka $\eta=\xi$. Prvá z nich teda hovorí, že $v(s,s)=0$ pre všetky s. Keďže $v(x,0)=0$ pre všetky x, je na tejto priamke nulová aj derivácia v_x a spolu s druhou podmienkou dostávame

$$\begin{aligned} v_x|_{t=0} &= v_\xi + v_\eta = 0\ , \\ v_t|_{t=0} &= cv_\xi - cv_\eta = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v_\xi(s,s) = v_\eta(s,s) = 0\ . \tag{3.41}$$

Na priamke $\eta=\xi$ je teda nulová funkcia v aj obe jej prvé derivácie.

Rovnicu (3.40) teraz explicitne zintegrujeme. Riešenie nás zaujíma v bode (x_0,t_0), ktorému v nových súradniciach zodpovedá bod $(\xi_0,\eta_0)=(x_0+ct_0,x_0-ct_0)$. Integrovať chceme tak, aby ľavá strana dala $v(\xi_0,\eta_0)$, a dolné hranice integrálov preto zvolíme na priamke $\eta=\xi$, kde poznáme v aj jej derivácie. Najskôr pri pevnom ξ integrujeme podľa η od $\eta=\xi$ po η_0:

$$\int_\xi^{\eta_0} d\eta\, v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = v_\xi(\xi,\eta_0) - v_\xi(\xi,\xi) = v_\xi(\xi,\eta_0)\ . \tag{3.42}$$

Potom integrujeme podľa ξ od η_0 po ξ_0:

$$\int_{\eta_0}^{\xi_0} d\xi\, v_\xi(\xi,\eta_0) = v(\xi_0,\eta_0) - v(\eta_0,\eta_0) = v(\xi_0,\eta_0)\ . \tag{3.43}$$

Na ľavej strane sme tak dostali riešenie v bode (ξ_0,η_0). To isté urobíme s pravou stranou. Prvá integrácia dá

$$-\frac{1}{4c^2}\int_\xi^{\eta_0} d\eta\, f(\xi,\eta) = \frac{1}{4c^2}\int_{\eta_0}^{\xi} d\eta\, f(\xi,\eta) \tag{3.44}$$

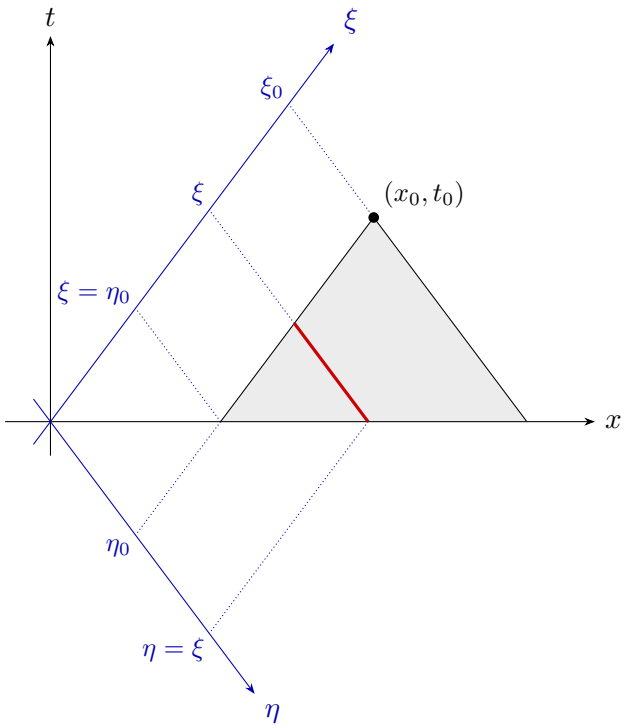
a po druhej dostaneme

$$v(\xi_0,\eta_0) = \frac{1}{4c^2}\int_{\eta_0}^{\xi_0} d\xi \int_{\eta_0}^{\xi} d\eta\, f(\xi,\eta)\ . \tag{3.45}$$

Už si len treba ujasniť, ako vyzerá integračná oblasť (obrázok 16), a vrátiť sa k premenným x, t.

Oblasť $\eta_0 \le \eta \le \xi \le \xi_0$ je trojuholník, ktorého základňa leží na priamke $t=0$ (teda $\eta=\xi$) a bočné strany sú charakteristiky $\eta=\eta_0$ a $\xi=\xi_0$ prechádzajúce bodom (x_0,t_0). Integračné premenné v pôvodných súradniciach označíme (s,τ), aby sa nepomiešali s bodom (x_0,t_0). Trojuholník je v nich opísaný nerovnosťami $0\le\tau\le t_0$ a $x_0-c(t_0-\tau)\le s\le x_0+c(t_0-\tau)$. Pri zámene premenných ešte potrebujeme jakobián

$$\det\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(s,\tau)} = \det\begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix} = -2c\ , \tag{3.46}$$



Obr. 16: Integračná oblasť v súradniciach $\xi = x+ct$, $\eta = x-ct$. Modré priamky so šípkami sú osi ξ a η. Priamky $\xi = \text{const}$ sú rovnobežné s osou η a priamky $\eta = \text{const}$ s osou ξ, bodkované úsečky ukazujú, ako sa na osiach odčítajú súradnice. Sivý trojuholník pod bodom (x_0, t_0) je oblasť $\eta_0 \leq \eta \leq \xi \leq \xi_0$. Pri pevnom ξ integrujeme podľa η po červenej úsečke od $\eta = \eta_0$ po $\eta = \xi$.

z ktorého vyplýva $d\xi\, d\eta = 2c\, ds\, d\tau$. Ak napokon bod (x_0, t_0) premenujeme späť na (x, t), dostaneme

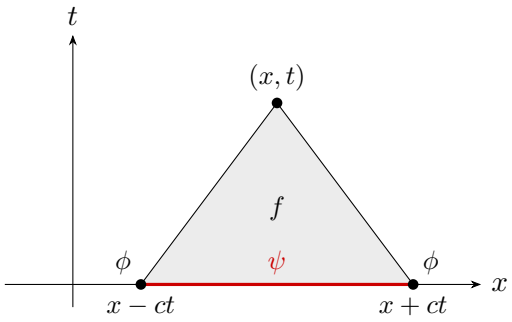
$$v(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} ds\, f(s,\tau) \ . \tag{3.47}$$

To isté dostaneme, keď do (3.34) dosadíme funkciu U, takže oba spôsoby vedú k rovnakému výsledku.

Riešenie nehomogénnej úlohy je teda súčtom d'Alembertovho vzorca (3.25) a výsledku (3.47),

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} ds\, \psi(s) + \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} ds\, f(s,\tau) \ . \tag{3.48}$$

Riešenie v bode (x, t) preto závisí od hodnôt ϕ v bodoch $x \pm ct$, od hodnôt ψ na intervale medzi nimi a od hodnôt f v celom trojuholníku pod bodom (x, t), ktorý ohraničujú charakteristiky prechádzajúce týmto bodom. Pri nehomogénnej rovnici je teda oblasťou závislosti bodu (x, t) celý tento trojuholník (obrázok 17).



Obr. 17: Oblasť závislosti bodu (x, t) pri nehomogénnej rovnici. Riešenie v bode (x, t) závisí od hodnôt ϕ v bodoch $x \pm ct$, od hodnôt ψ na intervale medzi nimi (červená úsečka) a od hodnôt f v celom sivom trojuholníku.

Príklad 19. Nájdite riešenie úlohy

$$u_{tt} - 4u_{xx} = \cos x \ , \tag{3.49}$$

$$u(x,0) = x^2 \ , \tag{3.50}$$

$$u_t(x,0) = \sin 2x \ . \tag{3.51}$$

□

Výsledok.

$$u(x,t) = x^2 + 4t^2 + \frac{1}{4}\sin(4t)\sin(2x) + \frac{1}{4}\left(\cos x - \cos x \cos 2t\right) \ . \tag{3.52}$$

3.1.3 Vlnová rovnica na polpriamke a na intervale

Doteraz sme riešili úlohu na celej priamke, $x \in \mathbb{R}$. Pozrime sa teraz, čo sa zmení, keď sa obmedzíme na kladné x. K počiatočným podmienkam potom pribudne podmienka, ktorá hovorí, ako sa riešenie správa na hranici $x = 0$. Pri strune je to zrejmé: pohybová rovnica platí iba pre body struny a čo robí jej koniec, musíme zadať zvlášť.

Začneme najjednoduchším prípadom, ukotveným koncom. Riešime teda úlohu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \quad x > 0 \ , \tag{3.53a}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \tag{3.53b}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \ , \tag{3.53c}$$

$$u(0,t) = 0 \ . \tag{3.53d}$$

Okrajovej podmienke, ktorá zadáva hodnotu riešenia na hranici, hovoríme Dirichletova. Úlohu vyriešime fintou. Počiatočné podmienky nepárne predĺžime na celú priamku,

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) \ , & x > 0 \ , \\ 0 \ , & x = 0 \ , \\ -\phi(-x) \ , & x < 0 \ , \end{cases} \tag{3.54}$$

a rovnako z ψ urobíme $\bar{\psi}$. Nech v rieši vlnovú rovnicu na celej priamke s počiatočnými podmienkami $v(x,0) = \bar{\phi}(x)$, $v_t(x,0) = \bar{\psi}(x)$. Funkcia $-v(-x,t)$ rieši tú istú Cauchyho úlohu, a preto sa podľa jednoznačnosti rovná $v(x,t)$. Riešenie v je teda v každom čase nepárne v premennej x, a preto $v(0,t) = 0$. Riešenie pôvodnej úlohy dostaneme ako zúženie v na kladné x.

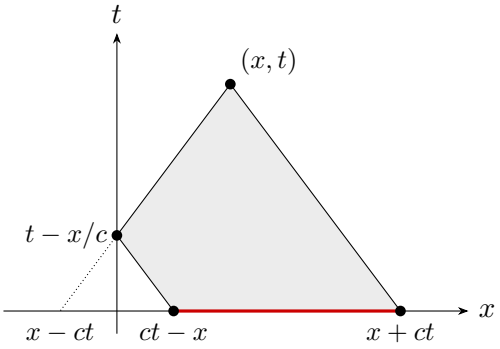
Funkciu v dáva d'Alembertov vzorec (3.25). Pre $x > ct$ ležia oba body $x \pm ct$ na kladnej polpriamke a vzorec sa nezmení. Pre $0 < x < ct$ je $x - ct < 0$, takže $\bar{\phi}(x - ct) = -\phi(ct - x)$ a časť integrálu cez záporné s sa odčíta, $\int_{x-ct}^{0} ds\, \bar{\psi}(s) = -\int_{0}^{ct-x} ds\, \psi(s)$. Dohromady dostávame

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} ds\, \psi(s) \ , & x > ct \ , \\ \dfrac{1}{2}\left[\phi(x+ct) - \phi(ct-x)\right] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct} ds\, \psi(s) \ , & 0 < x < ct \ . \end{cases} \tag{3.55}$$

Člen $-\phi(ct - x)$ opisuje odraz. Časť počiatočného profilu, ktorá sa pohybovala doľava, sa po dopade na ukotvený koniec vracia doprava s opačným znamienkom. Pri predĺžení to vidno názorne: zrkadlový obraz profilu s opačným znamienkom prichádza z oblasti $x < 0$ a v bode $x = 0$ sa s pôvodnou vlnou práve vyruší (obrázok 19, vľavo).

Zo vzorca (3.55) vidno aj to, ako sa pri hranici zmení oblasť závislosti. Pre $0 < x < ct$ závisí riešenie od hodnôt ϕ v bodoch $ct - x$ a $x + ct$ a od hodnôt ψ na intervale medzi nimi. Charakteristika $x - ct = \text{const}$ prechádzajúca bodom (x,t) totiž dorazí na hranicu v čase $t - x/c$ a odrazí sa od nej ako charakteristika druhej rodiny, ktorá pretne priamku $t = 0$ v bode $ct - x$ (obrázok 18).

Aby boli predĺžené funkcie $\bar{\phi} \in C^2$ a $\bar{\psi} \in C^1$, musí byť $\phi(0) = \phi''(0) = 0$ a $\psi(0) = 0$. Tieto podmienky vyplývajú priamo z úlohy, ak má byť riešenie hladké až po roh $(0,0)$. Z $u(0,t) = 0$ pre všetky t totiž dostaneme aj $u_t(0,t) = u_{tt}(0,t) = 0$ a v čase $t = 0$ potom $\phi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ a $c^2\phi''(0) = u_{tt}(0,0) = 0$. Ak niektorá z nich neplatí, je riešenie stále dané vzorcom (3.55), ale na charakteristike $x = ct$ vychádzajúcej z rohu $(0,0)$ má skok alebo zlom, podobne ako pri nespojitostiach počiatočných podmienok v časti 3.1.2.



Obr. 18: Oblasť závislosti bodu (x,t) s $0 < x < ct$ na polpriamke s ukotveným koncom. Charakteristika smerujúca doľava sa v čase $t - x/c$ odrazí od hranice $x = 0$ a pretne priamku $t = 0$ v bode $ct - x$, jej predĺženie do $x < 0$ (bodkované) končí v zrkadlovom bode $x - ct$. Riešenie závisí od hodnôt ϕ v bodoch $ct - x$ a $x + ct$, od hodnôt ψ na červenom intervale medzi nimi a pri nehomogénnej rovnici od hodnôt f v sivom štvoruholníku.

Podobnú fintu budeme používať často. Ak je na okraji namiesto hodnoty zadaná nulová derivácia, $u_x(0,t) = 0$ (Neumannova okrajová podmienka, pri strune voľný koniec), použijeme párne predĺženie

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x)\ , & x \geq 0\ , \\ \phi(-x)\ , & x < 0\ , \end{cases} \tag{3.56}$$

a rovnako pre ψ (aby boli predĺženia hladké, tentoraz musí byť $\phi'(0) = \psi'(0) = 0$). Rovnakou úvahou ako vyššie je potom riešenie v Cauchyho úlohy v každom čase párne v x. Derivácia párnej funkcie je nepárna, a teda v nule nulová, takže $v_x(0,t) = 0$. Odrazená vlna má teraz rovnaké znamienko ako dopadajúca (obrázok 19, vpravo).

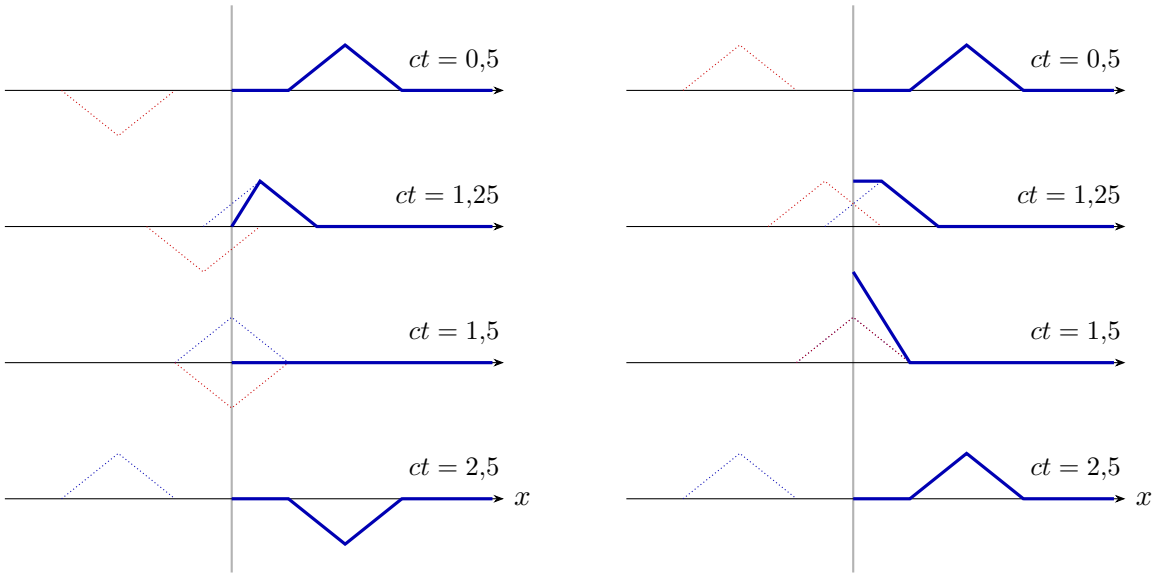
Predĺženie funguje aj pre nehomogénnu rovnicu $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$ na polpriamke. Pri ukotvenom konci predĺžime nepárne v premennej x aj pravú stranu, $\bar{f}(x,t) = -f(-x,t)$ pre $x < 0$, a riešenie s nulovými počiatočnými podmienkami dostaneme z Duhamelovho vzorca (3.47) s $\bar{f}$. Rovnako ako pri $\bar{\psi}$ sa časť vnútorného integrálu cez záporné s odčíta od integrálu cez kladné s a výsledok môžeme zapísať jediným vzorcom

$$v(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t d\tau \int_{|x-c(t-\tau)|}^{x+c(t-\tau)} ds\, f(s,\tau)\ . \tag{3.57}$$

Pre $x > c(t-\tau)$ je to pôvodná dolná hranica, pre $x < c(t-\tau)$ sa interval zúži na $[c(t-\tau)-x, x+c(t-\tau)]$. Riešenie v bode (x,t) teda závisí od f v sivom štvoruholníku na obrázku 18. Pri voľnom konci predĺžime f párne.

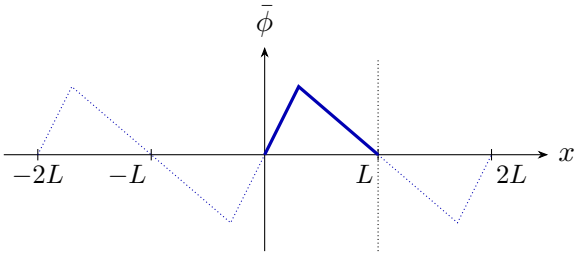
Ak máme niektorú z týchto situácií na ohraničenom intervale $0 < x < L$, treba predĺžiť počiatočné podmienky tak, aby mali správnu symetriu vzhľadom na oba konce. Pri ukotvených koncoch, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, ich predĺžime nepárne na interval $(-L, 0)$,

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x)\ , & 0 < x < L\ , \\ -\phi(-x)\ , & -L < x < 0\ , \end{cases} \tag{3.58}$$



Obr. 19: Odraz vlny na konci polpriamky $x = 0$ (sivá zvislá čiara), vľavo pri ukotvenom a vpravo pri voľnom konci, v štyroch časoch pod sebou. Počiatočná rýchlosť je $\psi = c\phi'$, takže vlna $\phi(x + ct)$ sa pohybuje iba doľava (modrá bodkovaná). Predĺžením vznikne jej zrkadlový obraz $\mp\phi(ct - x)$, ktorý prichádza z oblasti $x < 0$ (červený bodkovaný). Riešenie na polpriamke je ich súčet (hrubá čiara). V čase $ct = 1{,}5$ sa pri ukotvenom konci obe vlny navzájom vyrušia a pri voľnom sa pri konci sčítajú.

a potom periodicky s periódou $2L$ na celú priamku (obrázok 20). Takto predĺžená funkcia je nepárna vzhľadom na bod 0 aj vzhľadom na bod L, lebo vďaka periodicite $\bar{\phi}(L + y) = \bar{\phi}(y - L) = -\bar{\phi}(L - y)$. Riešenie Cauchyho úlohy s takými počiatočnými podmienkami má obe symetrie v každom čase, a preto je v bodoch 0 aj L nulové. Opäť teda použijeme d'Alembertov vzorec a výsledok zúžime na interval $(0, L)$. Pri voľných koncoch postupujeme rovnako s párnym predĺžením. Ak je jeden koniec ukotvený a druhý voľný, predĺžime počiatočné podmienky nepárne vzhľadom na ukotvený a párne vzhľadom na voľný koniec. Takto predĺžené funkcie sú periodické s periódou $4L$, lebo napríklad pri ukotvenom konci 0 a voľnom konci L je $\bar{\phi}(x + 2L) = -\bar{\phi}(x)$. Že takto nájdené funkcie sú jedinými riešeniami týchto úloh, vyplýva z energetického argumentu v časti 3.1.2 (pozri (3.28)), ktorý funguje aj s ukotveným alebo voľným koncom.



Obr. 20: Predĺženie počiatočnej podmienky z intervalu $(0, L)$ pri ukotvených koncoch. Funkcia ϕ (hrubá čiara) je predĺžená nepárne na interval $(-L, 0)$ a potom periodicky s periódou $2L$ (bodkovaná čiara). Predĺženie je nepárne vzhľadom na bod 0 aj na bod L.

Riešenie na intervale je periodické v čase. Pri ukotvených koncoch sú $\bar{\phi}$ a $\bar{\psi}$ periodické s periódou $2L$ a integrál nepárnej periodickej funkcie $\bar{\psi}$ cez periódu je nulový. Z d'Alembertovho vzorca preto vyplýva $u(x,t+2L/c) = u(x,t)$. Za čas $2L/c$ prejde vlna k jednému koncu, odrazí sa, prejde k druhému koncu, znova sa odrazí a vráti sa na pôvodné miesto. Pri voľných koncoch integrál z $\bar{\psi}$ cez periódu nulový byť nemusí. Za čas $2L/c$ sa vtedy u zmení o $(2L/c)\langle\psi\rangle$, kde $\langle\psi\rangle$ je stredná hodnota ψ na intervale, takže k periodickému pohybu sa pridá rovnomerný posun celej struny rýchlosťou $\langle\psi\rangle$. Pri zmiešaných podmienkach je perióda $4L/c$, lebo vlna sa pri odraze od ukotveného konca obráti, ale pri odraze od voľného nie. V kapitole 7 uvidíme to isté z iného pohľadu. Riešenie sa dá zapísať ako súčet stojatých vĺn, pri ukotvených koncoch $\sin(k\pi x/L)$ kmitajúcich s frekvenciami $k\pi c/L$, a každá z nich je periodická s periódou $2L/c$.

Šírenie okrajového stavu. Napokon sa vráťme na polpriamku a predpokladajme, že koncom struny pohybujeme podľa zadanej funkcie $h(t)$. Riešime teda úlohu s nehomogénnou Dirichletovou okrajovou podmienkou

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \quad x > 0 \ , \tag{3.59a}$$
$$u(x,0) = \phi(x) \ , \tag{3.59b}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) \ , \tag{3.59c}$$
$$u(0,t) = h(t) \ . \tag{3.59d}$$

Postupujeme podobne ako pri nehomogénnej rovnici a riešenie rozdelíme na dve časti, $u = u^A + v$. Funkcia u^A spĺňa zadané počiatočné podmienky a homogénnu okrajovú podmienku $u^A(0,t) = 0$, takže ju dáva vzorec (3.55). Ostáva vyriešiť úlohu

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 \ , \quad x > 0 \ , \tag{3.60a}$$
$$v(x,0) = 0 \ , \tag{3.60b}$$
$$v_t(x,0) = 0 \ , \tag{3.60c}$$
$$v(0,t) = h(t) \ . \tag{3.60d}$$

Všeobecné riešenie má tvar $v = g_1(x+ct) + g_2(x-ct)$. Z nulových počiatočných podmienok vyplýva rovnako ako pri odvodení d'Alembertovho vzorca, že g_1 a g_2 sú pre kladné argumenty konštantné. Keďže $x + ct > 0$, je člen $g_1(x+ct)$ konštanta, ktorú môžeme presunúť do g_2. Riešenie teda hľadáme v tvare vlny $F(x-ct)$, ktorá sa šíri od okraja doprava. Počiatočné podmienky dávajú

$$F(x) = 0 \ , \quad -cF'(x) = 0 \ , \quad x > 0 \ , \tag{3.61}$$

a z okrajovej podmienky máme $F(-ct) = h(t)$ pre $t > 0$. Odtiaľ

$$F(z) = \begin{cases} h(-z/c) \ , & z < 0 \ , \\ 0 \ , & z > 0 \ , \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad v(x,t) = \begin{cases} h\left(t - x/c\right) \ , & x < ct \ , \\ 0 \ , & x > ct \ . \end{cases} \tag{3.62}$$

Okrajový stav sa teda šíri do polpriamky rýchlosťou c. Do bodu x dorazí s oneskorením x/c a v oblasti $x > ct$ o ňom riešenie ešte nevie. Ak $h(0) \neq 0$, teda ak koncom struny na začiatku trhneme, má v skok na charakteristike $x = ct$.

Na to isté sa môžeme pozrieť aj tak, že funkcia h prichádza zľava z oblasti $x < 0$. Funkcia v je totiž zúžením riešenia Cauchyho úlohy na celej priamke s počiatočnými podmienkami

$$v(x,0) = \begin{cases} h(-x/c)\ , & x < 0\ , \\ 0\ , & x > 0\ , \end{cases} \qquad v_t(x,0) = \begin{cases} h'(-x/c)\ , & x < 0\ , \\ 0\ , & x > 0\ , \end{cases} \tag{3.63}$$

ktoré zodpovedajú vlne $F(x-ct)$ pohybujúcej sa doprava. Riešenie pôvodnej úlohy (3.59) je napokon $u = u^A + v$.

Príklad 20. Struna na polpriamke $x > 0$ s ukotveným koncom má nulovú počiatočnú rýchlosť a počiatočnú výchylku v tvare striešky

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x-2|\ , & 1 < x < 3\ , \\ 0\ , & \text{inak}\ . \end{cases} \tag{3.64}$$

Nájdite riešenie a nakreslite ho v časoch $t = 1/c$, $2/c$ a $3/c$. Ako sa výsledok zmení, ak je koniec struny voľný? □

Výsledok.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\phi(x-ct) + \frac{1}{2}\phi(x+ct) \mp \frac{1}{2}\phi(ct-x)\ , \tag{3.65}$$

kde ϕ je strieška predĺžená nulou na celú priamku, horné znamienko platí pre ukotvený a dolné pre voľný koniec. Jedna polovica striešky sa vzďaľuje doprava. Druhá sa v čase $1/c$ začne odrážať od konca a v čase $3/c$ sa už celá vracia doprava, pri ukotvenom konci obrátená. V čase $2/c$ je pri ukotvenom konci struna na úseku $0 < x < 3$ rovná, pri voľnom konci má na konci výchylku 1.

Príklad 21. Struna dĺžky L s ukotvenými koncami je v strede vychýlená o h a v čase $t = 0$ ju pustíme z pokoja, teda

$$\phi(x) = \begin{cases} 2hx/L\ , & 0 \le x \le L/2\ , \\ 2h(L-x)/L\ , & L/2 \le x \le L\ , \end{cases} \qquad \psi(x) = 0\ . \tag{3.66}$$

Pomocou periodického predĺženia nájdite tvar struny v časoch $t = L/(4c)$, $L/(2c)$ a L/c a overte, že v čase $2L/c$ sa struna vráti do počiatočného tvaru. □

Riešenie. Pri ukotvených koncoch predĺžime ϕ nepárne na interval $(-L, 0)$ a potom periodicky s periódou $2L$ ako v (3.58). Funkciu $\psi = 0$ netreba predlžovať. Predĺžená funkcia $\bar\phi$ je lomená čiara (trojuholníková vlna), ktorá je na intervale $[-L/2, L/2]$ rovná $2hy/L$, na intervale $[L/2, 3L/2]$ rovná $2h(L-y)/L$ a ďalej sa periodicky opakuje. Je súmerná vzhľadom na bod $L/2$ a z jej nepárnosti a periodicity vyplýva $\bar\phi(y \pm L) = -\bar\phi(y)$. Podľa d'Alembertovho vzorca je

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\bar\phi(x+ct) + \bar\phi(x-ct)\right]\ . \tag{3.67}$$

Nech najprv $0 \le ct \le L/2$. Vďaka súmernosti stačí uvažovať ľavú polovicu struny, $0 \le x \le L/2$. Ak $x \le L/2 - ct$, oba body $x \pm ct$ ležia v intervale $[-L/2, L/2]$, kde je $\bar\phi$ lineárna, a preto $u = \frac{h}{L}\left[(x+ct) + (x-ct)\right] = \phi(x)$. Pre $L/2 - ct \le x \le L/2$ leží bod $x + ct$ v intervale $[L/2, 3L/2]$ a bod $x - ct$ v intervale $[-L/2, L/2]$, takže

$$u = \frac{h}{L}\left[(L - x - ct) + (x - ct)\right] = h\left(1 - \frac{2ct}{L}\right)\ . \tag{3.68}$$

Spolu teda

$$u(x,t) = \min\left\{\phi(x),\, h\left(1 - \frac{2ct}{L}\right)\right\} \ , \quad 0 \le ct \le \frac{L}{2} \ . \tag{3.69}$$

Struna má tvar trojuholníka ϕ zrezaného vo výške $h(1 - 2ct/L)$. Dva zlomy sa od stredu rozbiehajú ku koncom rýchlosťou c, vonkajšie časti struny medzi zlomami a koncami stoja a rovná stredná časť klesá rýchlosťou $2hc/L$. V čase $L/(4c)$ má struna tvar lichobežníka, ktorý sa na intervaloch $(0, L/4)$ a $(3L/4, L)$ zhoduje s ϕ a medzi nimi je rovný vo výške $h/2$. V čase $L/(2c)$ dorazia zlomy ku koncom a struna je celá rovná, $u = 0$.

Zo vzťahu $\bar{\phi}(y \pm L) = -\bar{\phi}(y)$ ďalej dostaneme $u(x, t + L/c) = -u(x,t)$ a $u(x, L/c - t) = -u(x,t)$. Pre $L/2 \le ct \le L$ je preto

$$u(x,t) = -u\left(x, \frac{L}{c} - t\right) = \max\left\{-\phi(x),\, h\left(1 - \frac{2ct}{L}\right)\right\} \ . \tag{3.70}$$

Zlomy sa od ukotvených koncov odrazia a vracajú sa k stredu, kým sa struna vychyľuje na opačnú stranu. V čase L/c je $u = -\phi(x)$ a v čase $2L/c$ je $u(x, 2L/c) = -u(x, L/c) = \phi(x)$, takže struna je opäť v počiatočnom tvare a pohyb sa opakuje s periódou $2L/c$. Tú istú úlohu sa dá vyriešiť aj Fourierovou metódou z kapitoly 7, ako súčet stojatých vĺn. ■

3.2 Rovnica vedenia tepla v jednom rozmere

3.2.1 Odvodenie rovnice vedenia tepla

Nech $u(x,t)$ je teplota tenkej tyče v bode x a čase t. Tepelná energia v krátkom úseku tyče medzi bodmi x a $x + dx$ je

$$E = c_p \rho\, u\, dx \ , \tag{3.71}$$

kde ρ je dĺžková hustota tyče a c_p merná tepelná kapacita materiálu (index p píšeme, aby sa nezamieňala s rýchlosťou vĺn c). Jej časová zmena je

$$\frac{dE}{dt} = c_p \rho\, u_t\, dx \ . \tag{3.72}$$

Táto zmena sa musí rovnať teplu, ktoré do úseku za jednotku času vtečie cez jeho konce. Podľa Fourierovho zákona tečie teplo z teplejšieho miesta na chladnejšie a jeho tok v smere osi x je úmerný gradientu teploty,

$$P = -\kappa u_x \ , \tag{3.73}$$

kde $\kappa > 0$ je tepelná vodivosť tyče (pre tyč s prierezom S je $\kappa = \lambda S$, kde λ je tepelná vodivosť materiálu). Cez ľavý koniec úseku teplo $P(x,t)$ vteká a cez pravý $P(x + dx, t)$ vyteká, takže

$$\frac{dE}{dt} = P(x,t) - P(x+dx,t) = \kappa\left(u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)\right) = \kappa\, u_{xx}(x,t)\, dx \ . \tag{3.74}$$

Porovnaním oboch vyjadrení dostávame

$$u_t = \frac{\kappa}{c_p \rho}\, u_{xx} = k\, u_{xx} \ , \quad k = \frac{\kappa}{c_p \rho} \ . \tag{3.75}$$

Tomuto vzťahu hovoríme **rovnica vedenia tepla** a konštante k teplotná vodivosť. Má rozmer m^2/s a nezávisí od prierezu tyče, lebo κ aj ρ sú s ním úmerné. Rovnaká rovnica opisuje aj difúziu, kde u je koncentrácia a úlohu Fourierovho zákona hrá Fickov zákon. Je to parabolická rovnica a jej charakteristiky sú podľa časti 2.2 priamky $t = \text{const}$.

Difúzia má jednoduchý mikroskopický obraz. Predstavme si časticu, ktorá sa v každom časovom kroku Δt posunie o Δx doľava alebo doprava, a to s rovnakou pravdepodobnosťou. Pravdepodobnosť $p(x,t)$, že ju nájdeme v bode x, potom spĺňa $p(x,t+\Delta t) = \frac{1}{2}\left[p(x-\Delta x,t) + p(x+\Delta x,t)\right]$. Rozvojom do prvého rádu v Δt a do druhého rádu v Δx dostaneme $p_t = k\, p_{xx}$ s $k = (\Delta x)^2/(2\Delta t)$, teda rovnicu (3.75) v limite $\Delta x, \Delta t \to 0$ s pevným k. Za čas t urobí častica $t/\Delta t$ nezávislých krokov, takže jej stredná kvadratická vzdialenosť od začiatočného bodu je $\sqrt{(t/\Delta t)(\Delta x)^2} = \sqrt{2kt}$ a rastie ako $\sqrt{t}$, nie lineárne s časom. Podobne si môžeme predstaviť aj vedenie tepla, ktoré prenášajú molekuly, elektróny alebo fonóny pri neusporiadanom pohybe so zrážkami.

Ak sa vlastnosti materiálu pozdĺž tyče menia, závisia κ, c_p aj ρ od x. Tok je stále $P = -\kappa(x)u_x$, ale pri jeho derivovaní už κ nemôžeme vybrať pred deriváciu, takže tá istá bilancia dá

$$c_p(x)\rho(x)\, u_t = (\kappa(x)u_x)_x \ . \tag{3.76}$$

Rovnica je stále lineárna a parabolická, ale už nemá konštantné koeficienty.

Ak sa v tyči teplo aj vytvára, napríklad Jouleovým teplom pri prechode prúdu, pribudne v bilancii teplo $q(x,t)\,dx$, ktoré v úseku vznikne za jednotku času. Pri konštantných koeficientoch tak dostaneme nehomogénnu rovnicu

$$u_t - k\, u_{xx} = f \ , \quad f = \frac{q}{c_p\rho} \ . \tag{3.77}$$

3.2.2 Poissonov vzorec

Riešime teraz rovnicu (3.75) na celej priamke. Počiatočná priamka $t = 0$ je charakteristikou, a ako sme videli na konci časti 2.2, môžeme na nej zadať iba jednu počiatočnú podmienku,

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \tag{3.78}$$

lebo u_t už určuje samotná rovnica. Fyzikálne to tiež dáva zmysel, stačí poznať počiatočné rozloženie teploty.

Poriadne odvodenie riešenia urobíme v kapitole 5 pomocou distribúcií. Tu ukážeme len myšlienku. Riešenie hľadáme ako superpozíciu rovinných vĺn,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\xi\, e^{-i\xi x} \tilde{u}(\xi,t) \ , \tag{3.79}$$

a rovnako zapíšeme aj počiatočnú podmienku,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\xi\, e^{-i\xi x} \tilde{\phi}(\xi) \ , \quad \tilde{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dy\, e^{i\xi y} \phi(y) \ . \tag{3.80}$$

Funkcie $\tilde{u}$ a $\tilde{\phi}$ sú teda Fourierove transformácie funkcií u a ϕ v premennej x, s rovnakým normovaním ako v kapitole 4. Po dosadení do rovnice prejde derivácia ∂_x^2 na násobenie číslom $-\xi^2$ a pre každé ξ

dostaneme obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$\tilde{u}_t + k\xi^2 \tilde{u} = 0 \ , \quad \tilde{u}(\xi, 0) = \tilde{\phi}(\xi) \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(\xi, t) = \tilde{\phi}(\xi) e^{-k\xi^2 t} \ . \tag{3.81}$$

Každá rovinná vlna sa teda vyvíja nezávisle od ostatných a jej amplitúda exponenciálne klesá, tým rýchlejšie, čím je vlna kratšia. Ostáva vypočítať integrál (3.79). Po dosadení $\tilde{\phi}$ a zámene poradia integrácie dostaneme

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int dy\, \phi(y) \int d\xi\, e^{-kt\xi^2 - i\xi(x-y)} \ . \tag{3.82}$$

Vnútorný integrál je gaussovský. Doplníme exponent na štvorec,

$$-kt\xi^2 - i\xi(x-y) = -kt \left(\xi + \frac{i(x-y)}{2kt} \right)^2 - \frac{(x-y)^2}{4kt} \ , \tag{3.83}$$

a posunieme integračnú premennú (v komplexnej rovine to možno urobiť, lebo integrand v nekonečne rýchlo klesá). Vnútorný integrál je potom $\sqrt{\pi/(kt)}\, e^{-(x-y)^2/(4kt)}$, a teda

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int dy\, \phi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \ . \tag{3.84}$$

Tomuto vzťahu hovoríme **Poissonov vzorec**.

Riešenie je teda konvolúciou počiatočnej podmienky s funkciou

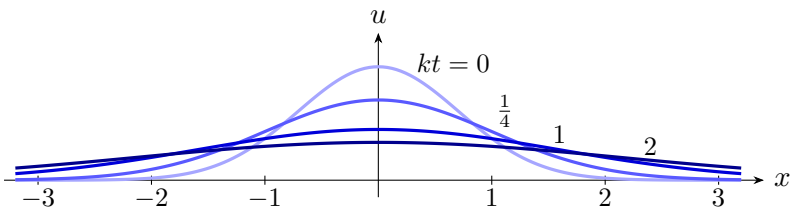
$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}} \ , \tag{3.85}$$

ktorej v kapitole 5 budeme hovoriť Greenova funkcia. Pre každé $t > 0$ je G kladná a jej integrál cez x je rovný jednej. S klesajúcim t sa sústreďuje stále bližšie k bodu $x = 0$, a preto $u(x,t) \to \phi(x)$ pre $t \to 0^+$ v každom bode, v ktorom je ϕ spojitá. Odvodenie bolo len formálne, lebo sme predpokladali, že Fourierove transformácie existujú, a zamieňali sme poradie integrácie. Vzorec (3.84) však dáva zmysel pre oveľa širšiu triedu počiatočných podmienok, napríklad pre každú ohraničenú spojitú ϕ, a dosadením sa dá overiť, že je to riešenie. Medzi ohraničenými riešeniami je navyše jediné. Bez obmedzenia rastu riešenia v nekonečne jednoznačnosť neplatí (Tichonovov príklad), takže na rozdiel od vlnovej rovnice tu okrem počiatočnej podmienky záleží aj na tom, v akej triede funkcií riešenie hľadáme.

Ako príklad zoberme počiatočnú podmienku v tvare gaussovskej funkcie, $\phi(x) = e^{-x^2}$. Integrál v (3.84) je opäť gaussovský a dostaneme

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4kt}}\, e^{-\frac{x^2}{1+4kt}} \ . \tag{3.86}$$

Riešenie je teda v každom čase gaussovská funkcia, ktorá sa s časom rozširuje a znižuje (obrázok 21). Jej šírka rastie ako $\sqrt{1+4kt}$, pre veľké časy teda ako $\sqrt{t}$, čo je pre difúziu typické, a výška klesá ako $1/\sqrt{1+4kt}$. Integrál $\int dx\, u$, teda celkové teplo v tyči, sa pritom nemení. To platí všeobecne, lebo integrál funkcie G cez x je rovný jednej.



Obr. 21: Riešenie rovnice vedenia tepla s počiatočnou podmienkou $\phi(x) = e^{-x^2}$ v časoch $kt = 0$, $\frac{1}{4}$, 1 a 2 (čím neskorší čas, tým tmavšia farba). Profil sa rozširuje a znižuje, plocha pod ním sa nemení.

Zdroje tepla. Rovnicu so zdrojmi (3.77) a s nulovou počiatočnou podmienkou vyriešime rovnako ako vlnovú rovnicu v časti 3.1.2, teda Duhamelovým princípom. Teplo, ktoré vznikne počas krátkeho intervalu $d\tau$ okolo času τ, zvýši teplotu o $f(x,\tau)\,d\tau$ a potom sa už len šíri podľa homogénnej rovnice. Rovnica je prvého rádu v čase, takže pravá strana tentoraz určuje počiatočnú hodnotu, nie počiatočnú rýchlosť. Pomocná funkcia $U(x,t,\tau)$ preto rieši homogénnu rovnicu s podmienkou $U(x,\tau,\tau) = f(x,\tau)$ a podľa Poissonovho vzorca je

$$U(x,t,\tau) = \int dy\, G(x-y, t-\tau) f(y,\tau)\ . \tag{3.87}$$

Riešením nehomogénnej rovnice s nulovou počiatočnou podmienkou je potom funkcia

$$v(x,t) = \int_0^t d\tau\, U(x,t,\tau) = \int_0^t d\tau \int dy\, G(x-y, t-\tau) f(y,\tau)\ . \tag{3.88}$$

Formálne to overíme rovnako ako v časti 3.1.2. Zrejme $v(x,0) = 0$ a

$$v_t = U(x,t,t) + \int_0^t d\tau\, U_t(x,t,\tau) = f(x,t) + k\int_0^t d\tau\, U_{xx}(x,t,\tau) = f + k\, v_{xx}\ . \tag{3.89}$$

Riešenie úlohy s počiatočnou podmienkou ϕ aj so zdrojmi je súčtom Poissonovho vzorca (3.84) a funkcie v.

Nezvratnosť. Vlnová rovnica sa pri zámene $t \to -t$ nemení, rovnica vedenia tepla áno. Ak by sme chceli zo súčasného rozloženia teploty zistiť, aké bolo v minulosti, museli by sme riešiť rovnicu $u_t = -k\, u_{xx}$. V nej sa amplitúda rovinnej vlny namiesto tlmenia násobí faktorom $e^{k\xi^2 t}$, takže krátke vlny rastú neohraničene rýchlo. Napríklad funkcia

$$u_n(x,t) = \frac{1}{n}\, e^{kn^2 t} \sin nx \tag{3.90}$$

rieši túto rovnicu s počiatočnou podmienkou $u_n(x,0) = \sin(nx)/n$, ktorá je pre veľké n ľubovoľne malá, kým riešenie v ľubovoľnom čase $t > 0$ rastie s n nad všetky medze. Riešenie teda nezávisí spojite od počiatočnej podmienky a úloha nie je dobre položená v zmysle časti 3.1.2. Fyzikálne to zodpovedá tomu, že vedenie tepla je nevratný dej. Drobné detaily počiatočného rozloženia teploty sa rýchlo stratia a z neskoršieho rozloženia ich už spätne nezrekonštruujeme.

3.2.3 Rovnica vedenia tepla na polpriamke a na intervale

Na polpriamke $x > 0$ postupujeme rovnako ako pri vlnovej rovnici v časti 3.1.3. Okrajová podmienka $u(0,t) = 0$ (Dirichletova) znamená, že koniec tyče udržiavame na stálej teplote, napríklad v kontakte s veľkým tepelným rezervoárom. Teplotu potom meriame od teploty rezervoára, čo môžeme, lebo spolu s u rieši rovnicu aj $u + \text{const}$. Okrajová podmienka $u_x(0,t) = 0$ (Neumannova) podľa Fourierovho zákona (3.73) hovorí, že cez koniec netečie žiadne teplo, teda koniec je tepelne izolovaný. Počiatočnú podmienku predĺžime na celú priamku,

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) \ , & x > 0 \ , \\ \mp\phi(-x) \ , & x < 0 \ , \end{cases} \tag{3.91}$$

kde horné znamienko patrí k Dirichletovej a dolné k Neumannovej podmienke, a riešenie dostaneme ako zúženie riešenia z Poissonovho vzorca na $x > 0$. Funkcia G je párna v x, takže z nepárnej $\bar{\phi}$ dá Poissonov vzorec nepárne riešenie, ktoré je v bode $x = 0$ nulové. Z párnej $\bar{\phi}$ dá párne riešenie, ktorého derivácia v nule je nulová. Rozdelením integrálu na kladné a záporné y dostaneme

$$u(x,t) = \int_0^\infty dy\, \phi(y)\, [G(x-y,t) \mp G(x+y,t)] \ . \tag{3.92}$$

Je to tá istá metóda zrkadlenia ako v elektrostatike. Pri konci udržiavanom na stálej teplote má zrkadlový obraz počiatočného rozloženia teploty opačné znamienko, pri izolovanom konci rovnaké. Na intervale použijeme periodické predĺženie ako v časti 3.1.3, takže zrkadlových obrazov je nekonečne veľa.

Princíp maxima a jednoznačnosť. Na ohraničenom intervale sa jednoznačnosť a stabilita riešenia dajú ukázať priamo z rovnice, bez vzorca pre riešenie. Nech u rieši rovnicu vedenia tepla pre $0 < x < L$ a $0 < t \le T$ a je spojitá až po hranicu tejto oblasti. Potom u nadobúda maximum aj minimum buď v čase $t = 0$, alebo na koncoch $x = 0$, $x = L$. Fyzikálne to hovorí, že teplo tečie z teplejšieho miesta na chladnejšie, takže vo vnútri tyče nemôže samovoľne vzniknúť miesto teplejšie, než aké bolo na začiatku alebo na koncoch. Dôkaz je krátky. Pre $\varepsilon > 0$ uvažujme funkciu $w = u + \varepsilon x^2$, pre ktorú $w_t - k\, w_{xx} = -2k\varepsilon < 0$. Keby w nadobúdala maximum v bode (x_0, t_0) s $0 < x_0 < L$ a $0 < t_0 \le T$, bolo by tam $w_{xx} \le 0$ a $w_t \ge 0$ (pri $t_0 = T$ len ako jednostranná derivácia), a teda $w_t - k\, w_{xx} \ge 0$, čo je spor. Maximum w je preto v čase $t = 0$ alebo na koncoch, a keďže $u \le w \le u + \varepsilon L^2$, v limite $\varepsilon \to 0$ to isté platí pre u. Pre minimum stačí použiť ten istý argument na $-u$.

Z princípu maxima hneď vyplýva jednoznačnosť a spojitá závislosť od údajov. Rozdiel dvoch riešení s rovnakou počiatočnou a okrajovými podmienkami je v čase $t = 0$ aj na koncoch nulový, a preto je nulový všade. Ak sa počiatočné a okrajové podmienky dvoch úloh líšia najviac o ε, líšia sa najviac o ε aj riešenia. Úloha s Dirichletovými podmienkami je teda dobre položená.

Pre Neumannove podmienky sa hodí iný argument, obdoba energie pri vlnovej rovnici. Pre $I(t) = \int_0^L dx\, u^2$ je

$$\frac{dI}{dt} = 2\int_0^L dx\, u\, u_t = 2k\int_0^L dx\, u\, u_{xx} = 2k\,[u\, u_x]_0^L - 2k\int_0^L dx\, u_x^2 \le 0 \ , \tag{3.93}$$

lebo okrajový člen je nulový pri Dirichletových aj Neumannových podmienkach. Rozdiel dvoch riešení s rovnakými údajmi má $I(0) = 0$, a keďže I je nezáporné a nerastie, je $I(t) = 0$ pre všetky t a rozdiel je nulový.

Príklad 22. Tyč, ktorá zaberá polpriamku $x > 0$, má na začiatku všade teplotu T_0. V čase $t = 0$ jej koniec $x = 0$ ponoríme do rezervoára s teplotou 0. Nájdite teplotu tyče v čase $t > 0$ a tepelný tok, ktorý tečie cez jej koniec. □

Výsledok.

$$u(x,t) = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) , \qquad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z ds\, e^{-s^2} . \tag{3.94}$$

Teplota v hĺbke x výrazne klesne až po čase rádovo x^2/k. Cez koniec tečie tok $P(0,t) = -\kappa u_x(0,t) = -\kappa T_0/\sqrt{\pi k t}$, teplo teda uniká do rezervoára a tok klesá ako $1/\sqrt{t}$.

3.3 Porovnanie vlastností riešení

Na záver kapitoly porovnáme riešenia oboch rovníc. Na prvý pohľad sa vlnová rovnica a rovnica vedenia tepla líšia len rádom derivácie podľa času, ich riešenia sa však správajú veľmi odlišne. Najlepšie to vidno, keď obe rovnice vyriešime s tou istou počiatočnou podmienkou. Zvolíme skok

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 , & x < 0 , \\ 0 , & x > 0 . \end{cases} \tag{3.95}$$

Pri vedení tepla si ho môžeme predstaviť ako dve dlhé tyče z rovnakého materiálu s teplotami 1 a 0 (vo vhodných jednotkách), ktoré v čase $t = 0$ priložíme k sebe. Funkcia ϕ nie je spojitá, a teda nespĺňa predpoklady, za ktorých sme d'Alembertov a Poissonov vzorec odvodili. Oba vzorce však dávajú zmysel aj pre ňu. V akom zmysle je výsledok riešením, rozoberieme hneď po výpočte.

Pri vlnovej rovnici potrebujeme ešte druhú počiatočnú podmienku. Pre porovnanie je najvhodnejšia nulová počiatočná rýchlosť, $\psi = 0$. D'Alembertov vzorec (3.25) potom dáva

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] . \tag{3.96}$$

Prvý člen v zátvorke je rovný 1 pre $x < -ct$ a druhý pre $x < ct$, takže

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 , & x < -ct , \\ \frac{1}{2} , & |x| < ct , \\ 0 , & x > ct . \end{cases} \tag{3.97}$$

Skok sa teda rozdelí na dva skoky s polovičnou výškou, ktoré sa šíria rýchlosťou c doľava a doprava (obrázok 22 vľavo), rovnako ako strieška na obrázku 15. Pri zvuku v plyne spĺňa vlnovú rovnicu aj odchýlka tlaku od rovnovážnej hodnoty. Skok potom zodpovedá plynu v trubici, ktorý je na začiatku v pokoji a vľavo od prepážky má o niečo vyšší tlak ako vpravo. Po odstránení prepážky sa od nej na obe strany rozbehnú zvukové vlny a medzi nimi sa tlak vyrovná na priemer oboch pôvodných tlakov. Plyn v tejto oblasti prúdi stálou rýchlosťou smerom k nižšiemu tlaku, mimo nej je stále v pokoji. Porovnajte to aj s úlohou o semafore z časti 1.4.2, kde sa ten istý skok pri nelineárnej rovnici prvého rádu zmenil

na vejár charakteristík a hustota v ňom klesala lineárne medzi bodmi $-v_0 t$ a $v_0 t$. Pri vlnovej rovnici vejár nevznikne, lebo všetky charakteristiky jednej rodiny majú rovnaký sklon, a skoky preto ostávajú ostré.

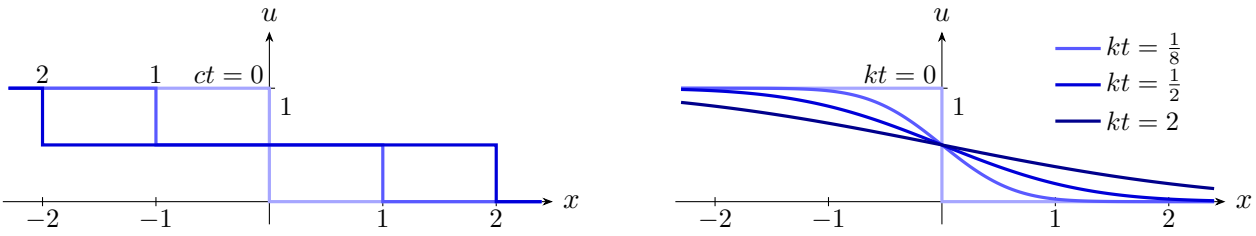
Pri rovnici vedenia tepla dosadíme skok do Poissonovho vzorca (3.84). Integruje sa len cez $y < 0$ a po substitúcii $s = (x-y)/(2\sqrt{kt})$ dostaneme

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{0} dy\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{kt})}^{\infty} ds\, e^{-s^2} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) , \tag{3.98}$$

kde

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{\infty} ds\, e^{-s^2} = 1 - \operatorname{erf}(z) \tag{3.99}$$

a erf je funkcia z príkladu 22. Integrál sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií, jeho priebeh je však jednoduchý. Funkcia erfc klesá z hodnoty 2 v $-\infty$ k nule v $+\infty$ a $\operatorname{erfc}(0) = 1$. Riešenie je preto v každom čase $t > 0$ hladká klesajúca funkcia, ktorá prechádza z hodnoty 1 na 0 a v bode $x = 0$ má hodnotu $\frac{1}{2}$ (obrázok 22 vpravo). Teplota v mieste styku tyčí sa teda okamžite ustáli na priemere oboch počiatočných teplôt. Pri tyčiach z rôznych materiálov by to bol vážený priemer (príklad 23). Cez miesto styku pritom tečie z teplejšej tyče do chladnejšej tok $P(0,t) = -\kappa u_x(0,t) = \kappa/\sqrt{4\pi kt}$, ktorý klesá ako $1/\sqrt{t}$, podobne ako v príklade 22. Riešenie závisí od x a t len cez pomer $x/\sqrt{kt}$, takže profily v rôznych časoch sa líšia len mierkou na osi x. Prechodová oblasť, v ktorej teplota klesá z 1 na 0, má šírku rádovo $\sqrt{kt}$ a rozširuje sa ako $\sqrt{t}$, podobne ako gaussovský profil na obrázku 21.



Obr. 22: Riešenie vlnovej rovnice s $\psi = 0$ (vľavo) a rovnice vedenia tepla (vpravo) s tou istou skokovou počiatočnou podmienkou (3.95). Vľavo v časoch $ct = 0$, 1 a 2, vpravo v časoch $kt = 0$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$ a 2 (čím neskorší čas, tým tmavšia farba). Pri vlnovej rovnici sa skok rozdelí na dva polovičné skoky, ktoré sa šíria rýchlosťou c. Pri rovnici vedenia tepla sa okamžite vyhladí a prechodová oblasť sa rozširuje ako $\sqrt{kt}$.

Nespojitá počiatočná podmienka. Každá z oboch rovníc sa so skokom vyrovná inak. Funkcia (3.97) je po častiach konštantná. Vlnovú rovnicu spĺňa všade mimo charakteristík $x = \pm ct$, na nich má skok a nie je ani spojitá. Je to presne situácia z časti 3.1.2: nespojitosť počiatočnej podmienky sa šíri po charakteristikách vychádzajúcich z bodu $(0,0)$ a riešenie v doterajšom zmysle na nich nemáme. Rozumný význam mu však dať môžeme. Ak skok nahradíme hladkou funkciou ϕ_ε, ktorá klesne z 1 na 0 na intervale $(-\varepsilon, \varepsilon)$, d'Alembertov vzorec dá klasické riešenie $u_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi_\varepsilon(x+ct) + \phi_\varepsilon(x-ct)\right]$. To sa od (3.97) líši len v pásoch šírky 2ε okolo charakteristík $x = \pm ct$ a pre $\varepsilon \to 0$ k nemu konverguje

v každom bode mimo nich. Funkcia (3.97) je teda limitou klasických riešení s čoraz strmšími počiatočnými podmienkami. Presnú formuláciu, v ktorej je riešením aj na charakteristikách, dáva riešenie v zmysle distribúcií (príklad 33 v kapitole 4). V kapitole 5 budú môcť byť distribúciami aj samotné počiatočné podmienky.

Pri rovnici vedenia tepla je situácia oveľa jednoduchšia. Poissonov vzorec dáva zmysel pre každú ohraničenú po častiach spojitú počiatočnú podmienku a pre $t > 0$ je výsledok hladká funkcia, ktorá rovnicu spĺňa v klasickom zmysle všade. Prečo, uvidíme o chvíľu. Slabšie je len splnenie počiatočnej podmienky. Podľa časti 3.2 je $u(x,t) \to \phi(x)$ pre $t \to 0^+$ v každom bode, v ktorom je ϕ spojitá. V bode $x = 0$ je $u(0,t) = \frac{1}{2}$ pre všetky $t > 0$, teda limita je priemerom jednostranných limít funkcie ϕ, a to bez ohľadu na to, akú hodnotu $\phi(0)$ zvolíme. Poissonov vzorec obsahuje ϕ len pod integrálom, takže jej hodnota v jednom bode riešenie vôbec neovplyvní.

Rýchlosť šírenia. Riešenie vlnovej rovnice (3.97) je pre $x > ct$ presne nulové. Do bodu $x > 0$ sa zmena dostane až v čase x/c, v súlade s oblasťou vplyvu z časti 3.1.2. Riešenie rovnice vedenia tepla (3.98) je naopak v každom čase $t > 0$ kladné pre všetky x, lebo integrand je kladný. Teplota sa teda okamžite zmení aj ľubovoľne ďaleko od miesta styku a v tomto zmysle sa teplo šíri nekonečnou rýchlosťou. Platí to všeobecne. Funkcia G je pre $t > 0$ všade kladná, takže ak je $\phi \geq 0$ a na nejakom intervale kladná, je riešenie (3.84) kladné vo všetkých bodoch a vo všetkých časoch $t > 0$.

Ďaleko od počiatku je však zmena nepatrná. Pre $z > 0$ je

$$\int_z^\infty ds\, e^{-s^2} < \int_z^\infty ds\, \frac{s}{z}\, e^{-s^2} = \frac{e^{-z^2}}{2z}\ , \tag{3.100}$$

a preto pre $x > 0$

$$0 < u(x,t) < \sqrt{\frac{kt}{\pi}}\, \frac{1}{x}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}\ . \tag{3.101}$$

Napríklad vo vzdialenosti $x = 10\sqrt{kt}$ je $u < 10^{-12}$. Prakticky sa teda teplo dostane len do vzdialenosti rádovo $\sqrt{kt}$, ktorá rastie s odmocninou z času ako pri náhodnej prechádzke z časti 3.2.1, a nie lineárne ako pri vlnách. Pre oceľ je k rádovo $10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, takže za hodinu je to asi 20 cm.

Nekonečná rýchlosť šírenia je dôsledkom zjednodušení, na ktorých model stojí. Fourierov zákon (3.73) predpokladá, že tok tepla okamžite zodpovedá gradientu teploty, hoci v skutočnosti teplo prenášajú molekuly, elektróny alebo fonóny konečnou rýchlosťou. Rovnica vedenia tepla je preto dobrým opisom len na vzdialenostiach a časoch oveľa väčších, než je stredná voľná dráha a stredný čas medzi zrážkami. Na takýchto škálach je však chvost riešenia za hranicou, kam by nosiče tepla stihli doletieť, exponenciálne malý, takže nekonečná rýchlosť šírenia v praxi nevadí. Ak Fourierov zákon upravíme tak, že tok sa ku gradientu teploty prispôsobuje s krátkym oneskorením, dostaneme hyperbolickú rovnicu s konečnou rýchlosťou šírenia (príklad 24).

Vyhladzovanie. Pri vlnovej rovnici skoky nikdy nezmiznú, len sa posúvajú po charakteristikách. Riešenie rovnice vedenia tepla je naopak pre každé $t > 0$ nekonečne veľakrát diferencovateľné, hoci počiatočná podmienka nebola ani spojitá. Aj to platí všeobecne. V Poissonovom vzorci (3.84) závisí od x a t iba funkcia $G(x-y,t)$, ktorá je pre $t > 0$ hladká. Každá jej derivácia je súčinom polynómu v $x-y$ a

gaussovskej funkcie, takže jej integrál s ohraničenou funkciou ϕ konverguje a derivovať pod integrálom môžeme ľubovoľne veľakrát. Riešenie je preto pre $t > 0$ hladké pre každú ohraničenú počiatočnú podmienku. Vo Fourierovom obraze je to ešte názornejšie. Podľa časti 3.2 sa zložka s vlnovým číslom ξ tlmí faktorom $e^{-k\xi^2 t}$, teda tým rýchlejšie, čím je jej vlnová dĺžka kratšia. Ostré hrany a skoky tvoria práve zložky s veľkým ξ a tie zmiznú najskôr. Pri vlnovej rovnici sa zložky netlmia, iba sa šíria, takže skok ostane skokom.

Pre skok dostaneme deriváciu riešenia priamo z (3.98),

$$u_x(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}} = -G(x,t)\ . \tag{3.102}$$

To nie je náhoda. Derivácia u_x tiež rieši rovnicu vedenia tepla a jej počiatočnou podmienkou je derivácia skoku, ktorá je všade nulová okrem počiatku, kde je „nekonečná“. V jazyku kapitoly 4 je to $-\delta$, takže G je riešením s počiatočnou podmienkou δ. K tomu sa vrátime v kapitole 5.

Vyhladzovanie úzko súvisí s nezvratnosťou z časti 3.2. Pri vedení tepla sa detaily počiatočného rozloženia rozmazávajú a napríklad nespojité rozloženie teploty nemôže vzniknúť vedením tepla z nijakého skoršieho ohraničeného rozloženia. Spätná úloha so skokom (3.95) ako koncovým stavom preto nemá riešenie vôbec. Vlnová rovnica sa pri zámene $t \to -t$ nemení a nespojitosti nevyhladzuje, takže z riešenia a jeho časovej derivácie v ľubovoľnom čase vieme d'Alembertovým vzorcom spätne určiť počiatočný stav.

Správanie pre veľké časy. V oboch prípadoch sa pre $t \to \infty$ riešenie v každom pevnom bode x blíži k hodnote $\frac{1}{2}$, teda k priemeru počiatočných hodnôt na oboch stranách. Deje sa to však veľmi rozdielne. Pri vlnovej rovnici je $u(x,t) = \frac{1}{2}$ presne, len čo $t > |x|/c$, teda keď cez bod x prejde jeden z oboch skokov. Skoky pritom ostávajú ostré a len sa od seba vzďaľujú. Pri rovnici vedenia tepla sa riešenie k hodnote $\frac{1}{2}$ iba blíži, a to pomaly. Z rozvoja $\operatorname{erfc}(z) = 1 - 2z/\sqrt{\pi} + O(z^3)$ pre malé z dostaneme pre $|x| \ll \sqrt{kt}$

$$u(x,t) \approx \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{\pi kt}}\ , \tag{3.103}$$

takže odchýlka od $\frac{1}{2}$ klesá len ako $1/\sqrt{t}$. Ani v jednom prípade sa riešenie k $\frac{1}{2}$ neblíži rovnomerne v x, lebo v každom čase je $u \to 1$ pre $x \to -\infty$ a $u \to 0$ pre $x \to \infty$. Rozdiel sa dá zhrnúť aj takto: riešenie vlnovej rovnice závisí len od pomeru $x/(ct)$ a riešenie rovnice vedenia tepla len od pomeru $x/\sqrt{kt}$. Oblasť, v ktorej sa riešenie výrazne líši od počiatočnej podmienky, sa preto pri vlnách rozširuje lineárne s časom a pri vedení tepla len ako $\sqrt{t}$.

Zhrnutie. Na tomto jednoduchom príklade sa ukázali podstatné rozdiely medzi oboma rovnicami. Vlnová rovnica potrebuje dve počiatočné podmienky a poruchy prenáša konečnou rýchlosťou c bez toho, aby ich vyhladila. Je vratná a zachováva sa pri nej energia (3.28). Rovnica vedenia tepla potrebuje jednu počiatočnú podmienku, jej riešenia sú pre $t > 0$ hladké a poruchy sa šíria nekonečnou rýchlosťou, hoci prakticky len do vzdialenosti rádovo $\sqrt{kt}$. Je nevratná, zachováva sa pri nej celkové teplo a platí pre ňu princíp maxima z časti 3.2.3. Tieto rozdiely sú v súlade s tým, čo sme o charakteristikách zistili v časti 2.2, kde sme videli, že derivácie riešenia môžu byť nespojité len pri prechode cez

charakteristiku. Charakteristiky vlnovej rovnice sú priamky $x \pm ct = \text{const}$, ktoré zodpovedajú rýchlosti c, a nespojitosti sa šíria po nich. Charakteristikami rovnice vedenia tepla sú priamky $t = \text{const}$, ktoré by obrazne zodpovedali nekonečnej rýchlosti, a nespojitosť počiatočnej podmienky po nich nemôže prejsť do oblasti $t > 0$. V kapitole 5 uvidíme, že rovnaké rozdiely platia aj vo viacerých rozmeroch.

Príklad 23. Dve dlhé tyče s rovnakým prierezom, ale z rôznych materiálov, majú tepelné vodivosti κ_1, κ_2, teplotné vodivosti k_1, k_2 a na začiatku teploty T_1 a T_2. V čase $t = 0$ ich priložíme k sebe tak, že prvá zaberá polpriamku $x < 0$ a druhá polpriamku $x > 0$. V každej tyči platí rovnica vedenia tepla s jej teplotnou vodivosťou a na styku $x = 0$ je spojitá teplota aj tok tepla $P = -\kappa u_x$. Nájdite teplotu v mieste styku. Prečo sa nám v zime kovové zábradlie na dotyk zdá studenšie ako drevené, hoci majú rovnakú teplotu? □

Výsledok.

$$u(x,t) = \begin{cases} T_1 + (T_s - T_1)\operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{k_1 t}}\right) , & x < 0 , \\ T_2 + (T_s - T_2)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_2 t}}\right) , & x > 0 , \end{cases} \qquad T_s = \frac{e_1 T_1 + e_2 T_2}{e_1 + e_2} , \tag{3.104}$$

kde $e_i = \kappa_i/\sqrt{k_i} = \sqrt{\kappa_i c_{p,i} \rho_i}$. Teplota styku T_s sa s časom nemení a je váženým priemerom počiatočných teplôt, pri rovnakých materiáloch obyčajným priemerom. Ruka vníma teplotu kože v mieste dotyku. Veličina $\sqrt{\lambda c_p \rho}$ počítaná z materiálových konštánt (s objemovou hustotou) je v jednotkách SI pre kožu asi 1100, pre drevo asi 400 a pre oceľ asi 14 000. Pri koži s teplotou 33 °C a zábradlí s teplotou 0 °C tak vyjde teplota styku asi 24 °C pre drevo a 2 °C pre oceľ.

Príklad 24. Fourierov zákon (3.73) predpokladá, že tok tepla sa gradientu teploty prispôsobí okamžite. Upravme ho tak, že tok sa k hodnote $-\kappa u_x$ približuje s krátkym oneskorením τ (rádovo stredný čas medzi zrážkami nosičov tepla),

$$\tau P_t + P = -\kappa u_x . \tag{3.105}$$

Ukážte, že spolu s energetickou bilanciou z časti 3.2.1 dostaneme pre teplotu **telegrafnú rovnicu**

$$\tau u_{tt} + u_t = k\, u_{xx} . \tag{3.106}$$

Akého typu je táto rovnica a akou rýchlosťou sa v nej šíria nespojitosti? Nájdite disperzný vzťah pre riešenia v tvare $e^{i(\xi x - \omega t)}$ a rozoberte limity dlhých a krátkych vĺn. □

Výsledok. Z energetickej bilancie je $c_p \rho\, u_t = -P_x$. Upravený zákon zderivujeme podľa x, dosadíme za P_x a dostaneme telegrafnú rovnicu. Je hyperbolická a jej charakteristiky sú priamky $x \pm ct = \text{const}$ s $c = \sqrt{k/\tau}$, takže nespojitosti sa šíria konečnou rýchlosťou c. Disperzný vzťah $\tau\omega^2 + i\omega - k\xi^2 = 0$ má riešenia

$$\omega = \frac{-i \pm \sqrt{4k\tau\xi^2 - 1}}{2\tau} . \tag{3.107}$$

Pre dlhé vlny, $4k\tau\xi^2 \ll 1$, je jeden koreň $\omega \approx -ik\xi^2$, teda tlmenie $e^{-k\xi^2 t}$ ako pri rovnici vedenia tepla, a druhý $\omega \approx -i/\tau$, ktorý zodpovedá módu zanikajúcemu za čas rádovo τ. Pre krátke vlny je $\omega \approx \pm c\xi - i/(2\tau)$, teda vlny s rýchlosťou c, ktorých amplitúda klesá ako $e^{-t/(2\tau)}$. Na dlhých škálach sa teda teplo šíri ako pri rovnici vedenia tepla a v limite $\tau \to 0$ je $c \to \infty$.

3.4 Cauchyho úloha na všeobecnej krivke

Doteraz sme počiatočné podmienky zadávali na priamke $t = 0$, teda v jednom okamihu na celej priamke. Prirodzene sa môžeme pýtať, či ich môžeme zadať aj na inej krivke v rovine (x, t). Údaje totiž často nepoznáme v jednom okamihu, ale napríklad z meraní, ktoré prebehli v rôznych miestach v rôznych časoch. V teórii relativity navyše „jeden okamih“ závisí od pozorovateľa a priamka $t = 0$ jedného pozorovateľa je pre iného šikmá. Aj okrajové podmienky z časti 3.1.3 sú údaje zadané na krivke, na priamke $x = 0$. Nutnú podmienku poznáme z časti 2.2. Hodnota riešenia a jeho derivácia v smere normály na krivke γ určia všetky derivácie riešenia na γ len vtedy, keď sa γ nikde nedotýka charakteristiky, a pri analytických údajoch potom Cauchyho–Kovalevskej veta zaručí riešenie v okolí γ. Uvidíme však, že na tom, či je úloha dobre položená, záleží oveľa viac, a že vlnová rovnica a rovnica vedenia tepla sa aj tu správajú veľmi rozdielne.

Priestorupodobné krivky. Začnime vlnovou rovnicou (3.1) a krivkou γ, ktorá je grafom funkcie $t = \tau(x)$. Na nej zadáme hodnotu riešenia a jeho časovú deriváciu,

$$u\big(x, \tau(x)\big) = \phi(x) \ , \quad u_t\big(x, \tau(x)\big) = \psi(x) \ . \tag{3.108}$$

Pre $\tau = 0$ je to Cauchyho úloha z časti 3.1.2. Derivovaním prvej podmienky podľa x dostaneme $\phi' = u_x + \tau' u_t$, takže na krivke γ poznáme obe prvé derivácie,

$$u_x = \phi' - \tau'\psi \ , \quad u_t = \psi \ . \tag{3.109}$$

Riešenie hľadáme vo všeobecnom tvare (3.14), $u = g_1(x + ct) + g_2(x - ct)$, pre ktorý je $u_x = g_1' + g_2'$ a $u_t = c\,(g_1' - g_2')$. Na krivke γ odtiaľ vyjadríme

$$g_1'\big(x + c\tau(x)\big) = \frac{1}{2}\left(\phi' - \tau'\psi + \frac{\psi}{c}\right) \ , \quad g_2'\big(x - c\tau(x)\big) = \frac{1}{2}\left(\phi' - \tau'\psi - \frac{\psi}{c}\right) \ . \tag{3.110}$$

Údaje teda určujú deriváciu g_1' v bodoch $\xi = x + c\tau(x)$ a deriváciu g_2' v bodoch $\eta = x - c\tau(x)$. Aby boli obe funkcie určené všade, a to jednoznačne, musia byť zobrazenia $x \mapsto x \pm c\tau(x)$ bijekcie priamky na seba. Stačí na to, aby ich derivácie $1 \pm c\tau'(x)$ boli kladné a ohraničené od nuly, teda aby pre nejakú konštantu q platilo

$$|\tau'(x)| \le q < \frac{1}{c} \ . \tag{3.111}$$

Geometricky to znamená, že γ je všade menej strmá ako charakteristiky, ktoré majú v rovine (x, t) sklon $\pm 1/c$, a každú charakteristiku oboch rodín pretne práve raz. Funkcie g_1 a g_2 potom dostaneme z (3.110) integrovaním až na konštanty a ich súčet určí prvá z podmienok (3.108), rovnako ako v časti 3.1.2. Úloha má teda jediné riešenie.

Krivkám s touto vlastnosťou hovoríme podľa terminológie z teórie relativity **priestorupodobné**. Pre ľubovoľné dva body takej krivky platí $|\Delta x| > c|\Delta t|$, takže signál, ktorý sa šíri rýchlosťou nanajvýš c, sa z jedného do druhého nedostane. Údaje v rôznych bodoch γ sa preto nemôžu navzájom ovplyvniť a môžeme ich zadať nezávisle.

Riešenie sa dá napísať aj priamo, podobne ako d'Alembertov vzorec. Nech bod $P = (x, t)$ leží nad krivkou γ a charakteristiky prechádzajúce bodom P pretínajú γ v bodoch $A = \big(a, \tau(a)\big)$ a $B = \big(b, \tau(b)\big)$,

kde $a-c\tau(a)=x-ct$ a $b+c\tau(b)=x+ct$ (obrázok 23 vľavo). Vlnovú rovnicu zapíšeme v tvare zákona zachovania

$$\partial_t\left(u_t\right)-\partial_x\left(c^2u_x\right)=0 \tag{3.112}$$

a zintegrujeme ju cez krivočiary trojuholník D s vrcholmi A, B a P. Podľa Greenovej vety je

$$0=\iint_D dx\,dt\,\left[\partial_x\left(c^2u_x\right)-\partial_t\left(u_t\right)\right]=\oint_{\partial D}\left(u_t\,dx+c^2u_x\,dt\right)\ , \tag{3.113}$$

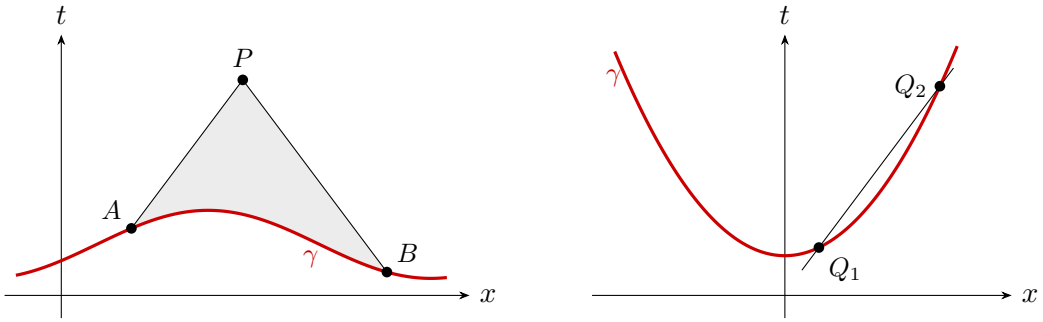
kde hranicu prechádzame proti smeru hodinových ručičiek, teda po krivke γ z bodu A do bodu B, potom po charakteristike z B do P a nakoniec po charakteristike z P do A. Na úseku BP je $dx=-c\,dt$, takže $u_t\,dx+c^2u_x\,dt=-c\left(u_t\,dt+u_x\,dx\right)=-c\,du$. Na úseku PA je $dx=c\,dt$ a ten istý výraz sa rovná $c\,du$. Integrály po charakteristikách sú preto $-c\left[u(P)-u(B)\right]$ a $c\left[u(A)-u(P)\right]$, a teda

$$u(P)=\frac{1}{2}\left[u(A)+u(B)\right]+\frac{1}{2c}\int_A^B\left(u_t\,dx+c^2u_x\,dt\right)\ , \tag{3.114}$$

kde sa integruje po krivke γ. Na nej je $dt=\tau'dx$ a po dosadení zadaných údajov dostaneme

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\phi(a)+\phi(b)\right]+\frac{1}{2c}\int_a^b ds\,\left[\left(1-c^2\tau'(s)^2\right)\psi(s)+c^2\tau'(s)\phi'(s)\right]\ . \tag{3.115}$$

Pre $\tau=0$ je $a=x-ct$ a $b=x+ct$ a dostávame d'Alembertov vzorec (3.25). Oblasťou závislosti bodu P je teraz oblúk krivky γ medzi bodmi A a B. Pre body pod krivkou γ dostaneme podobný vzorec, lebo vlnová rovnica sa pri zámene $t\to-t$ nemení.



Obr. 23: Cauchyho údaje na krivke γ v rovine (x,t). Vľavo priestorupodobná krivka. Charakteristiky prechádzajúce bodom P ju pretnú v bodoch A a B a riešenie v bode P závisí len od údajov na oblúku medzi nimi. Cez sivý krivočiary trojuholník integrujeme pri odvodení vzorca (3.115). Vpravo krivka $t=0{,}35+0{,}8x^2$, ktorá je pri počiatku priestorupodobná a ďalej od neho časupodobná. Charakteristika ju pretne v dvoch bodoch Q_1 a Q_2 a údaje v nich musia byť navzájom zviazané.

Pre fyzika je zaujímavý ešte jeden pohľad. Pri Lorentzovej transformácii

$$x'=\Lambda\left(x-vt\right)\ ,\quad t'=\Lambda\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\ ,\quad \Lambda=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ , \tag{3.116}$$

s rýchlosťou $|v|<c$ je podľa pravidla pre deriváciu zloženej funkcie $\partial_t=\Lambda\left(\partial_{t'}-v\,\partial_{x'}\right)$ a $\partial_x=\Lambda\left(\partial_{x'}-\frac{v}{c^2}\partial_{t'}\right)$. Zmiešané členy sa vyrušia a

$$\partial_t^2-c^2\partial_x^2=\Lambda^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\partial_{t'}^2-c^2\partial_{x'}^2\right)=\partial_{t'}^2-c^2\partial_{x'}^2\ , \tag{3.117}$$

vlnová rovnica sa teda nemení. Priamka $t' = 0$ je v pôvodných súradniciach priamka $t = vx/c^2$ so sklonom $|v|/c^2 < 1/c$, teda priestorupodobná. Cauchyho úloha s údajmi na nej je preto obyčajná Cauchyho úloha z časti 3.1.2 pre pozorovateľa, ktorý sa pohybuje rýchlosťou v. Naopak, každá priamka so sklonom menším ako $1/c$ je okamihom $t' = 0$ pre nejakého pozorovateľa. Priestorupodobnosť krivky od pozorovateľa nezávisí, lebo výraz $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ sa pri Lorentzovej transformácii nemení. Oba prístupy porovnáva príklad 25.

Údaje na charakteristike. Ak je γ celá alebo sčasti charakteristikou, napríklad úsekom priamky $x - ct = \eta_0$, je situácia úplne iná. Na nej je $u = g_1(\xi) + g_2(\eta_0)$, takže hodnoty u na γ určia funkciu g_1 až na konštantu. Ľubovoľná priečna derivácia, napríklad $u_x = g_1'(\xi) + g_2'(\eta_0)$, je potom určená až na jediné číslo $g_2'(\eta_0)$, a preto ju nemôžeme zadať nezávisle. Aj keď sú údaje zlučiteľné, o funkcii g_2 okrem jej hodnôt v bode η_0 nevieme nič a riešení je nekonečne veľa. Presne to sme videli v časti 2.2: na charakteristike Cauchyho údaje neurčujú druhé derivácie riešenia.

Na charakteristike teda môžeme zadať iba jednu funkciu. Ak ju zadáme na dvoch charakteristikách rôznych rodín, dostaneme **Goursatovu úlohu**. Zadajme napríklad

$$u(x, x/c) = \alpha(x) \text{ pre } x \geq 0 \ , \quad u(x, -x/c) = \beta(x) \text{ pre } x \leq 0 \ , \quad \alpha(0) = \beta(0) \ , \tag{3.118}$$

teda hodnoty na polpriamkach $\eta = 0$ a $\xi = 0$, ktoré vychádzajú z počiatku do kladných časov. Na prvej je $u = g_1(2x) + g_2(0)$ a na druhej $u = g_1(0) + g_2(2x)$, odkiaľ

$$u(x,t) = \alpha\left(\frac{x+ct}{2}\right) + \beta\left(\frac{x-ct}{2}\right) - \alpha(0) \ . \tag{3.119}$$

Riešenie je jednoznačne určené v klinovitej oblasti $t \geq |x|/c$ medzi oboma charakteristikami, v ktorej je $\xi \geq 0$ a $\eta \leq 0$. Každá z dvoch charakteristík, ktoré prechádzajú bodom tejto oblasti, pretne práve jednu z polpriamok s údajmi. Goursatova úloha má zmysel aj pre rovnice, ktoré sa od vlnovej líšia len členmi nižšieho rádu a majú preto rovnaké charakteristiky (príklad 26).

Časupodobné krivky. Krivke, ktorá je všade strmšia ako charakteristiky, napríklad priamke $x = 0$, hovoríme **časupodobná**. Zadajme na nej

$$u(0,t) = f(t) \ , \quad u_x(0,t) = h(t) \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \tag{3.120}$$

V jednom rozmere sú v rovnici $u_{xx} - c^{-2}u_{tt} = 0$ premenné x a ct rovnocenné, takže ten istý výpočet ako v časti 3.1.2 s vymenenými úlohami x a ct dá

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] + \frac{c}{2}\int_{t-x/c}^{t+x/c} ds\, h(s) \ . \tag{3.121}$$

Dosadením sa ľahko overí, že $u(0,t) = f(t)$ a $u_x(0,t) = h(t)$. Úloha je dobre položená a fyzikálne hovorí, že ak v jednom bode struny počas celého času meriame výchylku a jej sklon, teda aj priečnu silu, ktorou na seba pôsobia susedné časti struny, poznáme pohyb celej struny. S okrajovými úlohami z časti 3.1.3 to nie je v rozpore. Tam sme na polpriamke $x > 0$ zadávali počiatočné podmienky v

čase $t = 0$ a na hranici $x = 0$ len jednu podmienku. Riešenie, a teda aj druhá z veličín $u(0,t)$ a $u_x(0,t)$, je tam určené už počiatočnými podmienkami a jednou okrajovou podmienkou, takže druhú zadať nemôžeme.

Vo viacerých rozmeroch je situácia iná. Pre vlnovú rovnicu $u_{tt} = c^2\,(u_{xx} + u_{yy})$ s údajmi na rovine $x = 0$ uvažujme funkcie

$$u_n(x,y,t) = \frac{1}{n\mu_n}\cos(\omega t)\cos(ny)\sinh(\mu_n x)\ , \quad \mu_n = \sqrt{n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\ , \tag{3.122}$$

kde ω je pevné a $n > \omega/c$. Dosadením sa overí, že sú to riešenia. Na rovine $x = 0$ je $u_n = 0$ a $\partial_x u_n = \cos(\omega t)\cos(ny)/n$, takže pre veľké n sú údaje ľubovoľne malé, kým riešenie v ľubovoľnej vzdialenosti $x > 0$ rastie ako $e^{\mu_n x}/(2n\mu_n)$ nad všetky medze. Je to rovnaký príklad, aký pre Laplaceovu rovnicu uvidíme v kapitole 6 (Hadamardov príklad). Pre riešenia, ktoré pozdĺž roviny $x = 0$ kmitajú rýchlejšie, než dovoľuje frekvencia ω, sa rovnica v smere x správa ako eliptická a namiesto vlny dostaneme exponenciálne rastúce alebo tlmené riešenie, podobne ako pri evanescentných vlnách pri úplnom odraze svetla. V jednom rozmere takéto riešenia nie sú, lebo chýba premenná y.

Krivky, ktoré pretnú charakteristiku dvakrát. Ak má krivka γ okrem priestorupodobných úsekov aj časupodobné, ako na obrázku 23 vpravo, niektorá charakteristika ju pretne v dvoch bodoch Q_1 a Q_2. Údaje v každom bode krivky určujú hodnoty u_x a u_t a tým aj derivácie $g_1' = \frac{1}{2}\,(u_x + u_t/c)$ a $g_2' = \frac{1}{2}\,(u_x - u_t/c)$ ako v (3.110). Údaje v bodoch Q_1 a Q_2 preto určujú deriváciu tej istej funkcie v tom istom bode a musia byť navzájom zviazané. Pre všeobecné údaje preto riešenie neexistuje. Fyzikálne je to pochopiteľné, lebo body Q_1 a Q_2 spája charakteristika, po ktorej sa šíri signál rýchlosťou c, a údaje v neskoršom z nich sú ovplyvnené údajmi v skoršom.

Krajným prípadom je uzavretá krivka, ktorú každá charakteristika prechádzajúca jej vnútrom pretne dvakrát. Pri vlnovej rovnici preto nemá zmysel zadávať údaje na celej hranici ohraničenej oblasti, ako to budeme robiť pri Laplaceovej rovnici v kapitole 6. Nepomôže ani to, ak na hranici zadáme iba jednu podmienku. Funkcia $u = \sin(\pi x)\sin(\pi c t)$ rieši vlnovú rovnicu a je nulová na celej hranici obdĺžnika $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 1/c$, takže Dirichletova úloha pre vlnovú rovnicu v obdĺžniku nemá jediné riešenie.

Rovnica vedenia tepla. Pri rovnici vedenia tepla (3.75) sú charakteristikami priamky $t = \text{const}$. Priamka $t = 0$ je teda sama charakteristikou, a preto na nej zadávame iba jednu funkciu, rovnako ako pri vlnovej rovnici na charakteristike. Krivka, ktorá nie je nikde vodorovná, je necharakteristická a podľa časti 2.2 by sa na nej dali zadať dve funkcie. Zadajme ich na priamke $x = 0$,

$$u(0,t) = f(t)\ , \quad u_x(0,t) = h(t)\ . \tag{3.123}$$

Riešenie môžeme hľadať v tvare mocninového radu $u = \sum_n a_n(t)x^n$. Z rovnice $k\,u_{xx} = u_t$ dostaneme rekurentný vzťah $k(n+2)(n+1)\,a_{n+2} = a_n'$ so začiatočnými členmi $a_0 = f$, $a_1 = h$, a teda

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{f^{(m)}(t)}{k^m}\,\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{h^{(m)}(t)}{k^m}\,\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]\ . \tag{3.124}$$

Pre analytické funkcie f a h rad konverguje a dáva riešenie, ako to zaručuje Cauchyho–Kovalevskej veta. Úloha však nie je dobre položená. Funkcia

$$u_\omega(x,t) = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{Re}\, e^{i\omega t+(1+i)\sqrt{\omega/(2k)}\,x} = \frac{1}{\omega}\, e^{\sqrt{\omega/(2k)}\,x}\cos\left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}\,x\right) \tag{3.125}$$

rieši rovnicu vedenia tepla, lebo $\left((1+i)\sqrt{\omega/(2k)}\right)^2 = i\omega/k$. Na priamke $x=0$ je $u_\omega = \cos(\omega t)/\omega$ a $\partial_x u_\omega$ má amplitúdu $1/\sqrt{k\omega}$, takže pre veľké ω sú údaje ľubovoľne malé. Vo vzdialenosti $x=L$ však má riešenie amplitúdu $e^{L\sqrt{\omega/(2k)}}/\omega$, ktorá rastie nad všetky medze. Je to tá istá nestabilita ako pri spätnej úlohe v odseku o nezvratnosti v časti 3.2.

Fyzikálne poznáme tú istú vec z opačnej strany. Ak sa teplota na povrchu $x=0$ mení periodicky s frekvenciou ω, riešenie, ktoré v hĺbke $x>0$ ostáva ohraničené, je $e^{-\sqrt{\omega/(2k)}\,x}\cos\left(\omega t - \sqrt{\omega/(2k)}\,x\right)$. Kmity teploty sa teda tlmia na hĺbke rádovo $\sqrt{2k/\omega}$, a to tým rýchlejšie, čím je ich frekvencia vyššia, presne ako elektromagnetické pole vo vodiči pri povrchovom jave (skinefekte). Pre pôdu s teplotnou vodivosťou $k \approx 5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ preniknú denné zmeny teploty len do hĺbky asi 12 cm a ročné asi do 2 m (príklad 27). Z teploty a toku nameraných v hĺbke preto rýchle zmeny teploty na povrchu prakticky nezrekonštruujeme, lebo sú v meraní exponenciálne potlačené. Takéto **inverzné úlohy vedenia tepla** sa v praxi riešia, ale len pre pomaly sa meniace údaje alebo s ďalšími predpokladmi o ich hladkosti.

Parabolická hranica. Pri rovnici vedenia tepla je teda prirodzené zadávať na hranici oblasti len jednu podmienku. Na ktorých častiach hranice, ukáže princíp maxima z časti 3.2.3. Uvažujme oblasť

$$D = \{(x,t)\ :\ a(t) < x < b(t)\ ,\ 0 < t \le T\} \tag{3.126}$$

so spojitými funkciami $a<b$, teda tyč, ktorej konce sa môžu pohybovať. Dôkaz princípu maxima z časti 3.2.3 prejde bez zmeny. Pre funkciu $w = u + \varepsilon x^2$ je $w_t - k\,w_{xx} = -2k\varepsilon < 0$, takže w nemôže mať maximum vo vnútri oblasti ani na jej hornej strane $t=T$, kde by bolo $w_t \ge 0$ (na hornej strane ako jednostranná derivácia) a $w_{xx} \le 0$. Riešenie preto nadobúda maximum aj minimum na **parabolickej hranici** oblasti, ktorú tvorí spodná strana $t=0$ a bočné strany $x=a(t)$ a $x=b(t)$. Odtiaľ ako v časti 3.2.3 vyplýva, že zadaním u na parabolickej hranici je riešenie určené jednoznačne a spojite závisí od údajov. Na hornej strane nesmieme zadávať nič, lebo to by bola spätná úloha. Bočné strany pritom nemusia byť zvislé. Ak niektorú z nich nahradíme napríklad šikmou priamkou, úloha s jednou podmienkou na nej ostane dobre položená, kým Cauchyho údaje na nej vedú k podobnej nestabilite ako na priamke $x=0$. Oblasti s pohyblivými koncami sa vyskytujú napríklad pri topení ľadu, kde sa hranica medzi vodou a ľadom pohybuje (Stefanova úloha). Tam však poloha hranice nie je vopred známa a určuje ju ďalšia podmienka na hranici, podľa ktorej teplo, ktoré k nej prúdi, spotrebuje topenie.

Zhrnutie. Pri vlnovej rovnici patria Cauchyho údaje na priestorupodobné krivky a v jednom rozmere aj na časupodobné. Na charakteristiku patrí iba jedna funkcia a na krivke, ktorú pretne niektorá charakteristika dvakrát, sú údaje preurčené. Pri rovnici vedenia tepla patrí na každú časť parabolickej hranice jedna podmienka a Cauchyho údaje na necharakteristickej krivke vedú na úlohu, ktorá nie

je dobre položená. V kapitole 6 uvidíme, že pri eliptických rovniciach, ktoré reálne charakteristiky nemajú, patrí jedna podmienka na celú uzavretú hranicu oblasti a Cauchyho úloha opäť nie je dobre položená. Typ rovnice z kapitoly 2 teda neurčuje len správanie riešení, ale aj to, aké údaje k rovnici patria.

Príklad 25. Nájdite riešenie vlnovej rovnice s údajmi

$$u(x,\alpha x)=\phi(x)\ ,\quad u_t(x,\alpha x)=0 \tag{3.127}$$

na priamke $t=\alpha x$ s $|\alpha|<1/c$, raz zo vzorca (3.115) a raz Lorentzovou transformáciou s rýchlosťou $v=c^2\alpha$. Ako sa správa úzky pulz ϕ? □

Výsledok. S označením $\beta=c\alpha$ je $a=(x-ct)/(1-\beta)$, $b=(x+ct)/(1+\beta)$ a

$$u(x,t)=\frac{1-\beta}{2}\,\phi\left(\frac{x-ct}{1-\beta}\right)+\frac{1+\beta}{2}\,\phi\left(\frac{x+ct}{1+\beta}\right)\ . \tag{3.128}$$

V sústave, ktorá sa pohybuje rýchlosťou v, sú údaje zadané v čase $t'=0$ a je $u(x',0)=\phi(\Lambda x')$ a $u_{t'}(x',0)=v\,\partial_{x'}\phi(\Lambda x')$. Profil tam teda má nenulovú počiatočnú rýchlosť, a preto sa pulz nerozdelí na dve rovnaké polovice ako v časti 3.1.2. Pulz, ktorý beží doprava, má $(1-\beta)$-násobnú šírku a výšku $(1-\beta)/2$ (vzhľadom na pôvodný pulz), pulz bežiaci doľava má $(1+\beta)$-násobnú šírku a výšku $(1+\beta)/2$. Pre $\alpha=0$ dostaneme dve rovnaké polovice.

Príklad 26. Kleinova–Gordonova rovnica $u_{tt}-c^2u_{xx}+m^2u=0$ sa od vlnovej rovnice líši len členom bez derivácií, takže má rovnaké charakteristiky. Riešte pre ňu Goursatovu úlohu s údajmi $u=1$ na oboch charakteristikách $x=\pm ct$, $t\ge 0$. □

Návod. V súradniciach (3.10) má rovnica tvar $u_{\xi\eta}=\mu u$ s $\mu=m^2/(4c^2)$. Hľadajte riešenie v tvare $u=f(s)$, kde $s=\xi\eta$, a funkciu f ako mocninový rad s $f(0)=1$.

Výsledok. Pre f dostaneme rovnicu $sf''+f'=\mu f$ a rad $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(\mu s)^n/(n!)^2$. V oblasti $t\ge|x|/c$ je $s=x^2-c^2t^2\le 0$ a riešenie je

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{m^2\,(c^2t^2-x^2)}{4c^2}\right)^n=J_0\left(\frac{m}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right)\ , \tag{3.129}$$

kde J_0 je Besselova funkcia, s ktorou sa stretneme v kapitole 7.

Príklad 27. Teplota povrchu pôdy sa počas roka mení približne ako $u(0,t)=T_0+A\cos(\omega t)$, kde $\omega=2\pi/(1\,\mathrm{rok})$. Pôdu považujte za polpriestor $x>0$ s teplotnou vodivosťou $k\approx 5\cdot10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}$. Nájdite ohraničené riešenie, ktoré je periodické v čase. V akej hĺbke klesne amplitúda ročných zmien teploty na 1 % amplitúdy na povrchu a v akej hĺbke je teplota v protifáze s povrchom? Prečo býva v pivnici v lete chladno a v zime teplo? □

Výsledok.

$$u(x,t)=T_0+A\,e^{-x/d}\cos\left(\omega t-\frac{x}{d}\right)\ ,\qquad d=\sqrt{\frac{2k}{\omega}}\approx 2{,}2\,\mathrm{m}\ . \tag{3.130}$$

Amplitúda klesne na 1 % v hĺbke $d \ln 100 \approx 10\,\mathrm{m}$. V hĺbke $\pi d \approx 7\,\mathrm{m}$ je teplota v protifáze s povrchom, takže najteplejšie je tam v zime, ale amplitúda je len $e^{-\pi} \approx 4\,\%$ povrchovej. V hĺbke pivnice, asi 2,5 m, je amplitúda približne tretinová a maximum sa oneskorí asi o dva mesiace, takže teplota je tam počas celého roka blízko ročného priemeru.

4 Teória distribúcií

V kapitole 3 sme odvodili vzorce pre riešenia vlnovej rovnice a rovnice vedenia tepla, d'Alembertov vzorec (3.25) a Poissonov vzorec (3.84). Pri ich odvodení sme predpokladali, že funkcie, ktoré do nich vstupujú, sú dostatočne hladké. Hneď potom sme však zistili, že samotné vzorce sa dajú použiť aj pre funkcie, ktoré hladké nie sú, ba dokonca ani spojité. Príkladom je počiatočná podmienka so skokom (3.95) z časti 3.3. Zaujímať sa o riešenia v takých prípadoch malo zmysel a niekedy sme si poradili tak, že sme nespojitú funkciu nahradili postupnosťou hladkých funkcií, ktoré k nej konvergujú, a pozreli sa na limitu príslušných riešení.

Teraz by sme tomu chceli dať formálnejší charakter a vybudovať aparát, v ktorom sa takéto výpočty dajú robiť poriadne. Zavedieme pojem **distribúcie**, teda **zovšeobecnenej funkcie**. Distribúcie nebudú definované pobodovo, ich hodnota v jednom bode nebude mať zmysel. Budú existovať iba v istom lokálne spriemerovanom zmysle: o distribúcii budeme vedieť len to, aké sú jej priemery s hladkými váhovými funkciami. Podobne sa na veličiny pozerá aj fyzika, lebo každý prístroj meria s konečnou rozlišovacou schopnosťou, a teda vždy len nejaký priemer. Aparát bude zaujímavý aj z fyzikálneho hľadiska, lebo sa v ňom podarí dobre zadefinovať objekty lokalizované v jednom časovom okamihu alebo v jednom bode priestoru, napríklad silu okamžitého úderu alebo hustotu bodového náboja.

Budeme pracovať v priestore $\mathbb{R}^n$ a funkcie budú definované na celom $\mathbb{R}^n$. Na rozdiel od ostatných kapitol budeme body $\mathbb{R}^n$ písať bez šípky, $x \in \mathbb{R}^n$. V tejto kapitole budeme totiž často písať výrazy ako ∂^α, x^α alebo f_x, ktoré by šípky zbytočne zaťažovali. Či ide o bod $\mathbb{R}^n$, alebo o jednu súradnicu, bude vždy jasné z kontextu. Priestor $\mathbb{R}^n$ so sebou nesie veľmi veľa štruktúry, napríklad posunutia a lineárne transformácie, a tú budeme pri operáciách s distribúciami využívať. Samotná definícia distribúcií jej však potrebuje oveľa menej a všetko, čo povieme, by sa dalo preniesť aj na funkcie definované iba na otvorenej podmnožine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. My sa pre jednoduchosť obmedzíme na celý $\mathbb{R}^n$.

V časti 4.1 zavedieme priestor testovacích funkcií a distribúcie ako spojité lineárne funkcionály na ňom. V časti 4.2 ukážeme, ako sa s distribúciami počíta, najmä ako sa derivujú. V časti 4.3 zmeníme triedu testovacích funkcií tak, aby sa dala zadefinovať Fourierova transformácia distribúcií. To bude hlavný nástroj v kapitole 5, kde pomocou neho vyriešime vlnovú rovnicu a rovnicu vedenia tepla vo viacerých rozmeroch.

4.1 Distribúcie na funkciách s kompaktným nosičom

4.1.1 Priestor testovacích funkcií $\mathcal{D}$

Distribúciu budeme poznať podľa toho, ako pôsobí na vhodné testovacie funkcie. Najprv preto musíme povedať, ktoré funkcie budú testovacie. Na to potrebujeme pojem nosiča. **Nosičom** funkcie $f(x)$ nazývame uzáver množiny bodov, v ktorých je funkcia nenulová,

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq 0\}} \ . \tag{4.1}$$

V anglickej literatúre, s ktorou sa budete stretávať najčastejšie, sa nosiču hovorí *support*, a odtiaľ pochádza aj označenie supp. Nosič je najmenšia uzavretá množina, mimo ktorej je funkcia nulová,

teda $f(x) = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f$. O funkcii povieme, že má **kompaktný nosič**, ak je jej nosič kompaktná množina. Keďže nosič je vždy uzavretý, v $\mathbb{R}^n$ to znamená, že je ohraničený, teda existuje C také, že $f(x) = 0$ pre všetky $|x| > C$.

Priestor testovacích funkcií $\mathcal{D}$ tvoria funkcie $\varphi(x)$, ktoré majú kompaktný nosič a majú spojité derivácie všetkých rádov, teda patria do $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Treba oceniť, aké ťažké je splniť obe podmienky naraz. Nesplní ich napríklad žiadna analytická funkcia okrem nuly, lebo analytická funkcia, ktorá je nulová na nejakej otvorenej množine, je nulová všade. Testovacími funkciami teda nie sú polynómy ani gaussovská funkcia $e^{-|x|^2}$. Príkladom testovacej funkcie je

$$T(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} , & |x| < 1 , \\ 0 , & |x| \geq 1 . \end{cases} \tag{4.2}$$

Rozmyslite si, že má naozaj spojité derivácie všetkých rádov. Jediným problematickým miestom je sféra $|x| = 1$. Každá derivácia funkcie T je vnútri gule tvaru $P(x)\,(1-|x|^2)^{-m}\,e^{-1/(1-|x|^2)}$ s polynómom P a prirodzeným číslom m a pri priblížení k sfére ide k nule, lebo $s^{-m}e^{-1/s} \to 0$ pre $s \to 0^+$. Nosičom funkcie T je pre $n = 1$ interval $[-1, 1]$, všeobecne uzavretá jednotková guľa. Z nej sa potom dajú rôznymi operáciami budovať ďalšie testovacie funkcie, napríklad násobením polynómom alebo inou funkciou z $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, posúvaním a naťahovaním, $T\big((x-a)/\varepsilon\big)$.

Ďalej potrebujeme vedieť, kedy postupnosť testovacích funkcií konverguje. Najprv zavedieme označenie. Pre $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, kde α_i sú nezáporné celé čísla, píšeme

$$\partial^\alpha \varphi \equiv \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \varphi , \quad x^\alpha \equiv x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} , \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n . \tag{4.3}$$

Takej n-tici hovoríme **multiindex** a číslo $|\alpha|$ je rád derivácie. Množinu všetkých nezáporných celých čísel $\mathbb{N} \cup \{0\}$ budeme označovať $\mathbb{N}_0$, takže $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, a $B(x, R)$ bude guľa s polomerom R a stredom x. Povieme, že postupnosť testovacích funkcií φ_k **konverguje v** $\mathcal{D}$ k funkcii φ, ak nosiče všetkých funkcií φ_k ležia v jednej spoločnej guli, teda existuje R také, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset B(0, R)$ pre všetky k, a ak všetky parciálne derivácie funkcií φ_k konvergujú rovnomerne k príslušným deriváciám funkcie φ,

$$\partial^\alpha \varphi_k \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n . \tag{4.4}$$

Je to veľmi silná podmienka. Nebudeme to potrebovať, ale spomeňme, že pre funkcie s nosičom v pevnej guli je to konvergencia vo všetkých normách

$$\|\varphi\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| , \quad m \in \mathbb{N}_0 . \tag{4.5}$$

Topológia na celom priestore $\mathcal{D}$, ktorá vedie k tejto konvergencii, je o niečo zložitejšia a nebudeme ju potrebovať.

4.1.2 Distribúcie ako lineárne funkcionály na $\mathcal{D}$

Teraz sme pripravení zadefinovať distribúcie. **Priestor distribúcií** $\mathcal{D}'$ je, ako naznačuje označenie, duálny priestor k priestoru $\mathcal{D}$, teda priestor lineárnych spojitých funkcionálov na $\mathcal{D}$. Distribúcia $f \in \mathcal{D}'$

priradí každej testovacej funkcii číslo[8],

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \ , \quad \varphi \mapsto f[\varphi] \equiv (f, \varphi) \ , \tag{4.6}$$

pričom

$$(f, \varphi_1 + \lambda\varphi_2) = (f, \varphi_1) + \lambda(f, \varphi_2) \ , \qquad \varphi_k \to \varphi \ \Rightarrow \ (f, \varphi_k) \to (f, \varphi) \ , \tag{4.7}$$

kde konvergencia $\varphi_k \to \varphi$ je konvergencia v $\mathcal{D}$. Podmienka (4.4) je taká silná, že spojitosť je pre lineárny funkcionál veľmi slabá požiadavka. Nespojité lineárne funkcionály na $\mathcal{D}$ síce existujú, ich existencia sa však dá dokázať len nekonštruktívne (pomocou axiómy výberu) a nikdy ich nestretneme.

Príkladmi distribúcií sú funkcionály

$$(f, \varphi) = \varphi(a) \ , \quad (f, \varphi) = \int_V d^n x \, \varphi(x) \ , \quad (f, \varphi) = \partial_i \varphi(a) \ , \tag{4.8}$$

kde a je pevný bod v $\mathbb{R}^n$ a V pevná oblasť v $\mathbb{R}^n$. Linearita je zrejmá. Spojitosť vyplýva z rovnomernej konvergencie (4.4) a pri integráli aj z toho, že nosiče funkcií φ_k ležia v spoločnej guli. Naopak funkcionály

$$\varphi(a) \, \partial_i \varphi(a) \ , \quad \int_V d^n x \, \varphi^2(x) \tag{4.9}$$

distribúciami nie sú, lebo nie sú lineárne.

Konvergenciu v priestore $\mathcal{D}'$ budeme definovať v slabom zmysle. Povieme, že postupnosť distribúcií f_k konverguje k distribúcii f, ak

$$f_k \overset{W}{\to} f \ \Leftrightarrow \ (f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D} \ . \tag{4.10}$$

Vzhľadom na takto definovanú konvergenciu je priestor $\mathcal{D}'$ úplný. Ak je postupnosť čísel (f_k, φ) cauchyovská pre každé $\varphi \in \mathcal{D}$, existuje $f \in \mathcal{D}'$ také, že $f_k \overset{W}{\to} f$. Limitu stačí zadefinovať vzťahom $(f, \varphi) = \lim_{k\to\infty}(f_k, \varphi)$. Takto zadefinovaný funkcionál je zrejme lineárny. Netriviálne je, že je aj spojitý, a to dokazovať nebudeme.

Medzi distribúciami sú aj také, ktoré sa od obyčajných funkcií príliš nelíšia. Funkciu Φ nazývame **lokálne integrovateľnou**, ak je integrovateľná na každej kompaktnej podmnožine svojho definičného oboru. To neznamená, že je integrovateľná na celom definičnom obore. Napríklad funkcia $1/x$ je lokálne integrovateľná na intervale $(0, 1)$, hoci na ňom integrovateľná nie je. Na celej priamke však lokálne integrovateľná nie je, lebo nie je integrovateľná na žiadnom intervale, ktorý obsahuje nulu. K tejto funkcii sa ešte vrátime v časti 4.1.4.

Distribúciu Φ nazývame **regulárnou**, ak sa dá zapísať ako integrál s nejakou lokálne integrovateľnou funkciou $\Phi(x)$,

$$(\Phi, \varphi) = \int d^n x \, \Phi(x)\varphi(x) \ . \tag{4.11}$$

Distribúciu aj funkciu, ktorá ju zadáva, označujeme rovnakým písmenom a odtiaľ pochádza aj označenie (f, φ), ktoré pripomína skalárny súčin. Integrál existuje, lebo φ je ohraničená a má kompaktný

[8] Pri Fourierovej transformácii v časti 4.3 budeme potrebovať aj komplexné testovacie funkcie a distribúcie s komplexnými hodnotami. Všetko v tejto a nasledujúcej časti pre ne platí bez zmeny.

nosič. Takto zadaný funkcionál je zrejme lineárny a je aj spojitý, lebo ak ležia nosiče funkcií φ_k v guli $B(0,R)$, je

$$|(\Phi,\varphi_k)-(\Phi,\varphi)| \le \max_x |\varphi_k(x)-\varphi(x)| \int_{B(0,R)} d^n x\, |\Phi(x)| \to 0\ . \tag{4.12}$$

Regulárne distribúcie tvoria v priestore $\mathcal{D}'$ podpriestor, ktorý je izomorfný priestoru lokálne integrovateľných funkcií, ak stotožníme funkcie, ktoré sa líšia len na množine nulovej miery, napríklad v konečnom počte bodov. Také funkcie totiž dávajú v (4.11) rovnaký integrál, a teda tú istú distribúciu. Distribúcia teda „nevidí“ hodnotu funkcie v jednom bode, čo sme už videli pri Poissonovom vzorci v časti 3.3. Distribúciám, ktoré nie sú regulárne, hovoríme **singulárne**.

Ešte niekoľko definícií. Dve distribúcie $f, g \in \mathcal{D}'$ sa **rovnajú**, ak

$$(f,\varphi) = (g,\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\ . \tag{4.13}$$

Hoci distribúcia nemá hodnoty v jednotlivých bodoch, môžeme povedať, kde je nulová. Distribúcia f je **nulová na otvorenej množine** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ak

$$(f,\varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\ ,\ \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega\ . \tag{4.14}$$

Nosičom distribúcie f nazývame doplnok najväčšej otvorenej množiny, na ktorej je f nulová. Dá sa ukázať, že taká množina existuje, je to zjednotenie všetkých otvorených množín, na ktorých je f nulová.

Všimnite si, že sme zatiaľ nezadefinovali súčin $f \cdot g$ dvoch distribúcií z $\mathcal{D}'$, a ani to neurobíme. Prečo, uvidíme v častiach 4.1.4 a 4.2.2.

Príklad 28. Ukážte, že nosič regulárnej distribúcie zadanej spojitou funkciou je rovnaký ako nosič tejto funkcie[9]. Ukážte, že nosičom δ-distribúcie je množina $\{0\}$. □

4.1.3 Distribúcie ako zúplnenie $\mathcal{D}$

Fyzik si δ-distribúciu zvyčajne predstavuje inak, ako limitu stále užších a vyšších impulzov s jednotkovou plochou. Aj tento pohľad sa dá urobiť presným a vedie k tým istým objektom. Distribúcie potom dostaneme zúplnením priestoru $\mathcal{D}$, podobne ako reálne čísla dostaneme zúplnením racionálnych.

Treba si však dať pozor na to, vzhľadom na akú konvergenciu. Vzhľadom na vlastnú konvergenciu (4.4) je priestor $\mathcal{D}$ úplný. Ak ležia nosiče funkcií φ_k v spoločnej guli a postupnosť každej derivácie $\partial^\alpha \varphi_k$ je rovnomerne cauchyovská, konvergujú derivácie rovnomerne k deriváciám hladkej funkcie s nosičom v tej istej guli, teda k testovacej funkcii. Takéto zúplnenie by nič nové neprinieslo.

Iná situácia je pri slabej konvergencii. Testovaciu funkciu ψ môžeme chápať ako regulárnu distribúciu, $(\psi,\varphi) = \int d^n x\, \psi(x)\varphi(x)$. Postupnosť testovacích funkcií ψ_k nazveme **slabo cauchyovskou**, ak pre každé $\varphi \in \mathcal{D}$ konvergujú čísla (ψ_k,φ). Príkladom je postupnosť

$$\psi_k(x) = c\, k^n T(kx)\ , \quad c = \left(\int d^n x\, T(x) \right)^{-1}\ , \tag{4.15}$$

[9] Pre nespojité funkcie to platiť nemusí. Funkcia, ktorá je rovná jednej v bodoch s racionálnymi súradnicami a nule inde, má podľa definície nosič $\mathbb{R}^n$, ale zadáva nulovú distribúciu.

s funkciou T z (4.2). Po substitúcii $y = kx$ dostaneme

$$(\psi_k, \varphi) = c \int d^n y\, T(y)\, \varphi(y/k) \to c\, \varphi(0) \int d^n y\, T(y) = \varphi(0) \ , \tag{4.16}$$

lebo $\varphi(y/k) \to \varphi(0)$ rovnomerne na nosiči funkcie T. Limita teda existuje pre každé φ, ale nezadáva ju žiadna testovacia funkcia, ba ani žiadna lokálne integrovateľná funkcia, ako uvidíme v časti 4.1.4. Vzhľadom na slabú konvergenciu teda priestor $\mathcal{D}$ úplný nie je.

Zúplnenie zostrojíme rovnako ako pri reálnych číslach. Dve slabo cauchyovské postupnosti ψ_k a ψ'_k nazveme ekvivalentnými, ak

$$\int d^n x\, (\psi_k(x) - \psi'_k(x))\varphi(x) \to 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D} \ , \tag{4.17}$$

a novými objektmi budú triedy ekvivalentných postupností. Každá trieda zadáva funkcionál

$$(f, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (\psi_k, \varphi) \ , \tag{4.18}$$

ktorý od výberu postupnosti z triedy nezávisí. Podľa časti 4.1.2 je to lineárny spojitý funkcionál, teda distribúcia, a platí $\psi_k \overset{W}{\to} f$. Rôzne triedy dávajú rôzne distribúcie, lebo postupnosti, ktoré dávajú tú istú distribúciu, sú podľa definície ekvivalentné. Na konci časti 4.2.4 ukážeme, že takto dostaneme všetky distribúcie, teda že každá distribúcia je slabou limitou postupnosti testovacích funkcií. Obe definície sú preto ekvivalentné a priestor $\mathcal{D}'$ je zúplnením priestoru $\mathcal{D}$ vzhľadom na slabú konvergenciu. Postupnosť (4.15) patrí do triedy, ktorá zodpovedá δ-distribúcii.

4.1.4 Príklady distribúcií

Ako sme už povedali, každá lokálne integrovateľná funkcia definuje cez (4.11) regulárnu distribúciu. Často budeme stretávať funkciu, ktorá je rovná jednej na danej množine $K \subset \mathbb{R}^n$ a nule mimo nej,

$$\theta_K(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \in K \ , \\ 0 \ , & x \notin K \ . \end{cases} \tag{4.19}$$

V jednom rozmere s množinou $K = (0, \infty)$ dostaneme **Heavisideovu funkciu**, ktorú budeme označovať jednoducho $\theta(x)$. Keďže zadáva regulárnu distribúciu, medzi funkciou θ a distribúciou θ nebudeme rozlišovať.

Najdôležitejším príkladom je **δ-distribúcia**,

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \ . \tag{4.20}$$

To už je singulárna, teda „ozajstná“ distribúcia. Ukážme to v jednom rozmere. Predpokladajme, že existuje lokálne integrovateľná funkcia $\delta(x)$, pre ktorú je $\int dx\, \delta(x)\varphi(x) = \varphi(0)$ pre všetky $\varphi \in \mathcal{D}$. Pre $\varepsilon > 0$ zoberme $\varphi(x) = T(x/\varepsilon)$ s funkciou T z (4.2). Jej nosičom je interval $[-\varepsilon, \varepsilon]$ a jej najväčšou hodnotou je $T(0) = e^{-1} > 0$. Postupne dostávame

$$T(0) = |(\delta, \varphi)| = \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\, \delta(x)\, T(x/\varepsilon) \right| \le T(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\, |\delta(x)| \ , \tag{4.21}$$

a teda $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\,|\delta(x)| \geq 1$ pre každé $\varepsilon > 0$. Pre lokálne integrovateľnú funkciu však tento integrál v limite $\varepsilon \to 0$ ide k nule, a to je spor.

Občas budeme písať $\delta(x)$ alebo dokonca $\delta(x-a)$, akoby išlo o funkciu, a podobne

$$\int d^n x\, \delta(x-a)\varphi(x) = \varphi(a)\ . \tag{4.22}$$

Treba to však brať s rezervou. Takýto zápis nám len pomáha pamätať si, v ktorom bode treba testovaciu funkciu vyčísliť, a hovorí iba to, že distribúcia $\delta(x-a)$ priradí funkcii φ hodnotu $\varphi(a)$. V časti 4.2 uvidíme, že ide o posunutú δ-distribúciu. Podobne ak píšeme $\nabla^2 G(x) = \delta(x-a)$, chceme tým povedať, že

$$(\nabla^2 G, \varphi) = \varphi(a) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\ , \tag{4.23}$$

kde $\nabla^2 G$ je derivácia distribúcie G v zmysle časti 4.2.

Čoskoro uvidíme, že distribúcie, ktoré priraďujú funkcii hodnotu jej derivácie v nule, je rozumné nazývať deriváciami δ-distribúcie.

Postupnosť regulárnych distribúcií, ktoré konvergujú k δ-distribúcii, nazývame **δ-postupnosťou**. Jednu sme už videli v (4.15). V jednom rozmere sú to napríklad postupnosti

$$f_n(x) = \begin{cases} n/2\ , & |x| < 1/n\ , \\ 0\ , & |x| > 1/n\ , \end{cases} \qquad n \to \infty\ , \tag{4.24}$$

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{t}}\ , \qquad t \to 0^+\ , \tag{4.25}$$

$$h_y(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}\ , \qquad y \to 0^+\ , \tag{4.26}$$

$$k_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(\lambda x)}{x}\ , \qquad \lambda \to \infty\ , \tag{4.27}$$

$$\rho_n(x) = n\,\rho(nx)\ , \quad \rho \in \mathcal{D}\ , \ \int dx\,\rho(x) = 1\ , \qquad n \to \infty\ . \tag{4.28}$$

Overiť, že naozaj konvergujú k δ, je dobré cvičenie. Prvé tri a posledná (pre nezápornú ρ) sú nezáporné, majú integrál rovný jednej a s rastúcim indexom sa sústreďujú stále bližšie k nule. Postupnosť k_λ je iná, osciluje stále rýchlejšie a k nule sa nesústreďuje. Postupnosť g_t poznáme z kapitoly 3. Funkcia (3.85), ktorej v kapitole 5 budeme hovoriť Greenova funkcia rovnice vedenia tepla, je $G(x,t) = g_{4kt}(x)$, kde k je teplotná vodivosť. Preto $G(x,t) \overset{W}{\to} \delta$ pre $t \to 0^+$.

Na δ-postupnostiach je dobre vidno aj to, prečo sme nezadefinovali súčin dvoch distribúcií. Ak $f_n \overset{W}{\to} \delta$, prirodzene by sme čakali, že f_n^2 bude konvergovať k δ^2. Pre postupnosť (4.24) je však podľa vety o strednej hodnote

$$\int dx\, f_n^2(x)\,\varphi(x) = \frac{n^2}{4}\int_{-1/n}^{1/n} dx\,\varphi(x) = \frac{n}{2}\,\varphi(\xi_n)\ , \quad |\xi_n| < \frac{1}{n}\ , \tag{4.29}$$

a pre $\varphi(0) \neq 0$ to ide do nekonečna. Postupnosť f_n^2 teda nekonverguje a δ^2 nemá rozumný zmysel. Podobne dopadnú aj ostatné nezáporné δ-postupnosti.

Funkcia $1/x$ nie je lokálne integrovateľná na celej priamke, a preto nezadáva regulárnu distribúciu. Integrál $\int dx\,\varphi(x)/x$ pre testovacie funkcie s $\varphi(0) \neq 0$ v okolí nuly diverguje. Ak však z okolia nuly

vyrežeme symetrický interval, divergencie sprava a zľava sa navzájom zrušia. To vedie k distribúcii **hlavnej hodnoty** (anglicky *principal value*),

$$\left(\mathrm{PV}\frac{1}{x},\varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon} dx\,\frac{\varphi(x)}{x} = \int_0^\infty dx\,\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\ . \tag{4.30}$$

Druhý tvar dostaneme, keď v integráli cez $x<-\varepsilon$ substituujeme $x\to -x$ a spojíme ho s integrálom cez $x>\varepsilon$. Integrál v ňom už existuje, lebo podľa vety o strednej hodnote je $|\varphi(x)-\varphi(-x)|\le 2x\max|\varphi'|$ a integrand je ohraničený. Ak ležia nosiče testovacích funkcií v intervale $[-R,R]$, dostaneme odhad

$$\left|\left(\mathrm{PV}\frac{1}{x},\varphi\right)\right| \le 2R\max_x|\varphi'(x)|\ , \tag{4.31}$$

z ktorého vyplýva spojitosť. Pre testovacie funkcie s nosičom mimo nuly je $(\mathrm{PV}\,1/x,\varphi)=\int dx\,\varphi(x)/x$, takže mimo nuly sa $\mathrm{PV}\,1/x$ správa ako funkcia $1/x$. V nule ju však bolo treba zadefinovať zvlášť a hlavná hodnota je len jedna z možností. Ak k nej pripočítame ľubovoľný násobok δ, dostaneme distribúciu, ktorá sa mimo nuly správa rovnako.

Vo fyzike sa hlavná hodnota objavuje najčastejšie vo dvojici s δ-distribúciou. Pre $\varepsilon>0$ je funkcia $1/(x\pm i\varepsilon)$ hladká a ohraničená a pre $\varepsilon\to 0^+$ platí

$$\frac{1}{x\pm i\varepsilon} = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\mp i\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\overset{W}{\to}\mathrm{PV}\frac{1}{x}\mp i\pi\delta\ . \tag{4.32}$$

Imaginárna časť je až na faktor $\mp\pi$ postupnosť h_y z (4.26) s $y=\varepsilon$. Reálna časť je nepárna, takže

$$\int dx\,\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,\varphi(x) = \int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\ . \tag{4.33}$$

Pre $\varepsilon\to 0^+$ sa zlomok $x^2/(x^2+\varepsilon^2)\le 1$ blíži k jednej, integrand je ohraničený a má ohraničený nosič, a preto integrál konverguje k (4.30). Vzťahu (4.32) sa hovorí **Sochockého vzorec** (aj Sochockého–Plemeljov vzorec) a zvykne sa písať v skrátenom tvare

$$\frac{1}{x\pm i0} = \mathrm{PV}\frac{1}{x}\mp i\pi\delta\ . \tag{4.34}$$

Stretnete sa s ním pri Greenových funkciách, ktoré opisujú odozvu systému iba v budúcnosti, pri disperzných (Kramersových–Kronigových) vzťahoch a v kvantovej teórii rozptylu pri výrazoch $1/(E-H\pm i0)$.

4.2 Operácie s distribúciami

4.2.1 Základná myšlienka, násobenie funkciou a transformácia argumentov

Operácie s distribúciami budeme definovať pomocou operácií s testovacími funkciami. Majme lineárne zobrazenie $R:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$, ktoré testovacej funkcii φ priradí testovaciu funkciu $R\varphi$. Operáciu R' na distribúciách, $f\mapsto R'f$, potom zadefinujeme tak, že R prenesieme na testovaciu funkciu,

$$(R'f,\varphi) := (f,R\varphi)\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{D}\ . \tag{4.35}$$

V reči lineárnej algebry je R' transponované (duálne) zobrazenie k R. Funkcionál $R'f$ je lineárny, lebo R aj f sú lineárne. Ak je R navyše spojité, teda ak z $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}$ vyplýva $R\varphi_k \to R\varphi$ v $\mathcal{D}$, je $(R'f, \varphi_k) = (f, R\varphi_k) \to (f, R\varphi) = (R'f, \varphi)$, takže $R'f$ je spojitý funkcionál a takto zadefinovaná distribúcia $R'f$ je dobrá distribúcia z $\mathcal{D}'$. Samotná operácia R' je pritom vždy spojitá vzhľadom na slabú konvergenciu v $\mathcal{D}'$,

$$f_k \overset{W}{\to} f \;\Rightarrow\; (R'f_k, \varphi) = (f_k, R\varphi) \to (f, R\varphi) = (R'f, \varphi) \;, \tag{4.36}$$

teda $R'f_k \overset{W}{\to} R'f$. Operácie zadefinované podľa receptu (4.35) sa preto dajú zamieňať s limitou, čo pri obyčajných funkciách, napríklad pri derivovaní, vo všeobecnosti neplatí.

Ostáva zvoliť R tak, aby R' bolo zovšeobecnením operácie, ktorú poznáme pre funkcie. Postup bude vždy rovnaký. Pozrieme sa, ako sa daná operácia správa na regulárnych distribúciách, nájdeme R, ktoré ju reprodukuje, a definíciu prenesieme na všetky distribúcie.

Takto môžeme hneď jednoducho zaviesť dve operácie s distribúciami. Prvou je **násobenie funkciou** $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pre regulárnu distribúciu je zrejme $(a\Phi, \varphi) = \int d^n x\, a\Phi\varphi = (\Phi, a\varphi)$, takže zoberieme $R\varphi = a\varphi$ a podľa receptu (4.35) zadefinujeme vynásobenú distribúciu

$$(af, \varphi) := (f, a\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D} \;. \tag{4.37}$$

Funkcia a musí byť hladká, inak by $a\varphi$ nebola testovacou funkciou. Distribúciu teda vo všeobecnosti nevieme vynásobiť napríklad funkciou θ. Pre δ-distribúciu dostaneme $(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0)$, teda

$$a\,\delta = a(0)\,\delta \;, \qquad x\,\delta = 0 \;, \tag{4.38}$$

kde druhý vzťah platí v jednom rozmere. Násobenie funkciou, ktorá je v nule nulová, teda δ-distribúciu „zabije“.

Druhou operáciou je **transformácia argumentov** $x \mapsto Ax + b$, kde A je regulárna matica $n \times n$ a b je konštantný vektor. S transformovanou distribúciou to bude trochu komplikovanejšie. Pozrime sa najprv na regulárnu distribúciu. Substitúciou $y = Ax + b$, teda $x = A^{-1}(y - b)$ a $d^n x = d^n y/|\det A|$, dostaneme

$$\int d^n x\, \Phi(Ax + b)\varphi(x) = \frac{1}{|\det A|} \int d^n y\, \Phi(y)\, \varphi(A^{-1}(y - b)) \;. \tag{4.39}$$

Ak teda chceme nájsť distribúciu, ktorá prislúcha funkcii Φ transformovanej cez A, b, musíme testovacie funkcie transformovať inverznou transformáciou a vynásobiť faktorom $1/|\det A|$. Túto definíciu potom prenesieme aj na singulárne distribúcie,

$$\big(f(Ax + b), \varphi\big) := \left(f, \frac{1}{|\det A|}\, \varphi(A^{-1}(x - b))\right) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D} \;. \tag{4.40}$$

Pre posunutie, teda $A = I$ a $b = -a$, dostaneme $\big(\delta(x - a), \varphi\big) = \big(\delta, \varphi(x + a)\big) = \varphi(a)$, a to je presne význam zápisu $\delta(x - a)$ z časti 4.1.4. Pre zmenu mierky, $A = \lambda I$ a $b = 0$, dostaneme $\big(\delta(\lambda x), \varphi\big) = \big(\delta, \varphi(x/\lambda)\big)/|\lambda|^n = \varphi(0)/|\lambda|^n$, teda

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|^n}\, \delta(x) \;. \tag{4.41}$$

V jednom rozmere je špeciálne $\delta(-x) = \delta(x)$. Z toho vidno aj to, že $\delta(x)$ má rozmer prevrátenej hodnoty rozmeru svojho argumentu, čo sa hodí pri kontrole rozmerov vo fyzikálnych vzťahoch.

Vo fyzike sa často stretneme aj so zápisom $\delta\big(g(x)\big)$, kde g je nelineárna funkcia, napríklad $\delta(E - E(p))$ alebo $\delta(p^2 - m^2)$. Nejde už o lineárnu transformáciu argumentu a výraz treba zadefinovať zvlášť. Nech je g hladká funkcia jednej premennej, ktorá má v každom ohraničenom intervale konečne veľa nulových bodov x_i a všetky sú jednoduché, teda $g(x_i) = 0$ a $g'(x_i) \neq 0$. Za $\delta\big(g(x)\big)$ zoberieme limitu funkcií $f_n\big(g(x)\big)$, kde f_n je δ-postupnosť (4.24). Pre veľké n je $f_n\big(g(x)\big)$ na nosiči testovacej funkcie nenulová iba v malých okoliach U_i bodov x_i, lebo mimo nich je tam $|g|$ zdola ohraničená kladným číslom. Na okolí U_i je g monotónna, takže môžeme substituovať $y = g(x)$, $dx = dy/|g'(x)|$, a dostaneme

$$\int_{U_i} dx\, f_n\big(g(x)\big)\varphi(x) = \int dy\, f_n(y)\, \frac{\varphi\big(x(y)\big)}{|g'\big(x(y)\big)|} \to \frac{\varphi(x_i)}{|g'(x_i)|}\ , \tag{4.42}$$

kde $x(y)$ je inverzná funkcia ku g na U_i. Preto

$$\delta\big(g(x)\big) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}\ . \tag{4.43}$$

Napríklad $\delta(x^2 - a^2) = \big[\delta(x-a) + \delta(x+a)\big]/(2|a|)$ pre $a \neq 0$. Pre lineárnu funkciu $g(x) = \lambda x$ dostaneme späť $\delta(\lambda x) = \delta(x)/|\lambda|$.

4.2.2 Derivácie distribúcií

Najdôležitejšou operáciou, s ktorou sa budeme stretávať, bude derivácia distribúcie. Derivovanie distribúcií budeme označovať D, derivovanie funkcií ∂. Pre funkcie a multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ máme

$$\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi \equiv \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \varphi\ . \tag{4.44}$$

Ak má funkcia Φ spojité derivácie až do rádu $|\alpha|$, môžeme ju derivovať klasicky. Integrovaním per partes dostaneme

$$\int d^n x\, \partial^\alpha \Phi(x)\, \varphi(x) = (-1)^{|\alpha|} \int d^n x\, \Phi(x)\, \partial^\alpha \varphi(x) = (-1)^{|\alpha|} (\Phi, \partial^\alpha \varphi)\ , \tag{4.45}$$

lebo φ má kompaktný nosič a hraničné členy vypadnú. Derivácii teda v recepte (4.35) zodpovedá $R = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha$. Podobne ako pri transformácii súradníc prenesieme túto definíciu na všetky distribúcie,

$$(D^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\ . \tag{4.46}$$

Keďže $\partial^\alpha \varphi$ je opäť testovacia funkcia, každá distribúcia má derivácie všetkých rádov. Pre funkcie so spojitými deriváciami sa distribučná derivácia zhoduje s obyčajnou. V jednom rozmere budeme deriváciu distribúcie písať aj s čiarkou, $f' = Df$.

Ako príklad zderivujme funkciu θ v jednom rozmere,

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int dx\, \theta(x)\varphi'(x) = -\int_0^\infty dx\, \varphi'(x) = -\,\varphi|_0^\infty = \varphi(0) = (\delta, \varphi)\ , \tag{4.47}$$

čím sme dostali

$$\theta' = \delta \tag{4.48}$$

v zmysle rovnosti distribúcií. Rozmyslite si, ako by tento výpočet vyzeral pomocou postupnosti spojitých funkcií, ktoré konvergujú k θ. Dobre si tiež premyslite, čo sme vlastne dostali. Ako funkcia nemá θ v bode 0 deriváciu, lebo je v ňom nespojitá. Ako distribúcia však deriváciu má a jej deriváciou je singulárna distribúcia δ. Počiatočná podmienka so skokom (3.95) z časti 3.3 je $\phi = 1 - \theta$, a teda jej derivácia je $-\delta$, ako sme tam tvrdili.

Príklad 29. Nájdite deriváciu funkcie $|x|$ ako distribúcie. □

Výsledok. $|x|' = 2\theta - 1$.

Podobne môžeme zderivovať lokálne integrovateľnú funkciu $\ln|x|$. Na polpriamkach $|x| > \varepsilon$ ju integrujeme per partes a dostaneme

$$((\ln|x|)', \varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} dx\, \ln|x|\, \varphi'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln\varepsilon\, (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \int_{|x|>\varepsilon} dx\, \frac{\varphi(x)}{x} \right] . \quad (4.49)$$

Prvý člen ide k nule, lebo $|\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)| \le 2\varepsilon \max|\varphi'|$ a $\varepsilon \ln\varepsilon \to 0$. Druhý je hlavná hodnota (4.30), takže

$$(\ln|x|)' = \mathrm{PV}\frac{1}{x} . \quad (4.50)$$

Hlavná hodnota je teda deriváciou lokálne integrovateľnej funkcie, rovnako ako mimo nuly je $1/x$ deriváciou funkcie $\ln|x|$.

Ďalším príkladom je derivácia δ-distribúcie,

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0) . \quad (4.51)$$

Derivácia δ-distribúcie teda naozaj zodpovedá vyčísleniu derivácie testovacej funkcie v nule, ako sme sľúbili v časti 4.1.4. Aj δ' má nosič v bode 0 a nie je ťažké rozmyslieť si, že každá vyššia derivácia, $(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$, a každá distribúcia v tvare

$$f = \sum_{k=0}^{m} c_k\, \delta^{(k)} \quad (4.52)$$

má nosič v bode 0.

Súvislosť medzi derivovaním δ-distribúcie a singulárnosťou zachytáva pojem rádu distribúcie. Distribúcii δ stačí poznať hodnotu testovacej funkcie, distribúcii $\delta^{(k)}$ jej k-tu deriváciu. Povieme, že distribúcia f má **rád** nanajvýš m, ak pre každú guľu $B(0,R)$ existuje konštanta C taká, že

$$|(f,\varphi)| \le C\,\|\varphi\|_m = C \sum_{|\alpha|\le m} \max_x |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\ ,\ \mathrm{supp}\,\varphi \subset B(0,R)\ , \quad (4.53)$$

s normami (4.5). Rádom distribúcie je najmenšie také m. Regulárne distribúcie a δ majú rád 0 (pre regulárne distribúcie to ukazuje odhad (4.12)), $\delta^{(k)}$ má rád k a $\mathrm{PV}\,1/x$ má podľa (4.31) rád nanajvýš 1. To, že rád $\delta^{(k)}$ nie je menší ako k, ukážu funkcie $\varphi(x) = \varepsilon^k \sigma(x/\varepsilon)$, kde σ je testovacia funkcia s $\sigma^{(k)}(0) = 1$. Pre ne je $(\delta^{(k)}, \varphi) = \pm 1$, kým $\|\varphi\|_{k-1} \to 0$ pre $\varepsilon \to 0$. Každá derivácia zvýši rád nanajvýš o jedna, lebo $(D^\alpha f, \varphi) = \pm(f, \partial^\alpha \varphi)$. Rád teda meria, koľko derivácií testovacej funkcie distribúcia

„potrebuje“, a v tomto zmysle aj to, aká je singulárna. Zo spojitosti sa dá ukázať, že na každej ohraničenej množine má každá distribúcia konečný rád, takže distribúcia s kompaktným nosičom má konečný rád. Na celom $\mathbb{R}^n$ to platiť nemusí. Napríklad $\sum_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}(x-k)$ je distribúcia, lebo na každú testovaciu funkciu pôsobí len konečne veľa členov, ale v okolí bodu k má rád k.

Platí aj opačné tvrdenie k tomu, čo sme povedali pod (4.52): každá distribúcia, ktorej nosičom je bod 0, sa dá zapísať v tvare (4.52), kde m je jej rád. Dôkaz v jednom rozmere naznačíme. Zvoľme testovaciu funkciu χ, ktorá je rovná jednej na intervale $[-1,1]$ a nulová mimo intervalu $(-2,2)$. Taká existuje, napríklad $\chi(x) = \int_{-3/2}^{3/2} dy\, \psi_2(x-y)$ s funkciou ψ_2 z (4.15) pre $n=1$. Pre $\varepsilon \in (0,1]$ označme $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$. Keďže nosičom f je bod 0 a funkcia $(1-\chi_\varepsilon)\varphi$ je nulová na okolí nuly, je $(f,\varphi) = (f, \chi_\varepsilon\varphi)$ pre každé ε. Testovaciu funkciu rozvinieme do Taylorovho radu,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \varphi^{(k)}(0)\, \frac{x^k}{k!} + r(x)\ , \tag{4.54}$$

kde pre zvyšok platí $|r^{(j)}(x)| \le C|x|^{m+1-j}$ pre $j \le m$. Potom

$$(f,\varphi) = \sum_{k=0}^{m} \varphi^{(k)}(0) \left(f, \chi\, \frac{x^k}{k!} \right) + (f, \chi_\varepsilon r)\ , \tag{4.55}$$

lebo pri polynomiálnych členoch môžeme χ_ε z rovnakého dôvodu nahradiť funkciou χ. Posledný člen odhadneme pomocou (4.53). Derivácia $(\chi_\varepsilon r)^{(j)}$ je súčtom členov úmerných $\varepsilon^{-i}\chi^{(i)}(x/\varepsilon)\, r^{(j-i)}(x)$, ktoré sú nenulové iba pre $|x| < 2\varepsilon$, a tam sú v absolútnej hodnote nanajvýš úmerné $\varepsilon^{-i}\varepsilon^{m+1-j+i} = \varepsilon^{m+1-j}$. Pre $j \le m$ teda $\|\chi_\varepsilon r\|_m \le C'\varepsilon \to 0$. Keďže $(f,\chi_\varepsilon r)$ od ε nezávisí, je nulový, a dostávame

$$(f,\varphi) = \sum_{k=0}^{m} c_k\, (-1)^k \varphi^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{m} c_k\, (\delta^{(k)}, \varphi)\ , \quad c_k = \frac{(-1)^k}{k!}\, (f, \chi\, x^k)\ . \tag{4.56}$$

Vo viacerých rozmeroch je postup rovnaký a dostaneme $f = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha D^\alpha \delta$.

Ako príklad nájdime všetky distribúcie v jednom rozmere, ktoré spĺňajú rovnicu $xf = 0$. Ak má φ nosič mimo nuly, je aj φ/x testovacia funkcia a $(f,\varphi) = (f, x\cdot\varphi/x) = (xf, \varphi/x) = 0$. Distribúcia f je teda nulová mimo nuly, jej nosičom je nanajvýš bod 0, a podľa práve ukázaného tvrdenia je $f = \sum_k c_k \delta^{(k)}$. Z pravidla pre deriváciu súčinu dostaneme $(x\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (x\varphi)^{(k)}(0) = (-1)^k k\, \varphi^{(k-1)}(0)$, teda

$$x\, \delta^{(k)} = -k\, \delta^{(k-1)}\ , \tag{4.57}$$

a špeciálne $x\delta' = -\delta$. Preto $xf = -\sum_{k\ge 1} k\, c_k \delta^{(k-1)}$, čo je nula len vtedy, keď $c_k = 0$ pre všetky $k \ge 1$. Rovnica $xf = 0$ má teda riešenia $f = C\delta$ a žiadne iné. Podobne rovnica $xf = 1$ má okrem riešenia $\mathrm{PV}\, 1/x$ (overte, že $x\cdot \mathrm{PV}\, 1/x = 1$) aj všetky riešenia $\mathrm{PV}\, 1/x + C\delta$. Deliť distribúciou x teda nemožno jednoznačne, výsledok je určený len až po násobok δ. S podobnou nejednoznačnosťou sa stretneme pri hľadaní Greenových funkcií pomocou Fourierovej transformácie v kapitole 5.

Teraz vidno aj ďalší dôvod, prečo súčin dvoch distribúcií nezavádzame. Keby sme vedeli násobiť ľubovoľné dve distribúcie tak, aby bol súčin asociatívny a komutatívny a pre hladké funkcie sa zhodoval s násobením z časti 4.2.1, dostali by sme

$$\delta = \left(\mathrm{PV}\frac{1}{x} \cdot x \right) \delta = \mathrm{PV}\frac{1}{x} \cdot (x\delta) = \mathrm{PV}\frac{1}{x} \cdot 0 = 0\ , \tag{4.58}$$

čo je spor.

Príklad 30. Nájdite deriváciu funkcie

$$\Phi(x) = \begin{cases} -x\ , & x < 0\ , \\ x+2\ , & x > 0 \end{cases} \tag{4.59}$$

ako distribúcie. □

Riešenie. Keď $\Phi(x)$ derivujeme ako funkciu, dostaneme

$$\Phi'(x) = \begin{cases} -1\ , & x < 0\ , \\ 1\ , & x > 0\ , \end{cases} \tag{4.60}$$

a v nule nedefinovanú hodnotu. To je to isté ako derivácia funkcie $|x|$. Tieto dve funkcie sú však niečo úplne iné a tento rozdiel zachytí distribučná derivácia. Pozrime sa na to poriadne. Integrovaním per partes na každej polpriamke zvlášť dostaneme

$$\begin{aligned} (D\Phi, \varphi) &= -(\Phi, \varphi') = -\int_{-\infty}^{0} dx\,(-x)\varphi' - \int_{0}^{\infty} dx\,(x+2)\varphi' \\ &= -\left[(-x)\varphi|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} dx\,\varphi\right] - \left[(x+2)\varphi|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} dx\,\varphi\right] \\ &= 2\varphi(0) + \int_{0}^{\infty} dx\,\varphi - \int_{-\infty}^{0} dx\,\varphi = (2\theta - 1 + 2\delta, \varphi)\ , \end{aligned} \tag{4.61}$$

teda $D\Phi = 2\theta - 1 + 2\delta$. Vidíme, že sme dostali časť $2\theta - 1$, čo je derivácia v obyčajnom zmysle, a k nej 2δ, čo zodpovedá skoku funkcie Φ v nule o 2. ■

Prítomnosť δ v derivácii funkcie ako distribúcie teda hovorí, že funkcia má v danom mieste skok, teda nespojitosť. Nie je ťažké rozmyslieť si nasledujúce tvrdenie. Majme funkciu f, ktorá má spojitú deriváciu všade okrem bodov x_i (v každom ohraničenom intervale nech je ich konečne veľa) a v bodoch x_i má f aj f' konečné jednostranné limity. Mimo bodov x_i má funkcia deriváciu f' v obyčajnom zmysle, ktorá v bodoch x_i môže byť nespojitá, ale to nevadí. Distribučná derivácia funkcie f je potom

$$Df = f' + \sum_i \left[f(x_i^+) - f(x_i^-)\right] \delta(x - x_i)\ , \tag{4.62}$$

kde $f(x_i^{\pm})$ sú jednostranné limity, takže hranatá zátvorka je skok funkcie f v bode x_i.

Príklad 31. Vyriešte rovnicu $f'' = 2\delta$ s podmienkou $f = 0$ na oblasti $\Omega = (-\infty, 0)$. □

Riešenie. Prvý spôsob. Mimo bodu 0 je to obyčajná rovnica $f'' = 0$, takže f je na každej polpriamke lineárna funkcia. Na $x < 0$ je podľa zadania $f = 0$ a na $x > 0$ je $f = Ax + B$. Funkcia f musí byť v nule spojitá, lebo inak by podľa (4.62) obsahovala f' člen úmerný δ a f'' člen úmerný δ', ktorý na pravej strane rovnice nie je. Preto $B = 0$. Derivácia f' má naopak v nule skok veľkosti 2, lebo f'' obsahuje 2δ. Keďže $f' = A$ pre $x > 0$ a $f' = 0$ pre $x < 0$, je $A = 2$ a riešením je

$$f(x) = \begin{cases} 2x\ , & x > 0\ , \\ 0\ , & x < 0\ , \end{cases} \tag{4.63}$$

teda $f(x) = 2x\,\theta(x)$.

Druhý spôsob. Keďže $\theta' = \delta$, môžeme rovnicu zapísať v tvare $(f' - 2\theta)' = 0$. Distribúcia s nulovou deriváciou je konštanta (to sa dá dokázať, my to využijeme bez dôkazu), takže $f' = 2\theta + C$ a z podmienky $f = 0$ pre $x < 0$ je $C = 0$. Rovnica $f' = 2\theta$ je už obyčajná rovnica, ktorú vieme integrovať ako pre funkcie, a dostaneme ten istý výsledok.

Ak x chápeme ako čas, je to pohybová rovnica telesa s jednotkovou hmotnosťou, ktoré stojí, a v čase 0 doň niekto kopne, teda naň krátko pôsobí sila s celkovým impulzom 2. Ako riešenie dostaneme rovnomerný priamočiary pohyb rýchlosťou 2, presne ako by sme čakali. Rozmyslite si, ako by to vyzeralo, keby sme δ na pravej strane aproximovali niektorou z δ-postupností z časti 4.1.4. ■

Príklad 32. Vyriešte rovnice $f'' + \omega^2 f = \delta$ a $f' + kf = \delta$ s podmienkou $f(x) = 0$ pre $x < 0$. □

Výsledok. $f(x) = \theta(x)\,\dfrac{\sin \omega x}{\omega}$ a $f(x) = \theta(x)\,e^{-kx}$.

Prvý výsledok má jednoduchý fyzikálny význam. Ak x opäť chápeme ako čas, δ na pravej strane spôsobí skok derivácie f' o jedna, podobne ako kopnutie v predchádzajúcom príklade. Pre $x > 0$ je to teda pohyb voľného oscilátora, ktorý v čase 0 prechádza rovnovážnou polohou jednotkovou rýchlosťou. Presne takýto pohyb sme stretli v časti 3.1.2 pri Duhamelovom princípe, kde sme riešenie vynúteného oscilátora poskladali z odoziev na krátke impulzy.

Tu sa dostávame k dôležitej myšlienke. Označme f_0 riešenie rovnice $f'' = \delta$, alebo všeobecnejšie rovnice $Lf = \delta$ s lineárnym diferenciálnym operátorom L s konštantnými koeficientmi. Keďže sú koeficienty konštantné, posunutá funkcia $f_0(x - x_n)$ rieši rovnicu s pravou stranou $\delta(x - x_n)$. Ak je pravá strana kombináciou $g = \sum_n c_n\,\delta(x - x_n)$, dostaneme z linearity riešenie rovnice $Lf = g$ v tvare $f = \sum_n c_n\,f_0(x - x_n)$. Ľubovoľnú pravú stranu si môžeme predstaviť ako „spojitú“ kombináciu δ-impulzov, $g(x) = \int dy\,g(y)\delta(x - y)$, a súčet potom prejde na integrál

$$f(x) = \int dy\,g(y) f_0(x - y)\ . \tag{4.64}$$

Ak teda poznáme odozvu na δ-impulz, vieme týmto integrálom dopočítať odozvu na ľubovoľný impulz g. Pre oscilátor s odozvou $f_0(t) = \theta(t)\sin(\omega t)/\omega$ a silou $g(\tau)$, ktorá pôsobí od času 0, dostaneme

$$q(t) = \int_0^t d\tau\,\frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega}\,g(\tau)\ , \tag{4.65}$$

teda presne vzorec z časti 3.1.2. Funkcia θ v f_0 obmedzí integráciu na časy $\tau < t$, odozva teda závisí len od síl, ktoré pôsobili v minulosti. Integrál (4.64) je konvolúciou funkcií f_0 a g, o ktorej budeme hovoriť v časti 4.2.4, a celú myšlienku rozpracujeme v časti 5.1 o Greenových funkciách.

V troch rozmeroch je najdôležitejšou takouto odozvou Coulombov potenciál. Z elektrodynamiky viete, že potenciál bodového náboja q je $q/(4\pi\varepsilon_0|x|)$ a že potenciál spĺňa Poissonovu rovnicu $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$. Hustota bodového náboja je $q\,\delta(x)$, takže by malo platiť

$$\nabla^2 \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta(x)\ . \tag{4.66}$$

Ukážme, že to naozaj platí v zmysle distribúcií. Funkcia $1/|x|$ je v $\mathbb{R}^3$ lokálne integrovateľná, lebo v sférických súradniciach je $d^3x = r^2 dr\,d\Omega$, a zadáva teda regulárnu distribúciu. Podľa definície (4.46)

(derivujeme dvakrát, takže znamienko sa nezmení) je

$$\left(\nabla^2 \frac{1}{|x|}, \varphi\right) = \left(\frac{1}{|x|}, \nabla^2\varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r>\varepsilon} d^3x\, \frac{\nabla^2\varphi}{r} \ , \quad r = |x| \ . \tag{4.67}$$

V oblasti $r > \varepsilon$ je funkcia $1/r$ hladká a platí v nej $\nabla^2(1/r) = 0$. Na integrál použijeme druhú Greenovu identitu

$$\int_V d^3x\, (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) = \oint_{\partial V} dS\, (u\,\partial_n v - v\,\partial_n u) \tag{4.68}$$

s $u = 1/r$ a $v = \varphi$ v oblasti $V = \{\varepsilon < r < R\}$, kde R zvolíme tak veľké, že φ je na sfére $r = R$ nulová aj s deriváciami. Ostane iba integrál cez sféru $r = \varepsilon$, na ktorej vonkajšia normála oblasti V smeruje do stredu, $\partial_n = -\partial_r$. Keďže $\partial_r(1/r) = -1/r^2$, dostaneme

$$\int_{r>\varepsilon} d^3x\, \frac{\nabla^2\varphi}{r} = -\frac{1}{\varepsilon}\oint_{r=\varepsilon} dS\,\partial_r\varphi - \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{r=\varepsilon} dS\,\varphi \ . \tag{4.69}$$

Prvý člen je v absolútnej hodnote nanajvýš $4\pi\varepsilon \max|\nabla\varphi|$ a ide k nule. V druhom je $\varepsilon^{-2}\oint dS\,\varphi$ rovné 4π-násobku priemernej hodnoty funkcie φ na sfére $r = \varepsilon$, ktorá pre $\varepsilon \to 0$ ide k $\varphi(0)$. Preto $(\nabla^2(1/|x|), \varphi) = -4\pi\varphi(0)$, a to je (4.66). Funkcia $-1/(4\pi|x|)$ je teda odozvou na δ-impulz pre operátor ∇^2 v troch rozmeroch a potenciál ľubovoľného rozloženia náboja,

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3y\, \frac{\rho(y)}{|x-y|} \ , \tag{4.70}$$

je presne integrál typu (4.64). V kapitolách 5 a 6 sa k tomuto výsledku vrátime.

Takto vieme pre ľubovoľný lineárny diferenciálny operátor

$$L = \sum_\alpha a_\alpha(x)\,\partial^\alpha \tag{4.71}$$

s koeficientmi $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ zadefinovať jeho pôsobenie na distribúcie, $Lf = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha f$, lebo derivovať distribúcie a násobiť ich hladkou funkciou už vieme. Z definícií násobenia a derivácie dostaneme

$$(Lf, \varphi) = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha(a_\alpha\varphi)) = (f, L^T\varphi) \ , \quad L^T\varphi = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha\varphi) \ . \tag{4.72}$$

Operátoru L^T hovoríme **formálne adjungovaný** operátor k L. Pre operátor s konštantnými koeficientmi, ktorý obsahuje iba derivácie párneho rádu, napríklad pre ∇^2 alebo pre vlnový operátor, je $L^T = L$. Rovnicu $Lu = f$ teraz môžeme riešiť v zmysle distribúcií. Distribúcia u je jej **zovšeobecneným riešením**, ak

$$(u, L^T\varphi) = (f, \varphi) \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D} \ . \tag{4.73}$$

Ak je u lokálne integrovateľná funkcia, je ľavá strana obyčajný integrál $\int d^nx\, u\, L^T\varphi$, v ktorom sa derivácie funkcie u vôbec nevyskytujú. Zovšeobecneným riešením teda môže byť aj funkcia, ktorá derivácie nemá.

Príkladom bude vlnová rovnica. Predtým sa však dohodnime na zjednodušení, ktoré budeme používať vo zvyšku textu. Vo vlnovej rovnici $u_{tt} - c^2u_{xx} = f$ budeme klásť $c = 1$. Nestratíme tým nič, ide

len o voľbu jednotiek času. Ak namiesto času t zavedieme premennú $\tau = ct$, je $u_t = c\,u_\tau$ a $u_{tt} = c^2 u_{\tau\tau}$, takže rovnica prejde na

$$u_{\tau\tau} - u_{xx} = \frac{f}{c^2}\ . \tag{4.74}$$

V premenných (x, τ) je teda rýchlosť šírenia vĺn rovná jednej, pravá strana sa vydelí c^2 a počiatočná rýchlosť $u_t(x,0) = \psi(x)$ prejde na $u_\tau(x,0) = \psi(x)/c$. Riešenie úlohy s $c = 1$ preto stačí na konci prepísať späť do premennej $t = \tau/c$. Rovnako budeme v rovnici vedenia tepla $u_t - k\,u_{xx} = f$ klásť $k = 1$. Substitúcia $\tau = kt$ ju prevedie na $u_\tau - u_{xx} = f/k$ a počiatočná podmienka sa nezmení.

Príklad 33. Ukážte, že funkcia $u(x,t) = g_1(x+t) + g_2(x-t)$, kde g_1 a g_2 sú ľubovoľné lokálne integrovateľné funkcie jednej premennej, je zovšeobecneným riešením vlnovej rovnice $u_{tt} - u_{xx} = 0$ v celej rovine (x,t). □

Riešenie. Vlnový operátor $L = \partial_t^2 - \partial_x^2$ má konštantné koeficienty a iba druhé derivácie, takže $L^T = L$. Máme teda ukázať, že

$$\int dx\,dt\,u(x,t)(\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) = 0 \tag{4.75}$$

pre každú testovaciu funkciu $\varphi(x,t)$. Stačí to ukázať pre člen $g_1(x+t)$, pre druhý je výpočet rovnaký. Prejdeme k premenným $\xi = x + t$ a $\eta = x - t$, teda k premenným (3.10) s $c = 1$. Podľa (3.12) je $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = -4\varphi_{\xi\eta}$ a jakobián transformácie je $|\partial(\xi,\eta)/\partial(x,t)| = 2$, takže $dx\,dt = d\xi\,d\eta/2$. Dostaneme

$$\int dx\,dt\,g_1(x+t)(\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) = -2\int d\xi\,g_1(\xi)\int d\eta\,\partial_\eta(\varphi_\xi) = 0\ , \tag{4.76}$$

lebo vnútorný integrál je integrálom derivácie funkcie s kompaktným nosičom.

V časti 3.1.2 sme vzťah (3.14) odvodili pre dvakrát spojite diferencovateľné funkcie g_1 a g_2. V zmysle distribúcií je to riešenie pre ľubovoľné lokálne integrovateľné funkcie. Napríklad riešenie so skokom (3.97) z časti 3.3 je teda pre $c = 1$ riešením vlnovej rovnice v zmysle distribúcií v celej rovine, aj na charakteristikách $x = \pm t$, na ktorých má skok. Ako sa v tomto jazyku zadávajú počiatočné podmienky, ukážeme v kapitole 5. ■

Na záver tejto časti spomeňme jedno tvrdenie, ktoré nebudeme dokazovať. Každú distribúciu $f \in \mathcal{D}'$ vieme na každej ohraničenej otvorenej množine zapísať ako $f = D^\alpha\Phi$ pre nejaký multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ a nejakú regulárnu distribúciu Φ, dokonca zadanú spojitou funkciou. Ak má f kompaktný nosič, platí to na celom $\mathbb{R}^n$. Distribúcie teda nie sú o nič horšie ako derivácie spojitých funkcií. Takýto zápis však nie je jednoznačný, napríklad

$$\delta = \theta' = \frac{1}{2}|x|''\ . \tag{4.77}$$

4.2.3 Tenzorový súčin distribúcií

Medzi distribúciami zavedieme operáciu súčinu, ale aby bolo jasné, že nejde o pobodový súčin, nazveme ju **tenzorový (priamy) súčin**. Majme dve distribúcie

$$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\ ,\quad g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)\ . \tag{4.78}$$

Ich testovacie funkcie sú funkciami premenných $x \in \mathbb{R}^n$, resp. $y \in \mathbb{R}^m$, a budeme to vyznačovať indexom, f_x a g_y. Novú distribúciu $f_x \otimes g_y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ zavedieme takto,

$$(f_x \otimes g_y, \varphi) := \Big(f_x, \big(g_y, \varphi(x,y)\big)\Big) \ , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \ . \tag{4.79}$$

Distribúcia g pôsobí na φ ako na funkciu premennej y pri pevnom x, výsledkom je funkcia premennej x a na tú pôsobí distribúcia f.

Na to treba v prvom rade ukázať, že to, na čo pôsobí f na pravej strane, je testovacia funkcia, teda že

$$\psi(x) \equiv \big(g_y, \varphi(x,y)\big) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ . \tag{4.80}$$

Ak je $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R) \subset \mathbb{R}^{n+m}$, je $\varphi(x,y) = 0$ pre $|x| > R$ a všetky y, a teda aj $\psi(x) = 0$ pre $|x| > R$. Funkcia ψ má teda kompaktný nosič. Ostáva ukázať, že má spojité derivácie všetkých rádov. Označme $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ jednotkový vektor v $\mathbb{R}^n$ a študujme výraz

$$\left(g_y, \frac{1}{\varepsilon}\left[\varphi(x+\varepsilon e_1, y) - \varphi(x,y)\right]\right) \ . \tag{4.81}$$

Funkcie v hranatej zátvorke ako funkcie premennej y konvergujú pre $\varepsilon \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ k funkcii $\partial_{x_1}\varphi(x,y)$, lebo φ je hladká funkcia s kompaktným nosičom. Zo spojitosti g preto tento výraz konverguje k $\big(g_y, \partial_{x_1}\varphi(x,y)\big)$. Na druhej strane z linearity g dostávame, že sa rovná

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\psi(x+\varepsilon e_1) - \psi(x)\right] \ , \tag{4.82}$$

čo je diferenčný podiel funkcie ψ. Derivácia $\partial_{x_1}\psi$ teda existuje a platí pre ňu

$$\partial_{x_1}\psi(x) = \big(g_y, \partial_{x_1}\varphi(x,y)\big) \ . \tag{4.83}$$

Rovnako dostaneme derivácie ľubovoľného rádu podľa ľubovoľných premenných a podobným argumentom aj ich spojitosť. Funkcia ψ má teda spojité derivácie všetkých rádov a je testovacou funkciou.

Treba ešte overiť, že výsledok nezávisí od poradia, v ktorom distribúcie pôsobia, teda že platí

$$\Big(f_x, \big(g_y, \varphi(x,y)\big)\Big) = \Big(g_y, \big(f_x, \varphi(x,y)\big)\Big) \ . \tag{4.84}$$

Dokázať to pre testovacie funkcie v tvare $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ je ľahké, obe strany sa rovnajú $(f,\varphi_1)(g,\varphi_2)$. Podľa vety, ktorú nebudeme dokazovať, sú lineárne kombinácie takýchto funkcií husté v priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, a z linearity a spojitosti oboch strán preto dostávame platnosť (4.84) pre všetky φ.

Pomocou tenzorového súčinu môžeme zadefinovať viacrozmernú δ-distribúciu ako súčin jednorozmerných,

$$\delta(x) = \delta(x_1) \otimes \delta(x_2) \otimes \ldots \otimes \delta(x_n) \ . \tag{4.85}$$

Tenzorový súčin je spojitý v každom z činiteľov, túto spojitosť zdedil zo spojitosti pôsobenia distribúcií na testovacie funkcie. Pre regulárne distribúcie dostaneme $(\Phi \otimes \Psi)(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$, takže tenzorový súčin je zovšeobecnením súčinu funkcií nezávislých premenných. Pobodový súčin $\Phi(x)\Psi(x)$ ním nie je a ten pre distribúcie zadefinovať nevieme.

Tenzorový súčin sa dá derivovať podľa premenných jedného z činiteľov a platí

$$D_x^\alpha(f \otimes g) = (D^\alpha f) \otimes g \ , \tag{4.86}$$

pričom α musí byť taký multiindex, aby derivovanie pôsobilo iba na prvých n zložkách $\mathbb{R}^{n+m}$.

4.2.4 Konvolúcia distribúcií

Ostáva nám zadefinovať konvolúciu distribúcií. Pôjde o operáciu, ktorá dvom distribúciám $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ priradí distribúciu

$$f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ . \tag{4.87}$$

Konvolúciu teda definujeme iba pre distribúcie, ktorých testovacie funkcie majú argument rovnakého rozmeru, a uvidíme, že ani pre ne nebude existovať vždy. Pre funkcie je konvolúcia definovaná vzťahom

$$(\varphi * \psi)(x) = \int d^n y\, \varphi(x-y)\psi(y) = \int d^n y\, \varphi(y)\psi(x-y) \ . \tag{4.88}$$

Pre regulárne distribúcie potom po substitúcii $x \to x+y$ dostaneme

$$(\Phi{*}\Psi, \varphi) = \int d^n x\, (\Phi{*}\Psi)(x)\, \varphi(x) = \int d^n x \int d^n y\, \Phi(x{-}y)\Psi(y)\, \varphi(x) = \int d^n x \int d^n y\, \Phi(x)\Psi(y)\, \varphi(x{+}y) \ . \tag{4.89}$$

Posledný výraz je pôsobenie tenzorového súčinu $\Phi \otimes \Psi$ na funkciu $\varphi(x+y)$. Pre všeobecné distribúcie preto definujeme

$$(f * g, \varphi) := \big(f_x \otimes g_y, \varphi(x+y)\big) \ . \tag{4.90}$$

V tejto definícii sme mierne zneužili zápis, lebo funkcia φ na ľavej a pravej strane je čosi trochu iné. Na ľavej strane je to funkcia jedného argumentu, $\varphi(x)$. Na pravej strane je to funkcia dvoch argumentov x, y, ktorú chápeme ako $\bar\varphi(x,y) = \varphi(x+y)$, čo má dobrý zmysel, lebo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Komutatívnosť konvolúcie, $f{*}g = g{*}f$, plynie z (4.84), lebo $\varphi(x{+}y)$ sa pri výmene x a y nezmení. Problémom definície (4.90) je, že funkcia $\bar\varphi(x,y) = \varphi(x+y)$ nie je testovacou funkciou z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Je konštantná pozdĺž rovín $x + y =$ konšt., takže jej nosič je neohraničený (pre $n = 1$ je to pás medzi dvoma rovnobežnými priamkami), a preto nie je kompaktný. Existenciu výrazov v definícii budú teda musieť zabezpečiť distribúcie f a g svojimi nosičmi. Nasledujúca podmienka sa dá zjemniť, my však zatiaľ budeme požadovať, aby aspoň jedna z distribúcií f, g mala kompaktný nosič[10]. Zo spojitosti tenzorového súčinu potom plynie spojitosť konvolúcie v každom z činiteľov, treba však dávať pozor, aby distribúcie s kompaktným nosičom mali nosiče v jednej spoločnej ohraničenej množine.

Podmienka kompaktného nosiča je zbytočne silná a v kapitole 5 nebude stačiť. Výrazy v (4.90) majú zmysel vždy, keď je pre každú ohraničenú množinu B ohraničená aj množina tých dvojíc (x,y), pre ktoré je $x \in \operatorname{supp} f$, $y \in \operatorname{supp} g$ a $x + y \in B$. Vtedy totiž funkciu $\varphi(x+y)$ môžeme na okolí nosiča $f \otimes g$ nahradiť testovacou funkciou rovnako ako v poznámke pod čiarou. Dôležitým prípadom sú distribúcie v jednom rozmere, ktoré majú obe nosič v polpriamke $[0, \infty)$. Ak $x, y \geq 0$ a $x + y \leq R$, sú aj x a y nanajvýš R. Takú konvolúciu dostaneme napríklad pre funkcie času, ktoré sú nulové pred začiatkom deja, ako pri vynútenom oscilátore v časti 4.2.2. Napríklad

$$(\theta * \theta)(x) = \int dy\, \theta(x-y)\theta(y) = x\, \theta(x) \ , \tag{4.91}$$

hoci ani jedna z funkcií nemá kompaktný nosič. Pre funkcie konvolúcia existuje aj vtedy, keď jedna z nich v nekonečne dostatočne rýchlo klesá a druhá nerastie príliš rýchlo, ako pri Poissonovom vzorci

[10] Presnejšie: ak má kompaktný nosič distribúcia g, zvolíme funkciu $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ktorá je rovná jednej na nejakom okolí nosiča g, a definujeme $(f * g, \varphi) := \big(f_x \otimes g_y, \eta(y)\varphi(x+y)\big)$. Funkcia $\eta(y)\varphi(x+y)$ už je testovacou funkciou z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ a výsledok od voľby η nezávisí. Ak má kompaktný nosič f, postupujeme rovnako.

(3.84), kde konvolvujeme rýchlo klesajúcu gaussovskú funkciu s ohraničenou počiatočnou podmienkou. S oboma situáciami sa stretneme v kapitole 5.

Ako príklad ukážeme, že $\delta * f = f$ pre každú distribúciu f,

$$(\delta * f, \varphi) = (\delta_x \otimes f_y, \varphi(x+y)) = \Big(f_y, (\delta_x, \varphi(x+y))\Big) = (f_y, \varphi(y)) = (f, \varphi) \ . \tag{4.92}$$

Distribúcia δ je teda jednotkovým prvkom konvolúcie. Ďalej platí (dokážte!)

$$(f * g)' = f' * g = f * g' \ , \tag{4.93}$$

a teda derivovanie konvolúcie sa nespráva podľa Leibnizovho pravidla, deriváciu stačí preniesť na jeden z činiteľov. Z toho dostávame

$$f' = \delta * f' = (\delta * f)' = \delta' * f \ , \tag{4.94}$$

takže derivovanie distribúcie je konvolúcia s δ'.

Na rozdiel od konvolúcie funkcií nemusí byť konvolúcia distribúcií asociatívna, aj keď majú zmysel všetky konvolúcie, ktoré v nej vystupujú. Ak 1 označuje konštantnú funkciu, je

$$(1 * \delta') * \theta = 1' * \theta = 0 * \theta = 0 \ , \qquad 1 * (\delta' * \theta) = 1 * \theta' = 1 * \delta = 1 \ . \tag{4.95}$$

Asociativita platí, ak majú aspoň dve z troch distribúcií kompaktný nosič alebo ak majú v jednom rozmere všetky tri nosič v polpriamke $[0, \infty)$.

Na tomto mieste môžeme ukázať, že distribúcia ako lineárny funkcionál dáva postupnosť regulárnych distribúcií, ktorá k nej konverguje. To je druhý smer ekvivalencie definícií z časti 4.1.3. Zoberme δ-postupnosť ψ_k z (4.15). Funkcie ψ_k sú testovacie, nezáporné, majú integrál rovný jednej a nosič v guli $B(0, 1/k)$. Zo spojitosti konvolúcie potom pre $f \in \mathcal{D}'$ dostávame

$$\lim_{k\to\infty} (\psi_k * f) = \delta * f = f \ , \tag{4.96}$$

a teda máme f vyjadrenú ako limitu postupnosti $\psi_k * f$. Ostáva zistiť, čo sú to za objekty. Keďže ψ_k má kompaktný nosič, je

$$\begin{aligned}(\psi_k * f, \varphi) &= \Big(f_x, (\psi_k(y), \varphi(x+y))\Big) = \left(f_x, \int d^n y\, \psi_k(y)\, \varphi(x+y)\right) = \left(f_x, \int d^n y\, \psi_k(y-x)\, \varphi(y)\right) \\ &= \int d^n y\, \big(f_x, \psi_k(y-x)\big)\, \varphi(y) \ ,\end{aligned} \tag{4.97}$$

kde sme v poslednom kroku využili linearitu a spojitosť f (integrál možno aproximovať riemannovskými súčtami). Distribúcia $\psi_k * f$ je teda regulárna a zadáva ju funkcia

$$f_k(y) = \big(f_x, \psi_k(y-x)\big) \ , \tag{4.98}$$

ktorá má, rovnako ako funkcia ψ pri tenzorovom súčine, spojité derivácie všetkých rádov. Každú distribúciu sme teda zapísali ako limitu postupnosti regulárnych distribúcií zadaných hladkými funkciami. Ak má f kompaktný nosič, majú ho aj funkcie f_k, ktoré sú potom priamo testovacími funkciami z $\mathcal{D}$. Vo všeobecnosti funkcie f_k kompaktný nosič mať nemusia, stačí ich však vynásobiť testovacími funkciami, ktoré sú rovné jednej na čoraz väčších guliach.

4.3 Temperované distribúcie a Fourierova transformácia

4.3.1 Priestor testovacích funkcií $\mathcal{S}$

Distribúcie z $\mathcal{D}'$ už vieme derivovať. Pri rovniciach s konštantnými koeficientmi je však kľúčovým nástrojom Fourierova transformácia, ktorá podľa časti 3.2 premení derivovanie na násobenie. Fourierovu transformáciu distribúcie by sme radi zadefinovali podľa receptu (4.35), teda tak, že ju prenesieme na testovaciu funkciu. Na to by Fourierova transformácia testovacej funkcie musela byť opäť testovacou funkciou, a to pre priestor $\mathcal{D}$ neplatí. Fourierova transformácia funkcie s kompaktným nosičom sa dá rozšíriť na analytickú funkciu komplexnej premennej, a preto podľa časti 4.1.1 nemôže mať kompaktný nosič, ak nie je nulová. Chceli by sme sa preto oslobodiť od kompaktnosti nosičov a pracovať s funkciami definovanými na celom $\mathbb{R}^n$. Na druhej strane stále chceme, aby boli integrály, ktoré budeme potrebovať, konečné. Preto pozmeníme priestor testovacích funkcií.

Schwartzov priestor testovacích funkcií $\mathcal{S}$ tvoria funkcie $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pre ktoré platí

$$x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \to 0 \quad \text{pre } |x| \to \infty \ , \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \ , \tag{4.99}$$

kde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ako v časti 4.1.1. Ide teda o funkcie, ktoré v nekonečne idú k nule spolu so všetkými deriváciami rýchlejšie ako ľubovoľná záporná mocnina $|x|$. Rovnakú podmienku môžeme sformulovať aj takto:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m \left| \partial^\beta \varphi(x) \right| < \infty \quad \forall\, m \in \mathbb{N}_0 \ , \ \beta \in \mathbb{N}_0^n \ . \tag{4.100}$$

Obe formulácie sú ekvivalentné, lebo $(1 + |x|)^m$ sa dá zhora odhadnúť súčtom výrazov $|x^\alpha|$ s $|\alpha| \leq m$ a naopak. Navyše z ohraničenosti pre $m + 1$ vyplýva, že pre m ide výraz v nekonečne k nule. Testovacími funkciami z $\mathcal{S}$ sú napríklad funkcie $e^{-k|x|^2}$ s $k > 0$ vynásobené ľubovoľným polynómom a, samozrejme, všetky funkcie z $\mathcal{D}$. Naopak funkcia $e^{-|x|}$ do $\mathcal{S}$ nepatrí, lebo nie je v nule hladká, a funkcia $1/(1 + |x|^2)$ tiež nie, lebo v nekonečne klesá len ako mocnina. Fourierova transformácia reálnej funkcie je vo všeobecnosti komplexná, preto odteraz pripúšťame aj testovacie funkcie s komplexnými hodnotami.

Konvergenciu v priestore $\mathcal{S}$ zadefinujeme takto:

$$\varphi_k \to \varphi \quad \Leftrightarrow \quad x^\alpha \partial^\beta \varphi_k \rightrightarrows x^\alpha \partial^\beta \varphi \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \ . \tag{4.101}$$

Funkcie φ_k teda konvergujú k funkcii φ rovnomerne spolu so všetkými deriváciami, a to aj po vynásobení ľubovoľným polynómom. Ak postupnosť konverguje v $\mathcal{D}$, konverguje aj v $\mathcal{S}$, lebo jej nosiče ležia v spoločnej guli a polynóm je na nej ohraničený.

Temperované distribúcie $\mathcal{S}'$ sú potom lineárne spojité funkcionály na tomto priestore,

$$f : \mathcal{S} \to \mathbb{C} \ , \quad \varphi \mapsto (f, \varphi) \ , \qquad \varphi_k \to \varphi \ \Rightarrow \ (f, \varphi_k) \to (f, \varphi) \ . \tag{4.102}$$

Každá temperovaná distribúcia je aj distribúciou z $\mathcal{D}'$. Stačí ju použiť len na testovacie funkcie z $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ a spojitosť sa zachová, lebo konvergencia v $\mathcal{D}$ znamená aj konvergenciu v $\mathcal{S}$. Dá sa ukázať, že $\mathcal{D}$ je v $\mathcal{S}$ hustý, takže temperovaná distribúcia je hodnotami na $\mathcal{D}$ určená jednoznačne a $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Opačne to neplatí. Funkcia e^x na priamke zadáva distribúciu z $\mathcal{D}'$, ale nie z $\mathcal{S}'$, lebo integrál $\int dx\, e^x \varphi(x)$ diverguje napríklad pre $\varphi(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}} \in \mathcal{S}$. Temperované sú naopak všetky distribúcie s kompaktným nosičom, napríklad δ a jej derivácie, a tiež hlavná hodnota $\mathrm{PV}\, 1/x$. Všetko ostatné (rovnosť, nosič, slabú konvergenciu a operácie) definujeme rovnako ako v $\mathcal{D}'$. Treba len dať pozor, aby výsledok operácie s testovacou funkciou patril do $\mathcal{S}$. Napríklad násobiť temperovanú distribúciu môžeme polynómom, alebo všeobecnejšie hladkou funkciou, ktorá aj so všetkými deriváciami rastie v nekonečne nanajvýš polynomiálne, ale nie napríklad funkciou $e^{|x|^2}$.

Malá zmena nastane pri regulárnych distribúciách. Okrem lokálnej integrovateľnosti budeme od funkcie Φ požadovať, aby v nekonečne rástla nanajvýš polynomiálne, teda aby existovali konštanty c a m také, že

$$|\Phi(x)| \leq c\,(1+|x|)^m \ . \tag{4.103}$$

To zaručuje existenciu integrálov typu $\int d^n x\, \Phi\varphi$ pre všetky $\varphi \in \mathcal{S}$ aj spojitosť príslušného funkcionálu, lebo

$$\left| \int d^n x\, \Phi(x)\varphi(x) \right| \leq c \sup_x \left[(1+|x|)^{m+n+1} |\varphi(x)| \right] \int \frac{d^n x}{(1+|x|)^{n+1}} \ , \tag{4.104}$$

pričom posledný integrál je konečný a supremum ide k nule, ak $\varphi \to 0$ v $\mathcal{S}$. Temperovanými regulárnymi distribúciami sú teda napríklad polynómy, funkcia θ a všetky ohraničené lokálne integrovateľné funkcie.

4.3.2 Fourierova transformácia na $\mathcal{S}$

Máme pripravené všetko na to, aby sme zadefinovali pre nás kľúčový objekt, Fourierovu transformáciu distribúcie. Najprv si však celkom zoširoka pripomeňme, ako to funguje pre obyčajné funkcie $\varphi \in \mathcal{S}$. Fourierova transformácia je zobrazenie

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \ , \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n x\, e^{i\xi\cdot x} \varphi(x) \ , \quad \xi \cdot x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \ . \tag{4.105}$$

Normovanie aj znamienko v exponente sú rovnaké ako v časti 3.2, rovnica (3.79). V literatúre sa používajú aj iné konvencie (iné znamienko v exponente, iný faktor pred integrálom alebo 2π v exponente), a pri porovnávaní vzorcov z rôznych zdrojov treba na to dávať pozor.

Dve kľúčové vlastnosti takto definovanej transformácie sú

$$\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi] = \mathcal{F}\big[(ix)^\alpha \varphi\big] \ , \qquad \mathcal{F}[\partial^\alpha \varphi] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[\varphi] \ . \tag{4.106}$$

Prvú dostaneme derivovaním pod integrálom, čo môžeme urobiť, lebo $x^\alpha\varphi$ je integrovateľná. Druhú dostaneme integrovaním per partes, pri ktorom hraničné členy vypadnú, lebo φ v nekonečne rýchlo klesá. Derivovanie teda prejde na násobenie a naopak, presne ako sme to využili v časti 3.2.

Pomocou týchto dvoch vlastností ukážeme, že zobrazenie (4.105) naozaj zobrazuje $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}$. Najprv si všimnime, že podmienku (4.99) stačí overiť v slabšej podobe: hladká funkcia φ patrí do $\mathcal{S}$ práve vtedy, keď sú všetky funkcie $x^\alpha \partial^\beta \varphi$ ohraničené. Ak je totiž ohraničená aj funkcia $(1+|x|^2)\, x^\alpha \partial^\beta \varphi$, ktorá je súčtom takých funkcií, je $|x^\alpha \partial^\beta \varphi| \leq C/(1+|x|^2) \to 0$. Funkcia $\mathcal{F}[\varphi]$ je hladká, lebo ju môžeme derivovať pod integrálom, a podľa (4.106) je

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}[\varphi] = \xi^\alpha \mathcal{F}\big[(ix)^\beta \varphi\big] = i^{|\alpha|}\, \mathcal{F}\Big[\partial^\alpha \big((ix)^\beta \varphi\big)\Big] \ , \tag{4.107}$$

kde sme v druhom kroku použili druhú vlastnosť v tvare $\xi^\alpha \mathcal{F}[\psi] = i^{|\alpha|}\mathcal{F}[\partial^\alpha \psi]$. Absolútnu hodnotu Fourierovej transformácie môžeme odhadnúť integrálom absolútnej hodnoty funkcie, takže

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}[\varphi](\xi)\right| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n x \, \left|\partial^\alpha (x^\beta \varphi(x))\right| \ . \tag{4.108}$$

Podľa Leibnizovho pravidla je $\partial^\alpha(x^\beta\varphi)$ súčtom funkcií tvaru $x^\gamma \partial^\delta \varphi$, ktoré patria do $\mathcal{S}$, a sú teda integrovateľné. Pravá strana je preto konečná a nezávisí od ξ. Všetky funkcie $\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}[\varphi]$ sú teda ohraničené a $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$.

Podobne overíme, že zobrazenie (4.105) je spojité. Keďže je lineárne, stačí uvažovať postupnosti $\varphi_k \to 0$. Pre inú postupnosť $\varphi_k \to \varphi$ by sme študovali postupnosť $\varphi_k - \varphi$. Integrál na pravej strane (4.108) odhadneme ako

$$\int d^n x \, |g(x)| \le \sup_x \left[(1+|x|^2)^n |g(x)|\right] \int \frac{d^n x}{(1+|x|^2)^n} \ , \tag{4.109}$$

kde posledný integrál je konečný. Pre $g = \partial^\alpha(x^\beta \varphi_k)$ ide supremum k nule, lebo $(1+|x|^2)^n g$ je súčtom výrazov tvaru $x^\gamma \partial^\delta \varphi_k$, ktoré podľa definície konvergencie v $\mathcal{S}$ idú rovnomerne k nule. Preto $\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}[\varphi_k] \rightrightarrows 0$ pre všetky α, β, a to je presne konvergencia $\mathcal{F}[\varphi_k] \to 0$ v $\mathcal{S}$.

Ďalej ukážeme, že inverzná transformácia k (4.105) je

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \ , \quad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n \xi \, e^{-i\xi\cdot x} \psi(\xi) \ . \tag{4.110}$$

Keďže $\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \mathcal{F}[\psi](-x)$, aj toto zobrazenie zobrazuje $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}$ a je spojité. Treba overiť, že $\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[\varphi]\big] = \varphi$. Po dosadení $\mathcal{F}[\varphi]$ dostaneme integrál typu $\int d^n\xi \, e^{i\xi\cdot(y-x)}$, ktorý zatiaľ nemá zmysel, a musíme ho technicky obísť. Keďže $\mathcal{F}[\varphi]$ je integrovateľná, môžeme do integrálu dopísať faktor $e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/2}$ a na konci urobiť limitu $\varepsilon \to 0$,

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[\varphi]\big](x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n\xi \, e^{-i\xi\cdot x - \frac{1}{2}\varepsilon^2|\xi|^2} \int d^n y \, e^{i\xi\cdot y}\varphi(y) \ . \tag{4.111}$$

Teraz už dvojný integrál konverguje absolútne a môžeme zameniť poradie integrácie. Integrál cez ξ je gaussovský. Doplnením exponentu na štvorec a posunutím integračnej premennej v komplexnej rovine ako v časti 3.2 dostaneme

$$\int d^n\xi \, e^{i\xi\cdot(y-x) - \frac{1}{2}\varepsilon^2|\xi|^2} = \left(\frac{2\pi}{\varepsilon^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{|y-x|^2}{2\varepsilon^2}} \ , \tag{4.112}$$

a teda

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[\varphi]\big](x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int d^n y \, \frac{1}{(2\pi\varepsilon^2)^{n/2}} \, e^{-\frac{|y-x|^2}{2\varepsilon^2}} \varphi(y) = \varphi(x) \ . \tag{4.113}$$

Gaussovské funkcie v integrande totiž tvoria δ-postupnosť, v jednom rozmere je to postupnosť g_t z (4.25) s $t = 2\varepsilon^2$. Rovnako sa ukáže, že $\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\psi]\big] = \psi$. Fourierova transformácia je teda vzájomne jednoznačné spojité zobrazenie priestoru $\mathcal{S}$ na seba.

Pre dve funkcie $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ platí

$$\mathcal{F}[\varphi_1 * \varphi_2] = (2\pi)^{n/2} \, \mathcal{F}[\varphi_1]\, \mathcal{F}[\varphi_2] \ , \qquad \mathcal{F}[\varphi_1\varphi_2] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \, \mathcal{F}[\varphi_1] * \mathcal{F}[\varphi_2] \ . \tag{4.114}$$

Prvý vzťah dostaneme priamym výpočtom so substitúciou $z = x - y$,

$$\mathcal{F}[\varphi_1 * \varphi_2](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n x \int d^n y\, e^{i\xi\cdot x} \varphi_1(x-y)\varphi_2(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n z\, e^{i\xi\cdot z} \varphi_1(z) \int d^n y\, e^{i\xi\cdot y} \varphi_2(y) \ , \tag{4.115}$$

druhý podobne, keď funkciu φ_1 zapíšeme pomocou inverznej transformácie (4.110).

Ďalšou užitočnou vlastnosťou je, že v integráli súčinu dvoch funkcií môžeme Fourierovu transformáciu preniesť z jednej funkcie na druhú. Pre $f, \varphi \in \mathcal{S}$ zámenou poradia integrácie dostaneme

$$\int d^n \xi\, \mathcal{F}[f](\xi)\, \varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n \xi \int d^n x\, e^{i\xi\cdot x} f(x) \varphi(\xi) = \int d^n x\, f(x)\, \mathcal{F}[\varphi](x) \ . \tag{4.116}$$

Odtiaľ vyplýva **Parsevalova rovnosť**. Komplexným združením sa zmení znamienko v exponente, takže $\overline{\mathcal{F}[\psi]} = \mathcal{F}^{-1}[\bar\psi]$. Ak v (4.116) zvolíme $\varphi = \overline{\mathcal{F}[\psi]} = \mathcal{F}^{-1}[\bar\psi]$, je $\mathcal{F}[\varphi] = \bar\psi$ a dostaneme

$$\int d^n \xi\, \mathcal{F}[f](\xi)\, \overline{\mathcal{F}[\psi](\xi)} = \int d^n x\, f(x)\, \overline{\psi(x)} \ , \qquad \int d^n \xi\, |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 = \int d^n x\, |f(x)|^2 \ . \tag{4.117}$$

Fourierova transformácia teda zachováva skalárny súčin $\int d^n x\, f\bar\psi$ aj normu v priestore $L^2(\mathbb{R}^n)$ kvadraticky integrovateľných funkcií. Keďže $\mathcal{S}$ je v $L^2(\mathbb{R}^n)$ hustý, dá sa $\mathcal{F}$ rozšíriť na celý priestor $L^2(\mathbb{R}^n)$ a je na ňom unitárnym operátorom (Plancherelova veta, ktorú nebudeme dokazovať). Práve tu sa vypláca normovanie $(2\pi)^{-n/2}$, pri inom normovaní by sa v (4.117) objavila konštanta. Z kvantovej mechaniky poznáte vlnovú funkciu v impulzovej reprezentácii. Až na znamienko v exponente a premennú $p = \hbar\xi$ je to Fourierova transformácia vlnovej funkcie v súradnicovej reprezentácii a Parsevalova rovnosť hovorí, že celková pravdepodobnosť je v oboch reprezentáciách rovnaká.

4.3.3 Fourierova transformácia distribúcií z $\mathcal{S}'$

A teraz konečne **Fourierova transformácia distribúcií** z $\mathcal{S}'$. Postupujeme podľa receptu z časti 4.2.1. Podľa (4.116) je pre funkciu $f \in \mathcal{S}$ vzťah $(\mathcal{F}[f], \varphi) = (f, \mathcal{F}[\varphi])$. Fourierovu transformáciu teda prenesieme na testovaciu funkciu a pre ľubovoľnú temperovanú distribúciu definujeme

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}' \ , \quad (\mathcal{F}[f], \varphi) := (f, \mathcal{F}[\varphi]) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S} \ . \tag{4.118}$$

Práve preto sme potrebovali, aby $\mathcal{F}$ zobrazovala $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}$. Takto zadefinovaný funkcionál $\mathcal{F}[f]$ je lineárny vďaka linearite Fourierovej transformácie na $\mathcal{S}$ a je aj spojitý vďaka jej spojitosti na $\mathcal{S}$,

$$(\mathcal{F}[f], \varphi_k) = (f, \mathcal{F}[\varphi_k]) \to (f, \mathcal{F}[\varphi]) = (\mathcal{F}[f], \varphi) \ . \tag{4.119}$$

Inverzná transformácia je potom

$$(\mathcal{F}^{-1}[f], \varphi) := (f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi]) \ , \tag{4.120}$$

a naozaj $(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]], \varphi) = (\mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi]) = (f, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]]) = (f, \varphi)$. Podľa časti 4.2.1 je Fourierova transformácia na $\mathcal{S}'$ spojitá aj vzhľadom na slabú konvergenciu, takže ju môžeme zamieňať s limitou.

Pre takto definovanú Fourierovu transformáciu distribúcií platia rovnaké vzťahy ako (4.106) pre obyčajnú transformáciu,

$$D^\alpha \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\big[(ix)^\alpha f\big] \ , \qquad \mathcal{F}[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f] \ . \tag{4.121}$$

Prvý dokážeme takto:

$$(D^\alpha \mathcal{F}[f],\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\mathcal{F}[f],\partial^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f,\mathcal{F}[\partial^\alpha\varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(f,(-ix)^\alpha\mathcal{F}[\varphi])$$
$$= ((ix)^\alpha f,\mathcal{F}[\varphi]) = (\mathcal{F}[(ix)^\alpha f],\varphi)\ . \tag{4.122}$$

Druhý podobne,

$$(\mathcal{F}[D^\alpha f],\varphi) = (D^\alpha f,\mathcal{F}[\varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(f,\partial^\alpha\mathcal{F}[\varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(f,\mathcal{F}[(i\xi)^\alpha\varphi])$$
$$= (-1)^{|\alpha|}(\mathcal{F}[f],(i\xi)^\alpha\varphi) = ((-i\xi)^\alpha\mathcal{F}[f],\varphi)\ . \tag{4.123}$$

Podobne sa pri Fourierovej transformácii správajú aj ďalšie jednoduché operácie. Pre temperovanú distribúciu f, vektor $a\in\mathbb{R}^n$ a číslo $\lambda\neq 0$ platí

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{i\xi\cdot a}\,\mathcal{F}[f]\ , \tag{4.124}$$
$$\mathcal{F}[e^{ia\cdot x}f] = \mathcal{F}[f](\xi+a)\ , \tag{4.125}$$
$$\mathcal{F}[f(\lambda x)] = \frac{1}{|\lambda|^n}\,\mathcal{F}[f]\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\ , \tag{4.126}$$
$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] = f(-x)\ . \tag{4.127}$$

Pre funkcie z $\mathcal{S}$ dostaneme prvé tri vzťahy jednoduchou substitúciou v integráli (4.105) a posledný z toho, že $\mathcal{F}[\psi](x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](-x)$. Pre distribúcie ich dokážeme prenesením na testovaciu funkciu. Napríklad pre posunutie je $\mathcal{F}[\varphi](x+a) = \mathcal{F}[e^{i\xi\cdot a}\varphi](x)$, a teda

$$(\mathcal{F}[f(x-a)],\varphi) = (f(x-a),\mathcal{F}[\varphi]) = (f,\mathcal{F}[\varphi](x+a)) = (f,\mathcal{F}[e^{i\xi\cdot a}\varphi]) = (e^{i\xi\cdot a}\mathcal{F}[f],\varphi)\ . \tag{4.128}$$

Ostatné vzťahy si overte sami. Posunutie sa teda vo Fourierovom obraze prejaví len fázovým faktorom a naopak. Zo vzťahu (4.126) vidno, že čím je funkcia užšia, tým je jej Fourierova transformácia širšia. Kvantitatívne to vyjadríme v časti 4.3.4. Zo vzťahu (4.127) plynie, že štvornásobná Fourierova transformácia je identita.

S dôkazom posledného tvrdenia,

$$\mathcal{F}[f*g] = (2\pi)^{n/2}\,\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]\ , \tag{4.129}$$

bude trochu práce, lebo si treba rozmyslieť, čo je vlastne objekt na pravej strane. Súčin dvoch distribúcií vo všeobecnosti nemá zmysel. Vzťah bude mať zmysel, ak jedna z Fourierových transformácií je hladká funkcia, ktorou vieme temperovanú distribúciu vynásobiť. Ukážeme, že je to tak, ak $f\in\mathcal{S}'$ a distribúcia g má kompaktný nosič. Najprv nájdime $\mathcal{F}[g]$. Pre $\varphi\in\mathcal{S}$ je

$$(\mathcal{F}[g],\varphi) = (g,\mathcal{F}[\varphi]) = \left(g_y,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int d^n\xi\,e^{i\xi\cdot y}\varphi(\xi)\right) = \int d^n\xi\,\varphi(\xi)\,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(g_y,e^{i\xi\cdot y})\ , \tag{4.130}$$

kde sme zamenili pôsobenie g s integrálom ako na konci časti 4.2.4. Funkcia $e^{i\xi\cdot y}$ síce nie je testovacia, ale keďže g má kompaktný nosič, môžeme ju vynásobiť funkciou z $\mathcal{D}$, ktorá je rovná jednej na okolí nosiča g, a výraz má zmysel. Fourierova transformácia distribúcie s kompaktným nosičom je teda regulárna distribúcia zadaná funkciou

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(g_y,e^{i\xi\cdot y})\ , \tag{4.131}$$

čo je priame zovšeobecnenie definície (4.105). Dá sa ukázať, že je to hladká funkcia, ktorá aj so všetkými deriváciami rastie nanajvýš polynomiálne, a takouto funkciou môžeme temperovanú distribúciu vynásobiť. Ostáva zopakovať výpočet z definície konvolúcie,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}[f*g],\varphi) = (f*g,\mathcal{F}[\varphi]) = \Big(f_x,(g_y,\mathcal{F}[\varphi](x+y))\Big) = \left(f_x,\left(g_y,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int d^n\xi\, e^{i\xi\cdot(x+y)}\varphi(\xi)\right)\right)\\ = \left(f_x,\int d^n\xi\, e^{i\xi\cdot x}\,\mathcal{F}[g](\xi)\,\varphi(\xi)\right) = (2\pi)^{n/2}(f,\mathcal{F}[\mathcal{F}[g]\varphi]) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}[f],\mathcal{F}[g]\varphi)\ ,\end{aligned} \tag{4.132}$$

a to je (4.129).

Podmienka kompaktného nosiča je však opäť zbytočne silná a pre kapitolu 5 nestačí. Tam budeme Fourierovu transformáciu robiť v priestorových premenných a riešenie bude konvolúciou počiatočnej podmienky s Greenovou funkciou. Pri rovnici vedenia tepla je Greenova funkcia pre každé $t > 0$ gaussovská funkcia premennej x, ako sme videli v časti 3.2. Kompaktný nosič nemá, patrí však do $\mathcal{S}$. Počiatočná podmienka môže byť ľubovoľná temperovaná distribúcia, napríklad ohraničená funkcia. Vzťah (4.129) preto potrebujeme aj pre $f \in \mathcal{S}'$ a $g \in \mathcal{S}$.

Prečo sú práve takéto dvojice predpokladov prirodzené? Konvolúcia a súčin si pri Fourierovej transformácii vymenia úlohy, a preto si vymenia aj predpoklady, ktoré ich robia zmysluplnými. Konvolúcia potrebuje, aby jeden z činiteľov mal kompaktný nosič alebo aspoň v nekonečne rýchlo klesal. Súčin potrebuje, aby jeden z činiteľov bol hladký a nerástol príliš rýchlo. Fourierova transformácia jedno na druhé prevádza. Distribúcii s kompaktným nosičom zodpovedá hladká funkcia, ktorá aj so všetkými deriváciami rastie nanajvýš polynomiálne, ako sme videli vyššie, a funkcii z $\mathcal{S}$ zodpovedá opäť funkcia z $\mathcal{S}$, ktorá je hladká aj rýchlo klesá. Ak takéto vlastnosti nemá ani jeden z činiteľov, nemusí existovať ani konvolúcia, ani súčin. Napríklad konvolúcia $1*1 = \int d^n y\, 1$ diverguje a zodpovedajúci súčin $\mathcal{F}[1]\,\mathcal{F}[1] = (2\pi)^n\delta^2$ nemá zmysel.

Pre $g \in \mathcal{S}$ môžeme konvolúciu zadefinovať priamo ako funkciu,

$$(f*g)(x) = (f_y, g(x-y))\ , \tag{4.133}$$

čo má zmysel, lebo $g(x-y)$ ako funkcia premennej y patrí do $\mathcal{S}$. Pre regulárnu distribúciu f je to obyčajný konvolučný integrál a rovnaký tvar sme dostali na konci časti 4.2.4. Dá sa ukázať, že $f*g$ je hladká funkcia, ktorá aj so všetkými deriváciami rastie nanajvýš polynomiálne, takže je to temperovaná distribúcia. Jej Fourierovu transformáciu vypočítame tak, že pôsobenie f zameníme s integrálom ako v časti 4.2.4,

$$(\mathcal{F}[f*g],\varphi) = \int d^n x\,(f_y, g(x-y))\mathcal{F}[\varphi](x) = \left(f_y,\int d^n x\, g(x-y)\,\mathcal{F}[\varphi](x)\right)\ . \tag{4.134}$$

Funkcia v zátvorke je konvolúcia $\check{g}*\mathcal{F}[\varphi]$ s funkciou $\check{g}(z) = g(-z)$, lebo $g(x-y) = \check{g}(y-x)$. Podľa (4.127) je $\check{g} = \mathcal{F}[\mathcal{F}[g]]$ a podľa druhého vzťahu (4.114)

$$\check{g}*\mathcal{F}[\varphi] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[g]]*\mathcal{F}[\varphi] = (2\pi)^{n/2}\,\mathcal{F}[\mathcal{F}[g]\,\varphi]\ . \tag{4.135}$$

Preto

$$(\mathcal{F}[f*g],\varphi) = (2\pi)^{n/2}(f,\mathcal{F}[\mathcal{F}[g]\,\varphi]) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}[f],\mathcal{F}[g]\,\varphi) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g],\varphi)\ , \tag{4.136}$$

a to je opäť (4.129). Súčin $\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]$ má zmysel, lebo $\mathcal{F}[g]$ je funkcia z $\mathcal{S}$. V kapitole 5 tento vzťah využijeme na to, aby sme konvolúciu, ktorou je vyjadrené riešenie, prepísali na súčin.

4.3.4 Príklady

Pozrime sa teraz na niekoľko príkladov. Fourierovu transformáciu δ-distribúcie vypočítajme najprv formálne, akoby išlo o funkciu,

$$\mathcal{F}[\delta](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n x\, \delta(x)\, e^{i\xi\cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \ , \tag{4.137}$$

a potom poriadne podľa definície (4.118),

$$(\mathcal{F}[\delta], \varphi) = (\delta, \mathcal{F}[\varphi]) = \mathcal{F}[\varphi](0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n x\, \varphi(x) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi\right) \ . \tag{4.138}$$

Dostali sme teda to isté, Fourierovou transformáciou δ-distribúcie je konštantná funkcia $(2\pi)^{-n/2}$. Súhlasí to aj so vzťahom (4.131), lebo δ má kompaktný nosič.

Fourierovu transformáciu konštantnej funkcie 1 dostaneme pomocou inverznej transformácie (4.110) vyčíslenej v bode 0,

$$(\mathcal{F}[1], \varphi) = (1, \mathcal{F}[\varphi]) = \int d^n x\, \mathcal{F}[\varphi](x) = (2\pi)^{n/2}\, \mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[\varphi]\big](0) = (2\pi)^{n/2}\, \varphi(0) \ , \tag{4.139}$$

teda

$$\mathcal{F}[1] = (2\pi)^{n/2}\, \delta \ . \tag{4.140}$$

Formálne to môžeme zapísať ako

$$\int d^n x\, e^{i\xi\cdot x} = (2\pi)^n\, \delta(\xi) \ , \tag{4.141}$$

a to je presne integrál, ktorý pri dôkaze inverznej transformácie zatiaľ nemal zmysel. V jazyku distribúcií zmysel má a fyzici ho používajú veľmi často.

Z pravidiel (4.124) a (4.125) potom hneď dostaneme

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{i\xi\cdot a} \ , \qquad \mathcal{F}[e^{ia\cdot x}] = (2\pi)^{n/2}\, \delta(\xi + a) \ . \tag{4.142}$$

Rovinná vlna sa teda transformuje na δ-distribúciu sústredenú v jednom bode a naopak. Zo vzťahov (4.121) pre $f = 1$ a $f = \delta$ dostaneme transformácie polynómov a derivácií δ-distribúcie,

$$\mathcal{F}[x^\alpha] = (2\pi)^{n/2} (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta \ , \qquad \mathcal{F}[D^\alpha \delta] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (-i\xi)^\alpha \ . \tag{4.143}$$

Gaussovskú funkciu sme vlastne transformovali už v časti 3.2. Doplnením exponentu na štvorec dostaneme

$$\mathcal{F}\big[e^{-|x|^2/2}\big] = e^{-|\xi|^2/2} \ , \tag{4.144}$$

takže funkcia $e^{-|x|^2/2}$ je svojou vlastnou Fourierovou transformáciou. Zo zmeny mierky (4.126) potom pre $\sigma > 0$ vyplýva

$$\mathcal{F}\big[e^{-|x|^2/(2\sigma^2)}\big] = \sigma^n\, e^{-\sigma^2|\xi|^2/2} \ . \tag{4.145}$$

Gaussovská funkcia so šírkou σ má teda Fourierovu transformáciu so šírkou $1/\sigma$. Úzky impulz v premennej x je v premennej ξ široký a naopak.

Vzťah neurčitosti. Túto vlastnosť môžeme vyjadriť aj kvantitatívne. Nech $\varphi \in \mathcal{S}$ je funkcia jednej premennej normovaná tak, že $\int dx\,|\varphi|^2 = 1$. Podľa Parsevalovej rovnosti je potom aj $\int d\xi\,|\mathcal{F}[\varphi]|^2 = 1$, takže $|\varphi(x)|^2$ aj $|\mathcal{F}[\varphi](\xi)|^2$ môžeme chápať ako hustoty pravdepodobnosti. Ich rozptyly okolo nuly spĺňajú nerovnosť

$$\left(\int dx\, x^2 |\varphi(x)|^2\right)\left(\int d\xi\, \xi^2 |\mathcal{F}[\varphi](\xi)|^2\right) \geq \frac{1}{4}\ . \tag{4.146}$$

Dokážeme ju v troch krokoch. Integrovaním per partes, pri ktorom hraničný člen vypadne, dostaneme

$$1 = \int dx\,|\varphi|^2 = -\int dx\, x\,\frac{d}{dx}|\varphi|^2 = -2\,\mathrm{Re}\int dx\, x\,\bar\varphi\,\varphi'\ , \tag{4.147}$$

lebo $\frac{d}{dx}|\varphi|^2 = \bar\varphi'\varphi + \bar\varphi\varphi' = 2\,\mathrm{Re}\,(\bar\varphi\varphi')$. Podľa Cauchyho–Schwarzovej nerovnosti je ďalej

$$1 \leq 2\left(\int dx\, x^2|\varphi|^2\right)^{1/2}\left(\int dx\,|\varphi'|^2\right)^{1/2}\ . \tag{4.148}$$

Napokon podľa Parsevalovej rovnosti (4.117) a podľa (4.106) je $\int dx\,|\varphi'|^2 = \int d\xi\,|\mathcal{F}[\varphi']|^2 = \int d\xi\,\xi^2|\mathcal{F}[\varphi]|^2$. Umocnením na druhú dostaneme (4.146). Rovnosť nastane, ak sú funkcie $x\varphi$ a φ' v Cauchyho–Schwarzovej nerovnosti úmerné, $\varphi' = -cx\varphi$ s $c > 0$, a to sú práve gaussovské funkcie. Pre funkcie, ktoré nie sú sústredené okolo nuly, stačí x nahradiť rozdielom $x - \langle x\rangle$ a ξ rozdielom $\xi - \langle\xi\rangle$, čo zodpovedá posunutiu a modulácii (4.124) a (4.125). V kvantovej mechanike je $|\varphi(x)|^2$ hustota pravdepodobnosti polohy a $|\mathcal{F}[\varphi](\xi)|^2$ hustota pravdepodobnosti veličiny $\xi = p/\hbar$, takže (4.146) je Heisenbergov vzťah neurčitosti $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$.

Heavisideova funkcia a hlavná hodnota. V jednom rozmere vypočítame transformáciu funkcie θ. Funkcie $\theta(x)e^{-\varepsilon x}$ konvergujú pre $\varepsilon \to 0^+$ slabo k θ, a keďže Fourierova transformácia je slabo spojitá, je

$$\mathcal{F}[\theta](\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dx\, e^{i\xi x-\varepsilon x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\varepsilon - i\xi} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{i}{\xi + i\varepsilon}\ , \tag{4.149}$$

pričom limita je slabá limita zo Sochockého vzorca (4.32). Preto

$$\mathcal{F}[\theta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{i}{\xi + i0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(i\,\mathrm{PV}\frac{1}{\xi} + \pi\delta\right)\ . \tag{4.150}$$

Pre znamienkovú funkciu $\mathrm{sgn}\,x = 2\theta - 1$ sa členy s δ zrušia a dostaneme

$$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,i\,\mathrm{PV}\frac{1}{\xi}\ . \tag{4.151}$$

Ak na tento vzťah ešte raz použijeme Fourierovu transformáciu, podľa (4.127) je naľavo $\mathrm{sgn}(-x) = -\mathrm{sgn}\,x$, takže

$$\mathcal{F}\Big[\mathrm{PV}\frac{1}{x}\Big] = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}\,\xi\ . \tag{4.152}$$

Coulombov potenciál. V troch rozmeroch nájdeme transformáciu funkcie $1/|x|$, ktorá je ohraničená v nekonečne a lokálne integrovateľná, a teda temperovaná. Podľa (4.121) je $\mathcal{F}[\nabla^2 f] = -|\xi|^2 \mathcal{F}[f]$, takže zo vzťahu (4.66) dostaneme

$$|\xi|^2\, \mathcal{F}\Big[\frac{1}{|x|}\Big] = 4\pi\, \mathcal{F}[\delta] = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ . \tag{4.153}$$

Prirodzeným kandidátom je funkcia $\sqrt{2/\pi}/|\xi|^2$, ktorá je v $\mathbb{R}^3$ lokálne integrovateľná. Rovnako ako pri rovnici $xf = 1$ v časti 4.2.2 je však riešenie určené len až po distribúciu s nosičom v bode $\xi = 0$, teda až po kombináciu $\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha \delta$. Tú vylúčime pomocou zmeny mierky. Funkcia $1/|x|$ je homogénna stupňa -1, teda $1/|\lambda x| = \lambda^{-1}/|x|$ pre $\lambda > 0$. Podľa (4.126) je potom jej Fourierova transformácia homogénna stupňa -2. Funkcia $1/|\xi|^2$ je tiež homogénna stupňa -2, ale δ je podľa časti 4.2.1 homogénna stupňa -3 a jej derivácie $D^\alpha\delta$ stupňa $-3-|\alpha|$, takže žiadna nenulová kombinácia $\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha\delta$ nemôže byť homogénna stupňa -2. Preto

$$\mathcal{F}\Big[\frac{1}{|x|}\Big] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{|\xi|^2}\ . \tag{4.154}$$

Coulombov potenciál má teda vo Fourierovom obraze tvar $1/|\xi|^2$, s ktorým sa vo fyzike stretnete veľmi často, napríklad pri rozptyle na coulombovskom potenciáli. K tomuto výsledku sa vrátime v kapitolách 5 a 6.

Príklad 34. Nájdite pomocou Fourierovej transformácie riešenie rovnice $f'' + \omega^2 f = \delta$ z príkladu 32 a vysvetlite, ako sa vo Fourierovom obraze prejaví podmienka $f(t) = 0$ pre $t < 0$. □

Riešenie. Nezávislú premennú označme t a chápme ju ako čas, Fourierovu transformáciu robíme v premennej t. Podľa (4.121) je $\mathcal{F}[f''] = -\xi^2 \mathcal{F}[f]$, takže rovnica prejde na

$$(\omega^2 - \xi^2)\, \mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ . \tag{4.155}$$

Funkcia $\omega^2 - \xi^2$ má nulové body $\xi = \pm\omega$. Podobne ako pri rovnici $xf = 1$ v časti 4.2.2 je preto $\mathcal{F}[f]$ určená len až po násobky $\delta(\xi-\omega)$ a $\delta(\xi+\omega)$. Podľa (4.142) im zodpovedajú funkcie $e^{\mp i\omega t}$, teda voľné kmity oscilátora, ktoré spĺňajú rovnicu $f'' + \omega^2 f = 0$. Samotná rovnica teda riešenie neurčuje, treba ešte povedať, aké voľné kmity k nemu pripočítať.

Podmienku $f = 0$ pre $t < 0$ dostaneme fyzikálne prirodzeným spôsobom. Do rovnice pridáme malé trenie, $f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 f = \delta$ s $0 < \varepsilon < \omega$, a na konci urobíme limitu $\varepsilon \to 0^+$. Fourierovou transformáciou dostaneme

$$(\omega^2 - \xi^2 - 2i\varepsilon\xi)\, \mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ , \quad \text{teda} \quad \mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\Omega^2 - (\xi + i\varepsilon)^2}\ , \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}\ . \tag{4.156}$$

Funkcia $\omega^2 - \xi^2 - 2i\varepsilon\xi$ už na reálnej osi nulové body nemá, a preto je $\mathcal{F}[f]$ určená jednoznačne. Je to Fourierova transformácia tlmeného kmitu, ktorý začína v čase 0, lebo

$$\int_0^\infty dt\, e^{i\xi t - \varepsilon t}\,\frac{\sin\Omega t}{\Omega} = \frac{1}{2i\Omega}\left(\frac{1}{\varepsilon - i\xi - i\Omega} - \frac{1}{\varepsilon - i\xi + i\Omega}\right) = \frac{1}{(\varepsilon - i\xi)^2 + \Omega^2} = \frac{1}{\Omega^2 - (\xi + i\varepsilon)^2}\ . \tag{4.157}$$

Riešením rovnice s trením je teda $f(t) = \theta(t)e^{-\varepsilon t}\sin(\Omega t)/\Omega$. V limite $\varepsilon \to 0^+$ dostaneme riešenie $f(t) = \theta(t)\sin(\omega t)/\omega$ z príkladu 32. Jeho Fourierova transformácia je

$$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\omega^2 - (\xi + i0)^2}\ . \tag{4.158}$$

Podmienka $f = 0$ pre $t < 0$ sa teda vo Fourierovom obraze prejaví predpisom $\xi + i0$, ktorý posúva nulové body menovateľa pod reálnu os, do bodov $\pm\omega - i0$. Rozkladom na parciálne zlomky a Sochockého vzorcom (4.32) dostaneme

$$\frac{1}{\omega^2 - (\xi + i0)^2} = -\frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{\xi - \omega + i0} - \frac{1}{\xi + \omega + i0}\right] = \mathrm{PV}\frac{1}{\omega^2 - \xi^2} + \frac{i\pi}{2\omega}\big[\delta(\xi - \omega) - \delta(\xi + \omega)\big]\ , \tag{4.159}$$

kde hlavnú hodnotu chápeme ako súčet hlavných hodnôt v bodoch $\pm\omega$. Predpis $+i0$ teda vyberie z možných riešení presne určitú kombináciu voľných kmitov. Opačný predpis $\xi - i0$ by dal riešenie $-\theta(-t)\sin(\omega t)/\omega$, ktoré je nulové pre $t > 0$, a samotná hlavná hodnota dáva ich aritmetický priemer.

Že predpis $+i0$ zodpovedá kauzalite, vidno aj priamo. Pri spätnej transformácii

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\xi\, e^{-i\xi t}\,\mathcal{F}[f](\xi) \tag{4.160}$$

môžeme pre $t < 0$ integračnú cestu uzavrieť v hornej polrovine komplexnej premennej ξ, kde $e^{-i\xi t}$ klesá. Ak má $\mathcal{F}[f]$ všetky singularity v dolnej polrovine, je podľa rezíduovej vety $f(t) = 0$ pre $t < 0$. Fourierova transformácia odozvy každého systému, ktorý reaguje len na sily z minulosti, je preto analytická v hornej polrovine (pri opačnom znamienku v exponente by to bola dolná polrovina). Z toho vyplývajú Kramersove–Kronigove vzťahy medzi jej reálnou a imaginárnou časťou, s ktorými sa stretnete pri disperzii svetla a v teórii lineárnej odozvy. ■

4.3.5 Periodické distribúcie a Poissonov sumačný vzorec

Na záver sa pozrime na periodické distribúcie v jednom rozmere. Distribúcia f je 2π-periodická, ak $f(x + 2\pi) = f(x)$ v zmysle (4.40). Najjednoduchším príkladom, ktorý nie je obyčajnou funkciou, je **Diracov hrebeň**, rad δ-distribúcií v bodoch $2\pi m$,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi m)\ . \tag{4.161}$$

Je to temperovaná distribúcia, lebo pre $\varphi \in \mathcal{S}$ rad $\sum_m \varphi(2\pi m)$ konverguje. Formálne vypočítané Fourierove koeficienty hrebeňa na intervale $(-\pi, \pi)$ sú všetky rovné $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\,\delta(x)e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi}$, takže by sme čakali

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi m) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}\ . \tag{4.162}$$

Rad napravo nekonverguje v žiadnom bode, ukážeme však, že konverguje v $\mathcal{S}'$ a že vzťah platí. Pôsobením oboch strán na $\varphi \in \mathcal{S}$ a pomocou $\int dx\, e^{ikx}\varphi(x) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[\varphi](k)$ zistíme, že (4.162) je to isté ako **Poissonov sumačný vzorec**

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}[\varphi](k)\ . \tag{4.163}$$

Dokážeme ho pomocou periodizácie. Funkcia

$$P(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(x + 2\pi m) \tag{4.164}$$

je 2π-periodická a hladká, lebo rad aj rady derivácií konvergujú rovnomerne vďaka rýchlemu klesaniu φ. Jej Fourierove koeficienty sú

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\, P(x)\, e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \varphi(y)\, e^{-iky} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}[\varphi](-k)\ , \tag{4.165}$$

kde sme integrály cez posunuté intervaly $(2\pi m, 2\pi(m+1))$ spojili do integrálu cez celú priamku. Fourierov rad hladkej periodickej funkcie k nej konverguje v každom bode, takže $P(0) = \sum_k c_k$, a to je po zámene $k \to -k$ práve (4.163).

Ak na (4.162) použijeme Fourierovu transformáciu a vzťah (4.142), dostaneme

$$\mathcal{F}\Big[\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi m)\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\xi - k)\ . \tag{4.166}$$

Fourierovou transformáciou hrebeňa s periódou 2π je teda hrebeň s periódou 1. Zo zmeny mierky (4.126) dostaneme všeobecnejšie, že hrebeňu s periódou a zodpovedá hrebeň s periódou $2\pi/a$,

$$\mathcal{F}\Big[\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x - am)\Big] = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(\xi - \frac{2\pi k}{a}\right)\ , \tag{4.167}$$

a pre $a = \sqrt{2\pi}$ je hrebeň svojou vlastnou Fourierovou transformáciou. Vo fyzike je to matematický základ difrakcie na kryštáli: mriežke s periódou a zodpovedá vo Fourierovom obraze recipročná mriežka s periódou $2\pi/a$.

Podobne sa dá ukázať, že každá 2π-periodická distribúcia je temperovaná a dá sa rozvinúť do Fourierovho radu $f = \sum_k c_k e^{ikx}$, ktorý konverguje v $\mathcal{S}'$ a ktorého koeficienty rastú nanajvýš polynomiálne. Podľa (4.142) je jej Fourierovou transformáciou $\sqrt{2\pi}\sum_k c_k \delta(\xi + k)$, ktorá je sústredená v celočíselných bodoch. Periodický dej má teda diskrétne spektrum. Fourierove rady budeme podrobne používať v kapitole 7.

5 Cauchyho úloha pre vlnovú rovnicu a rovnicu vedenia tepla

5.1 Greenova funkcia lineárneho operátora

5.1.1 Úvodné poznámky

- majme lineárny diferenciálny operátor na n rozmerom priestore $x \in \mathbb{R}^n$

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n \tag{5.1}$$

  kde najväčšie m pre ktoré je niekoré a_α nenulové nazývame rádom operátora

  zaujíma nás riešenie rovnice

$$Lu = f \tag{5.2}$$

  v predchádzajúcich častiach boli u, f spojité funckie, od u sme požadovali m-násobnú derivovateľnosť, $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$

- teraz budeme riešiť zovšeobecnenú úlohu, kde f, u budú distribúcie z $\mathcal{S}'$. predtým sme mali aj nejaké počiatočné podmienky, ktoré neskôr zakomponujeme do pravej strany. funkcie ϕ, ψ budú tiež v zovšeobecnenej úlohe distribúcie

  takže máme rovnicu (5.2) v celom priestore, bez počiatočných podmienok

- k operátoru L zavedieme **Greenovu funkciu**[11], pre ktorú platí (L uz chapeme ako operator na $\mathcal{S}'$ a teda ako $\partial \to D$)

$$LG = \delta \tag{5.3}$$

  G je určená jednoznačne až na pripočítanie riešenia v homogénnej rovnice $Lv = 0$, nakoľko

$$L(G + v) = LG + Lv = \delta \tag{5.4}$$

- riešenie nehomogénnej rovnice (5.2) potom dostaneme ako

$$u = G * f \tag{5.5}$$

  ak takáto konvolúcia existuje. overíme výpočtom

$$Lu = L(G * f) = (LG) * f = \delta * f = f \tag{5.6}$$

  takéto riešenie je dokonca jedniné (voľnosť v riešení homogénnej rovnice sme komponovali do nejednoznačnosti G), nakoľko pre iné riešenie $u + v$

$$L(u + v) = f + Lv = f \ \Rightarrow \ Lv = 0 \tag{5.7}$$

  ale

$$v = v * \delta = v * (LG) = (Lv) * G = 0 \tag{5.8}$$

[11] Niektorý autori jej radšej hovoria zovšeobecnené riešenie, nakoľko nepôjde o funkciu, ale o singulárnu distribúciu.

- na Greenovu funckiu sa dá pozerať ako na inverzný operátor ku L, v zmysle

$$L(G * \cdot) = id \tag{5.9}$$

- riešenie okrajovej úlohy necháme na neskôr, zatial iba Cauchyho

5.1.2 Greenova funckia v jednom rozmere

- odteraz budeme uvažovať konštantné koeficienty a_α

  majme všeobecný operátor L v jednom rozmere

$$L = a_m \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + a_0 \tag{5.10}$$

  ukazeme, ze jeho Greenova funkcia ma tvar

$$G = \theta_t z(t) \tag{5.11}$$

  kde $z(t)$ je riesenie nasledujucej ulohy

$$Lz = 0 \ , \ z^{(m-1)}(0) = 1/a_m \ , \ z^{(m-2)}(0) = \ldots = z'(0) = z(0) = 0 \tag{5.12}$$

  overime priamociarym vypoctom

$$G' = \theta' z + \theta z' = \delta z + \theta z' = \delta z(0) + \theta z' = \theta z' \tag{5.13}$$
$$G'' = \theta' z' + \theta z'' = \delta z'(0) + \theta z'' = \theta z'' \tag{5.14}$$
$$\vdots \tag{5.15}$$
$$G^{(m)} = \delta z^{(m-1)} + \theta z^{(m)} = \delta / a_m + \theta z^{(m)} \tag{5.16}$$

  co dohromady da

$$LG = a_0 \theta z + a_1 \theta z' + \ldots + \delta + a_m \theta z^{(m)} = \delta + \theta L z = \delta \tag{5.17}$$

Príklad 35. Najdite greenovu funkciu operatora

$$L = \frac{d}{dt} + a^2 \ , \ a \in \mathbb{R} \tag{5.18}$$

□

Riešenie. pre funkciu $z(t)$ dostaneme

$$z = Ce^{-a^2 t} \tag{5.19}$$

v ktorej pociatocne podmienky daju $C = 1$ a teda

$$G = \theta e^{-a^2 t} \tag{5.20}$$

■

Príklad 36. Najdite greenovu funkciu operatora

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + a^2 \ , \ a \in \mathbb{R} \tag{5.21}$$

□

Riešenie. pre funkciu $z(t)$ dostaneme

$$z = A\sin(at) + B\cos(at) \tag{5.22}$$

v ktorej pociatocne podmienky daju $A = 1/a, B = 0$ a teda

$$G = \theta\frac{1}{a}\sin(at) \tag{5.23}$$

■

- rozdiel v charaktere rieseni (5.20) a (5.23) sa ukaze klucovy pri analyze rozdielu hyperbolickych a parabolickych rovnic

Príklad 37. ine priklady

$$L = \frac{d}{dt} - 1 \ , \ L = \frac{d}{dt} \tag{5.24}$$

□

5.1.3 Greenova funckia vo viacerých rozmeroch

- vo viacerych rozmeroch privolame na pomoc fourierovu transformaciu

$$F[LG] = \sum a_\alpha F[D^\alpha G] = \sum a_\alpha(-i\xi)^\alpha F[G] = L(-i\xi)F[G] \tag{5.25}$$

kde sme si uvedomili, ze vo vyraze $F[G]$ ziadny z koeficientov α nevystupuje

toto sa ma rovnat transformacii δ-ty, takze dostavame

$$F[G] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{L(-i\xi)} \tag{5.26}$$

kde ticho predpokladame, ze L nema ziadne korene

problemom teda bude obratit fourierovu transformaciu a najst

$$G = \frac{1}{(2\pi)^n}\int d\xi \frac{1}{L(-i\xi)}e^{-i\xi\cdot x} \tag{5.27}$$

- priklad : v $n = 3$ troch rozmeroch $L = \Delta - a^2$, co dava

$$F[G] = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{|\xi|^2 + a^2} \tag{5.28}$$

a teda

$$G = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\xi \frac{1}{|\xi|^2 + a^2}e^{-i\xi\cdot x} \tag{5.29}$$

vyuzijeme tzv Schwingerovu parametrizaciu

$$\frac{1}{|\xi|^2+a^2} = \int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha(|\xi|^2+a^2)} \tag{5.30}$$

a dostaneme postupne

$$G = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha a^2}\int d\xi\, e^{-\alpha|\xi|^2 - i\xi\cdot x} = \tag{5.31}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha a^2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}} = \left[\alpha \to \alpha\frac{|x|}{2a}\right] \tag{5.32}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\pi^{3/2}\sqrt{\frac{2a}{|x|}}\int_0^\infty d\alpha\, \alpha^{-3/2} e^{-\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)\frac{|x|a}{2}} \tag{5.33}$$

podla vypoctu z casti (6.3.1) sa tento integral rovna modifikovanej besselovej funkcii

$$2K_{1/2}(|x|a) = \sqrt{\frac{2\pi}{|x|a}}e^{-|x|a} \tag{5.34}$$

cim dostavame

$$G = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}e^{-|x|a} \tag{5.35}$$

v limite $a \to 0$ teda dostavame

$$G_\Delta = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|} \tag{5.36}$$

alebo

$$\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) = -4\pi\delta \tag{5.37}$$

- tento vztah vieme dokazat aj explicitnym vypoctom. ide o rovnost dvoch distribucii, takze nechame posobit lavu stranu na testovaciu funkciu φ a budeme pocitat

$$\left(\Delta\frac{1}{|x|},\varphi\right) = (-1)^2\left(\frac{1}{|x|},\Delta\varphi\right) = \tag{5.38}$$

v oblasti ktora neobsahuje pociatok je $1/|x|$ regularna distribucia, takze mozme pisat ($B(0,\varepsilon)$ oznacuje gulu so stredom v pociatku a polomerom ε)

$$= \int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} d^3x\,\frac{1}{r}\Delta\varphi = \oint_{-\partial B(0,\varepsilon)}\left(\frac{1}{r}\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot d\vec{S} - \int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} d^3x\,\vec{\nabla}\frac{1}{r}\vec{\nabla}\varphi = \tag{5.39}$$

$$= \oint_{-\partial B(0,\varepsilon)}\left(\frac{1}{r}\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot d\vec{S} - \oint_{-\partial B(0,\varepsilon)}\varphi\vec{\nabla}\frac{1}{r}\cdot d\vec{S} + \int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} d^3x\,\varphi\Delta\frac{1}{r} \tag{5.40}$$

kde sme si znamienkom $-$ pomohli pamatat, ze hranica v prvom integrale je orietovana do vnutra sfery

posledny clen da nulu lebo sme v oblasti kde $r \neq 0$ a teda $\Delta(1/r) = 0$

prvy clen da

$$-\oint d\Omega\varepsilon^2\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{5.41}$$

co je pre slusnu funkciu φ umerne ε a v limite $\varepsilon \to 0$ vypadne

ostava druhy clen, v ktorom pouzijeme $\vec{\nabla}(1/r) = -\hat{r}/r^2$ a dostaneme

$$= -\varepsilon^2 \oint d\Omega \, \frac{1}{r^2}\varphi(x)\Big|_{r=\varepsilon} \tag{5.42}$$

pre slusnu φ to v limite $\varepsilon \to 0$ da

$$= -\varphi(0) \oint d\Omega = -4\pi\varphi(0) = (-4\pi\delta, \varphi) \tag{5.43}$$

co dokazuje rovnost distribucii (5.37)

- este alternativnejsie mozme vztah (5.37) dokazat preintegrovanim cez gulu $G(0, R)$, prava strana da -4π a lava podla gaussovej vety

$$\oint_{\partial G} d\vec{S} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\oint d\Omega R^2 \frac{1}{R^2} = -4\pi \tag{5.44}$$

- ine priklady na to, ako najst greenovu funkciu (napriklad tento sposob v 1D)

5.2 Riešenie rovnice vedenia tepla

5.2.1 Zovšeobecnené počiatočné podmienky

- chceli by sme vyriesit rovnicu v $n+1$ rozmeroch $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tvare

$$(\partial_t - \Delta)u = f \ , \ t > 0 \ , \ u(x,0) = \phi(x) \tag{5.45}$$

s tym, ze vsetkych vystupujucim funkciam dovolime byt distribuciami z priestoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$

- ukazeme, ze na to mozno riesit rovnicu

$$(\partial_t - \Delta)\tilde{u} = \tilde{f} + \phi\delta_t \equiv \tilde{F} \tag{5.46}$$

bez akejkovlek okrajovej podmienky v celom $\mathbb{R}^{n+1}$, s oznacenim

$$\tilde{g}_{xt} = \begin{cases} g(x,t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{5.47}$$

na prvy pohlad robime sucin distribucii $\phi\delta_t$, co nie je dobre. ale ide o tenzorovy sucin, nakolke ϕ zije na priestore x-ov

- jej riesenie najdeme priamociaro $\tilde{u} = G * \tilde{F}$ a riesenie povodnej rovnice (5.45) najdeme ako zuzenie na kladne casy

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)|_{t\geq 0} \tag{5.48}$$

aby sme videli ze tomu tak ozaj je, vypocitame pre testovaciu funkciu φ

$$\begin{aligned}((\partial_t - \Delta)\tilde{u}, \varphi) = \left(\tilde{u}, -\partial_t\varphi - (-1)^2\Delta\varphi\right) = \int_0^\infty dt \int d^n x u(-\partial_t\varphi - \Delta\varphi) = \\ = -\ u\varphi|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty dt \int d^n x(\partial_t - \Delta)u\varphi = \\ = +\ \phi(x)\varphi(0) + \int_0^\infty dt \int d^n x f\varphi = (f + \phi\delta_t, \varphi)\end{aligned} \tag{5.49}$$

jeden z hranicnich clenov vypadol vdaka $\varphi \in \mathcal{S}$

- vidime teda interpretaciu clena δ_t ako zdroja lokalizovaneho v nulovom case
- ostava teda najst greenovu funkciu G

5.2.2 Greenova funkcia difúzneho operátora

- urobime fourierovu transformaciu G iba v priestorovych suradniciach a dostavame

$$(\partial_t + |\xi|^2) F_x[G] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \delta_t \tag{5.50}$$

- ide teda o Greenovu funckiu v jednom rozmere, ktoru pozname z riesenia prikladu 35

$$(2\pi)^{n/2} F_x[g] = \theta_t e^{-|\xi|^2 t} \tag{5.51}$$

ostava ju len obratit

$$\begin{aligned} G =& \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n\xi \, \theta_t e^{-|\xi|^2 t} e^{-i\xi\cdot x} = \frac{\theta_t}{(2\pi)^n} \left(\sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \\ =& \frac{\theta_t}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned} \tag{5.52}$$

5.2.3 Poissonov vzorec pre riešenie rovnice vedenia tepla

- konvolucia tejto greenovej funkcie s pravou stranou rovnice bude mat dve casti. cast za $\tilde{f}$ je len cvicenie v premenovavani integracnych premennych

$$\begin{aligned} (G * \tilde{f}, \varphi) =& \left(G_{xt}, (\tilde{f}_{yt'}, \varphi(x+y, t+t'))\right) = \\ =& \int dt \int d^n x \frac{\theta_t}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \int d^n y \int dt' f(y,t') \varphi(x+y, t+t') = \\ =& \int dt \int d^n x \frac{\theta_t}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \int d^n y \int dt' f(y-x, t'-t) \varphi(y, t') = \\ =& \int d^n y \int dt' \left[\int dt \int d^n x \frac{\theta(t'-t)}{\left(\sqrt{4\pi(t'-t)}\right)^n} e^{-\frac{|y-x|^2}{4(t'-t)}} f(x,t) \right] \varphi(y,t') = \\ =& \left(\left[\int_0^t d\tau \int d^n y \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi(t-\tau)}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau) \right], \varphi \right) \end{aligned} \tag{5.53}$$

pri vypocte konvolucie druhej casti budeme premenovavat o cosi menej, ale budeme musiet robit jednu kontrakciu s δ-ou

$$(G * \phi\delta_t, \varphi) = (G_{xt}, (\phi_y \delta_{t'}, \varphi(x+y, t+t'))) = \int dt \int d^n x \frac{\theta_t}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \int d^n y \phi(y)\varphi(x+y,t) =$$

$$= \int d^n y \int dt \int d^n x \frac{\theta_t}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \phi(y-x)\varphi(y,t) =$$

$$= \int d^n y \int dt \left[\int d^n x \frac{\theta_t}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|y-x|^2}{4t}} \phi(x) \right] \varphi(y,t) =$$

$$= \left(\left[\int d^n y \frac{\theta_t}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \phi(y) \right], \varphi \right) \tag{5.54}$$

rozmyslime si, ze v tomto vzorci je θ_t zbytocna a spojenim vysledkov (5.53,5.54) dostavame Poissonov vzorec pre riesenie rovnice vedenia tepla (5.45)

$$u(x,t) = \int d^n y \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \phi(y) + \int_0^t d\tau \int d^n y \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi(t-\tau)}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau) \tag{5.55}$$

Príklad 38. Nájdite riešenie rovnice vedenia tepla z nulovou počiatočnou podmienkou a zo zdrojom v tvare δ_x. Ako bude toto riešenie vyzerať pre veľké časy? Čo sa z toho dá usúdiť? □

5.3 Riešenie vlnovej rovnice

5.3.1 Zovšeobecnené počiatočné podmienky

- chceli by sme vyriesit rovnicu v $n+1$ rozmeroch tvare

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = f \ , \ t > 0 \ , \ u(x,0) = \phi(x) \ , \ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{5.56}$$

  s tym, ze vsetkych vystupujucim funkciam dovolime byt distribuciami z priestoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$

- podobne ako v pripade rovnice vedenia tepla ju budeme vediet prepisat na rovnicu v celom priestore s pociatocnymi podmienkami zakomponovanymi do pravej strany rovnice

$$(\partial_t^2 - \Delta)\tilde{u} = \tilde{f} + \phi\delta_t' + \psi\delta_t \equiv \tilde{F} \tag{5.57}$$

  riesenie tejto rovnice opat najdeme priamociaro konvoluciou $\tilde{u} = G * \tilde{F}$ a riesenie povodnej rovnice (5.56) najdeme ako zuzenie na kladne casy

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)|_{t \geq 0} \tag{5.58}$$

dokaz, ze tomu tak ozaj bude je analogicky ako v predchadzajucom pripade φ

$$\begin{aligned}\Big((\partial_t^2-\Delta)\tilde{u},\varphi\Big) =&(-1)^2\left(\tilde{u},\partial_t^2\varphi-\Delta\varphi\right)=\int_0^\infty dt\int dxu(\partial_t^2\varphi-\Delta\varphi)=\\ &=u\varphi_t|_{t=0}^{t=\infty}-\int_0^\infty dt\int dxu_t\varphi_t-\int_0^\infty dt\int dxu\Delta\varphi=\\ &=-\phi(x)\varphi_t(0)-u_t\varphi|_{t=0}^{t=\infty}+\int_0^\infty dt\int dx(u_{tt}-\Delta u)\varphi=\\ &=\Big(\phi(x)\delta_t'+\psi(x)\delta_t+\tilde{f},\varphi\Big)\end{aligned} \tag{5.59}$$

hranicne cleny opat vypadavali vdaka $\varphi,\varphi_t\in\mathcal{S}$

- ostava teda najst greenovu funkciu G

5.3.2 Greenova funkcia vlnového operátora

- rovnica pre fourierovu transformaciu G bude

$$(\partial_{tt}+|\xi|^2)F[G]=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\delta_t \tag{5.60}$$

ktoru sme vyriesili v (5.23) s vysledkom

$$F[G]=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\theta_t\frac{1}{|\xi|}\sin(|\xi|t) \tag{5.61}$$

tento vyraz obratime postupne pre pripady $n=1,2,3$

- **v jednom rozmere** dostavame

$$\begin{aligned}G=&\frac{\theta_t}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\xi\frac{1}{2i|\xi|}\left(e^{-i(\xi x-|\xi|t)}-e^{-i(\xi x-|\xi|t)}\right)=\\ =&\frac{\theta_t}{2\pi}\left[\int_0^\infty d\xi\frac{1}{2i\xi}\left(e^{-i(\xi x-|\xi|t)}-e^{-i(\xi x+|\xi|t)}\right)-\int_{-\infty}^0 d\xi\frac{1}{2i\xi}\left(e^{-i(\xi x+\xi t)}-e^{-i(\xi x-\xi t)}\right)\right]=\\ =&\frac{\theta_t}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\xi\frac{1}{2i\xi}\left(e^{-i(\xi x-|\xi|t)}-e^{-i(\xi x+|\xi|t)}\right)\end{aligned} \tag{5.62}$$

tu si pomozeme integralom

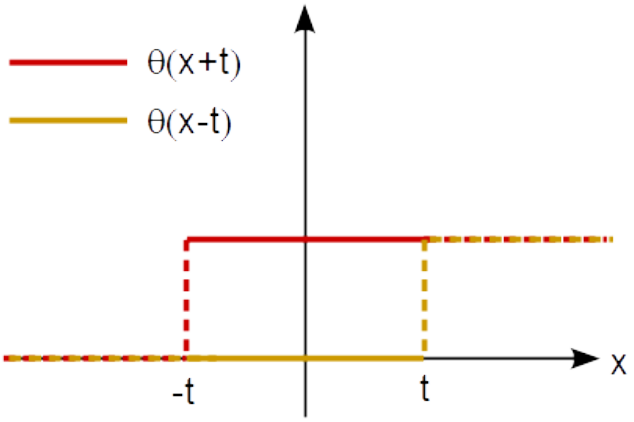
$$I=\int_{-\infty}^\infty d\xi\frac{1}{\xi}e^{-i\xi z} \tag{5.63}$$

pre ktory plati $\partial_z I=-2\pi i\delta_z$ a teda $I=-2\pi i\theta_z$, co v (5.62)

$$G=\frac{\theta_t}{2\pi}\frac{(-2\pi i)}{2i}\left[\theta(x-t)-\theta(x+t)\right]=\frac{1}{2}\theta_t\left[\theta(x+t)-\theta(x-t)\right] \tag{5.64}$$

nakreslime si obrazok, rozmyslime si co hovoria jednotlive θ-funckie a dostaneme

$$G=\frac{1}{2}\theta(t-|x|) \tag{5.65}$$



Obr. 24: Vysvetlujuci obrazok k (5.65).

- **v dvoch rozmeroch** je greenova funkcia (uloha 42)

$$G = \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t-r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\ ,\ r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{5.66}$$

- **v troch rozmeroch** je greenova funkcia

$$G = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta(t-|\vec{x}|) \tag{5.67}$$

ukazeme, ze fourierova trasformacia tohto vyrazu da ozaj (5.61)

$$\begin{aligned}
F[G] =& \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{x}\frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta(t-|\vec{x}|)e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dr\, d\vartheta\, d\varphi\, r^2\sin\vartheta\frac{1}{4\pi r}\delta(t-r)e^{ir|\vec{\xi}|\cos\vartheta} = \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\vartheta\, 2\pi\sin\vartheta\frac{t}{4\pi}e^{it|\vec{\xi}|\cos\vartheta} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{t}{2}\int_0^\pi d\vartheta\sin\vartheta e^{it|\vec{\xi}|\cos\vartheta} = \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{t}{2}\int_{-1}^{1} du e^{it|\vec{\xi}|u} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e^{it|\vec{\xi}|}-e^{-it|\vec{\xi}|}}{2i|\vec{\xi}|} = \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{|\vec{\xi}|}\sin(t|\vec{\xi}|)
\end{aligned} \tag{5.68}$$

faktor θ_t bol na zaciatku zahrnuty v tom, ze $\delta(t-|\vec{x}|)$ je automaticky nula pre $t<0$

5.3.3 Riešenie vlnovej rovnice

- tak ako pre greenovu funkciu aj pre riesenia rovnice (5.56) budeme mat rozne vyrazy v roznych rozmeroch

- **v jednom rozmere** uz vysledok pozname, je nim d'Alambertov-Duhamelov vzorec, tu si ukazeme ako k nemu prideme z konvolucie grenovej funkcie (5.65) a pravej strany (5.57) postupne

pocitame

$$(G*\psi\delta_t,\varphi)=(G_{xt},(\psi_y\delta_{t'},\varphi(x+y,t+t')))=\int dx\int dt\frac{1}{2}\theta(t-|x|)\int dy\psi(y)\varphi(x+y,t)=$$
$$=\int dx\int dt\frac{1}{2}\theta(t-|x|)\int dy\psi(y-x)\varphi(y,t)=$$
$$=\int dy\int dt\left[\int dx\frac{1}{2}\theta(t-|y-x|)\psi(x)\right]\varphi(y,t)=\left(\frac{1}{2}\left[\int_{x-t}^{x+t}dy\psi(y)\right],\varphi\right)\quad(5.69)$$

pricom sme si rozmyslieli, ze θ funkcia hovori, ze vdialenost y od x je najviac t. spoznavame druhu cast d'Alambertovho vzorca. povzbudeni pocitame dalej o cosi narocnejsi kusok

$$(G*\phi\delta'_t,\varphi)=(G_{xt},(\phi_y\delta'_{t'},\varphi(x+y,t+t')))=\int dx\int dt\frac{1}{2}\theta(t-|x|)\left(-\int dy\phi(y)\varphi_t(x+y,t)\right)=$$
$$=-\underbrace{\frac{1}{2}\int dx\int dy\,[\ldots]\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty}}_{=0}+\frac{1}{2}\int dx\int dt\partial_t\theta(t-|x|)\int dy\phi(y)\varphi(x+y,t)=$$
$$=\int dy\int dt\left[\frac{1}{2}\int dx\delta(t-|x|)\phi(y-x)\right]\varphi(y,t)=$$
$$=\int dy\int dt\left[\frac{1}{2}\int dx\delta(t-|y-x|)\phi(x)\right]\varphi(y,t)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\left[\phi(x-t)+\phi(x+t)\right],\varphi\right)\quad(5.70)$$

co je opat znama cast ocakvaneho vzorca. duhamelov princip je potom uz len cvicenie v premenovavani integracnych premennych

$$(G*f,\varphi)=(G_{xt},(f_{yt'},\varphi(x+y,t+t')))=$$
$$=\int dx\int dt\frac{1}{2}\theta(t-|x|)\int dy\int dt'f(y,t')\varphi(x+y,t+t')=$$
$$=\int dy\int dt'\left[\int dx\int dt\frac{1}{2}\theta(t-|x|)f(y-x,t'-t)\right]\varphi(y,t')=$$
$$=\int dy\int dt'\left[\frac{1}{2}\int dx\int dt\theta(t'-t-|y-x|)f(x,t)\right]\varphi(y,t')=$$
$$=\int dx\int dt\left[\frac{1}{2}\int dy\int d\tau\theta(t-\tau-|x-y|)f(y,\tau)\right]\varphi(x,t)\quad(5.71)$$

ostava si vyjasnit, ake su hranice integralu v hranatej zatvorke. v prvom rade $\tau<t$, lebo inak je argument urcite zaporny, v druhom rade vdialenost y od x moze byt najviac $t-\tau$ a teda

$$(G*f,\varphi)=\left(\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}dy\,f(y,\tau),\varphi\right)\quad(5.72)$$

- **v dvoch rozmeroch** bude situacia o cosi komplikovanejsia zacnime nehomogennym clenom a premenovavanim premennych

$$\begin{aligned}(G*f,\varphi) &= \int d^2y \int dt' \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t'-|y|)}{\sqrt{(t')^2-|y|^2}} \int d^2x \int dt f(x,t)\varphi(x+y,t+t') = \\ &= \int d^2y \int dt' \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t'-|y|)}{\sqrt{(t')^2-|y|^2}} \int d^2x \int dt f(x-y,t-t')\varphi(y,t') = \\ &= \int d^2y \int dt' \int d^2x \int dt \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t-t'-|x-y|)}{\sqrt{(t-t')^2-|x-y|^2}} f(x,t)\varphi(y,t') \end{aligned} \tag{5.73}$$

opat dostavame $t' < t$ a potom opat integral cez take y, ktorych vzdialenosti od x je mensia ako $t-t'$, takze integrovanie cez gulu so stredom v x a polomerom $t-t'$, ktoru budeme oznacovat $B(x,t-t')$ a celkovo teda

$$(G*f,\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \int_{B(x,t-t')} d^2y \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(t-t')^2-|x-y|^2}}, \varphi\right) \tag{5.74}$$

pocitame dalej clen za ψ

$$\begin{aligned}(G*\psi\delta_t,\varphi) &= \int d^2y \int dt' \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t'-|y|)}{\sqrt{(t')^2-|y|^2}} \int d^2x \psi(x)\varphi(x+y,t') = \\ &= \int d^2y \int dt' \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t'-|y-x|)}{\sqrt{(t')^2-|y-x|^2}} \int d^2x \psi(x)\varphi(y,t') = \\ &= \left(\int d^2y \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t-|x-y|)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\psi(y), \varphi\right) \end{aligned} \tag{5.75}$$

opat budeme integrovat cez gulu, tentoraz $B(x,t)$, ostava posledna ingrediencia

$$\begin{aligned}(G*\phi\delta_t',\varphi) = (G_{yt'},(\phi_x\delta_t',\varphi)) &= \int d^2y \int dt' \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t'-|y|)}{\sqrt{(t')^2-|y|^2}} \left(-\int d^2x \phi(x)\varphi_{t'}(x+y,t')\right) = \\ &= 0 + \int d^2y \int dt' \int d^2x \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\theta(t'-|y-x|)}{\sqrt{(t')^2-|y-x|^2}}\phi(x)\right)\varphi(y,t') = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,t)} d^2y \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\right), \varphi\right) \end{aligned} \tag{5.76}$$

kde 0 oznacuje nulovy hranicny clen. dohromady teda dostavame pre riesenie dvojrozmernej vlnovej rovnice

$$\begin{aligned}u(x,t) = &\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,t)} d^2y \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{B(x,t)} d^2y \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \int_{B(x,t-t')} d^2y \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(t-t')^2-|x-y|^2}} \end{aligned} \tag{5.77}$$

- **v troch rozmeroch** dostaneme DOPLNIT VYPOCET

$$\begin{aligned}u(\vec{x},t) = &\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\oint_{\partial B(\vec{x},t)} d^2y\, \phi(\vec{y})\right) + \frac{1}{4\pi t}\oint_{\partial B(\vec{x},t)} d^2y\, \psi(\vec{y}) + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{B(\vec{x},t)} d^3y \frac{f(\vec{y},t-|\vec{x}-\vec{y}|)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \end{aligned} \tag{5.78}$$

5.3.4 Sumár, porovnanie a interpretácia nájdených vzťahov

- pre greenove funkcie vlnoveho operatora sme v $n = 1, 2, 3$ rozmeroch dostali postupne

$$G_1 = \frac{1}{2}\theta(ct - |x|) \tag{5.79a}$$

$$G_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(ct - r)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \tag{5.79b}$$

$$G_3 = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta(ct - |\vec{x}|) \tag{5.79c}$$

  a pre riesenia cauchyho ulohy (5.56) potom postupne

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x - ct) + \phi(x + ct)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} dy\psi(y) + \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} dy f(x,\tau) \tag{5.80a}$$

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,ct)} d^2y \frac{\phi(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |x-y|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi c}\int_{B(x,ct)} d^2y \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |x-y|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi c}\int_0^t d\tau \int_{B(x,c(t-\tau))} d^2y \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |x-y|^2}} \tag{5.80b}$$

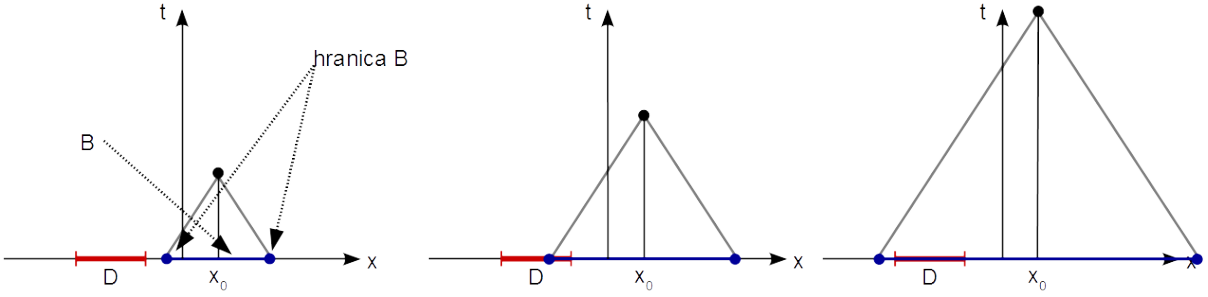
$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\oint_{\partial B(\vec{x},ct)} d^2y\, \phi(\vec{y})\right) + \frac{1}{4\pi c^2 t}\oint_{\partial B(\vec{x},t)} d^2y\, \psi(\vec{y}) + \\ + \frac{1}{4\pi c^2}\int_{B(\vec{x},ct)} d^3y \frac{f(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tag{5.80c}$$

Príklad 39. Rozmyslite si, po prípade explicitným výpočtom ukážte, že toto sú zodpovedajúce vzťahy pre všeobecnú rýchlosť šírenia vĺn c. □

Príklad 40. Vo vzorci pre riešenie trojrozmernej úlohy skúste prepísať posledný člen do podobného tvaru ako rozdpovedajúci člen v riešení dvorozmernom prípade. To znamená ako integrál cez časovú premennú v nejakých hraniciach a integrál cez hranicu nejakej gulovej plochy, ktorej polomer závisí od tohto integračného času. □

- vo všetkých troch prípadoch uvažujme homogénnu úlohu $f = 0$ (bez budenia) a funckie ϕ, ψ, ktoré sú nenulové iba v nejakej uzavretej oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$ a pozrime sa, ako bude vyzerať riešenie u v nejakom fixovanom bode $x_0 \notin D$ v rôznych časoch $t > 0$
- jednorozmerný prípade sme už podobne analyzovali
- v dvoch rozmeroch dostaneme nulovy vysledok pre casi $t < T$ a nenulovy vysledok pre lubovolny cas $t > T$
- v troch rozmeroch dostaneme nenulovy vysledok pre casi medzi $T_1 < t < T_2$

Príklad 41. Z tvaru Greenovej funkcie v dvoch rozmeroch (5.79b) a uvážením pôsobenia na testovacie funckie ktoré nezávisia od druhej súradnice súradnice x_2 nájdite vzťah pre jednorozmernú Greenovu funckiu (5.79a). □



Obr. 25: Riešenie vlnovej rovnice pre rozmery $n = 1, 2, 3$ pre $f = 0$ a $\phi, \psi \neq 0$ iba v ohraničenej oblasti D v bode $x_0 \notin D$ v troch charakteristických časoch.

Riešenie. ■

Príklad 42. Podobne ako v prechádzajúcom príklade, z tvaru Greenovej funkcie v troch rozmeroch (5.79c) a uvážením pôsobenia na testovacie funckie ktoré nezávisia od tretej súradnice z nájdite vzťah pre dvojrozmernú Greenovu funckiu (5.79b). □

Riešenie.

$$\begin{aligned} G_2 &= \int dz G_3 = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi c^2}\ \frac{1}{|\vec{x}|}\Big|_{z=\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2}} & x^2+y^2 \le c^2t^2 \\ 0 & x^2+y^2 > c^2t^2 \end{cases} \times \sum_{z^2=c^2t^2-x^2-y^2} \frac{1}{\left|\frac{d}{dz}\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{c}\right)\right|} = \\ &= \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\theta(c^2t^2-x^2-y^2)}{ct} 2\left(\frac{\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2}/c}{\sqrt{c^2t^2}}\right)^{-1} = \frac{1}{2\pi c}\frac{\theta(t-|\vec{x}|/c)}{\sqrt{c^2t^2-|\vec{x}|^2}} \end{aligned} \tag{5.81}$$

■

Príklad 43. Pre počiatočné podmienky ϕ, ψ, ktoré nezávisia od jednej z premenných ukážte, že vzťahy (5.80c), resp. (5.80b) pre riešenie troj-/dvoj-rozmernej úlohy prejdu na zodpovedajúci vzťah pre dvoj-/jedno-rozmernú úlohu. □

Riešenie. Riešenie pre dvojrozmernú úlohu s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Počítame[12]

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& u(x_1,y_1,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,ct)} d^2y \frac{\phi(y_1)}{\sqrt{c^2t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}\right) = \\
=& \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x_1-ct}^{x_1+ct} dy_1\phi(y_1)\int_{x_2-\sqrt{ct^2-(x_1-y_1)^2}}^{x_2+\sqrt{ct^2-(x_1-y_1)^2}} dy_2 \frac{1}{\sqrt{c^2t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}\right) = \\
=& \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x_1-ct}^{x_1+ct} dy_1\phi(y_1)\pi\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial ct}\left(\int_0^{x_1+ct} dy_1\phi(y_1) - \int_0^{x_1-ct} dy_1\phi(y_1)\right) = \\
=& \frac{1}{2}\phi(x_1+ct) - \frac{1}{2}(-1)\phi(x_1-ct)
\end{aligned} \tag{5.82}$$

■

Príklad 44. Urobte podobnú obrázkovú analýzu prípadov, v ktorých funckcie ϕ, ψ nezávisia od jednej z premenných a rozmyslite si, ako spolu súvisia výsledky v rôzne rozmerných prípadoch. □

Príklad 45. Príklad o odvodení Kirchhofovho vzorca z dAlambertovho. □

Príklad 46. Vyriešte nasledujúce úlohy

$$\begin{array}{lll}
u_{tt}-u_{11}-u_{22}=0 & u(x_1,x_2,0)=x_1^2+x_2^2 & u_t(x_1,x_2,0)=0 \\
u_{tt}-u_{11}-u_{22}=x_1x_2t & u(x_1,x_2,0)=0 & u_t(x_1,x_2,0)=xy \\
u_{tt}-u_{11}-u_{22}-u_{33}=0 & u(x_1,x_2,x_3,0)=x_1^2+2x_3-1 & u_t(x_1,x_2,x_3,0)=x_2^2-x_1+1 \\
u_{tt}-u_{11}-u_{22}-u_{33}=x_1t & u(x_1,x_2,x_3,0)=0 & u_t(x_1,x_2,x_3,0)=0
\end{array} \tag{5.83}$$

□

Riešenie. Nie uplne, ale snad postacujuco detailne naznaky riesenia. Prva rovnica

$$\int_{B(\vec{x},ct)} d^2x' \to \int_0^{ct} dr\, r \int_0^{2\pi} d\theta \left[\begin{array}{l} x' = x + r\cos\theta \\ y' = y + r\sin\theta \end{array}\right]$$

$$\int_0^t dr\, r\int_0^{2\pi} d\theta \frac{x^2+y^2+r^2+2xr\cos\theta+2xr\sin\theta}{\sqrt{t^2-r^2}} = 2\pi(x^2+y^2)\frac{t}{2}\beta\left(1,\frac{1}{2}\right) + 2\pi\frac{t^3}{2}\beta\left(2,\frac{1}{2}\right)$$

$$u(x,y,t) = x^2+y^2+2t^2$$

Druha rovnica

$$\int_{B(\vec{x},ct)} d^2x' \frac{x'y'}{\sqrt{t^2-r^2}} = 2\pi xy\frac{t}{2}\beta\left(1,\frac{1}{2}\right)\ ,\ \int_0^t d\tau\, xy(t-\tau)\tau = xy\frac{1}{6}t^3$$

$$u(\vec{x},t) = xyt + \frac{1}{6}xyt^3$$

[12]

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{f(x)} dt\phi(t) = f'(x)\frac{\partial}{\partial f}\int_0^f dt\phi(t) = f'(x)\phi(f(x))$$

$$\int_{-A}^{A} dx \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}} = \pi$$

Tretia rovnica

$$\oint_{\partial S(\vec{x},ct)} d^2x' = c^2t^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{bmatrix} x' = x + ct\sin\theta\cos\varphi \\ y' = y + ct\sin\theta\sin\varphi \\ z' = z + ct\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\int_0^\pi d\theta\, \sin\theta = 2, \int_0^\pi d\theta\, \sin^3\theta = \frac{4}{3}, \int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos^2\varphi = \pi$$

$$u(\vec{x},t) = x^2 + ty^2 + \frac{1}{3}t^3 + t^2 + t - tx + 2z - 1$$

Stvrta rovnica.

$$\int_{B(\vec{x},ct)} d^3x' = \int_0^{ct} dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{bmatrix} x' = x + r\sin\theta\cos\varphi \\ y' = y + r\sin\theta\sin\varphi \\ z' = z + r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{6}xt^3$$

■

5.3.5 Vlnová rovnica v n-rozmeroch

- podmienku pre Greenovu funkciu v n rozmeroch napiseme trochu inak

$$(\partial_t^2 - \Delta)G_{n,tx} = 0\ ,\ \ G_n|_{t=0} = 0\ ,\ \partial_t G_n|_{t=0} = \delta(x) \tag{5.84}$$

  (premysliet ze to je ozaj ekvivalentne)

- riesenie tejto rovnice budeme hladat v tvare $G_n(t^2 - r^2) \equiv G_n(\sigma)$, motivovani invariantom transformacie, ktora nemeni vlnovy operator

  nasledne vypocitame

$$\partial_{tt}G_n = 2G_n' + 4t^2G_n'' \tag{5.85}$$

$$\Delta G_n = \left(\frac{1}{r^{n-1}}\partial_r r^{n-1}\partial_r\right) G_n = 4r^2G_n'' - 2nG_n' \tag{5.86}$$

$$(\partial_t^2 - \Delta)G_n = 4\left(\sigma G_n'' + \frac{n+1}{2}G_n'\right) = 0 \tag{5.87}$$

  ak tuto rovnicu zderivujeme podla σ este raz, dostaneme

$$\sigma G_n''' + \frac{n+2+1}{2}G_n'' = 0 \tag{5.88}$$

  z coho vidime, ze G_n' splna rovnaku rovnicu ako G_{n+2} a mozu sa teda lisit iba o multiplikativnu konstantu (rozdiel o riesenie homogennej rovnice nas nezaujima). dostaneme teda

$$G_{n+2} = c\frac{dG_n}{d\sigma} \tag{5.89}$$

  tato konstanta sa o chvilku ukaze byt $1/\pi$

- pre $n = 1$ mame
$$G_1 = \frac{1}{2}\theta(t^2 - r^2) \tag{5.90}$$
co da
$$G_3 = \frac{c}{2}\frac{d}{d\sigma}\theta(\sigma)\Big|_{\sigma=t^2-r^2} = \frac{c}{2}\delta(t^2 - r^2) = \frac{c}{4r}\delta(t - r) \tag{5.91}$$
kde sme vyuzili, ze aj t aj r su kladne. dostali sme teda ze $c = 1/\pi$

- pre vseobecny neparny rozmer $n = 2k + 1$ potom dostaneme
$$G_{2k+1} = \frac{1}{2\pi^k}\frac{d^k}{d\sigma^k}\theta(\sigma)\Big|_{\sigma=t^2-r^2} \tag{5.92}$$
a pre vseobecny parny rozmer $n = 2k + 2$
$$G_{2k+2} = \frac{1}{2\pi^{k+1}}\frac{d^k}{d\sigma^k}\frac{\theta(\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\Big|_{\sigma=t^2-r^2} \tag{5.93}$$

- na tomto mieste si len vsimneme, ze s rastucim rozmerom distribucia G_n nabera na singularite a obsahuje vysoke derivacie δ-y, co znamena ze riesenie zavisi od vysokych derivacii pociatocnych podmienok

  vlnova rovnica teda vo vseobecnosti kazi diferencovatelnost

- dva vzorce pre parne a neparne rozmery sa daju spojit do jedneho zavedenim polociselnej derivacie, ale to nebudeme potrebovat

5.3.6 Jednoznačnosť riešenia a iné úlohy pre vlnovú rovnicu

- pre rozmery $n = 1, 2, 3$ sme nasli explicitne vyjadrenie riesenia a teda dokazali jednoznacnost a existenciu

- pre vseobecne rozmery sme naznacili vypocet greenovej funckie, ktora potom v konvolucii so zovseobecnenou pociatocnou podmienkou $\tilde{F}$ v (5.57) da riesenie, je ale toto riesenie jedine?

- nech su riesenia dve, u_1 a u_2 a studujme ich rozdiel $w = u_1 - u_2$. tato funckia splna homogennu rovnicu s homogennou pociatocnou podmienkou a teda $\tilde{F} = 0$, co v konvolucii s lubovolnou G_n da vzdy nulu

  preto $v(x, t) = 0$ a teda $u_1 = u_2$

- **vseobecnejsia pociatocna podmienka** - doteraz sme mali pociatocnu podmienku zadanu na nadploche $t = 0$. mozme sa pytat ako mozme tuto nadplochu zovseobecnit aby sme mali stale dobre definovany problem s pociatocnou podmienkou

  v jednom rozmere - mozme priamku $t = 0$ zdeformovat tak, aby aby ju ziadny minuly kuzel nepretinal viac krat

vo viacerych rozmeroch - pre linearny hyperbolicky operator

$$Lu = g_{ij}u_{ij} + \dots \tag{5.94}$$

bude dobrou nadplochou $\gamma(x) = 0$ taka, ktora nie je nikde charakteristicka, teda

$$g_{ij}\gamma_i\gamma_j \neq 0 \ \forall x \tag{5.95}$$

to je analog podmienky na krivku Γ pri rovniciach prveho radu, aby sa riesenie, ktore sa prenasa po charakteristikach neprenieslo na to iste miesto z roznych smerov rozne

- **Goursatov (charakteristicky) problem**

  na zaver budeme studovat iny druh podmienok na riesenie vlnovej rovnice. specialne v 1D pripade, kde je vseobecne riesenie vlnovej rovnice bez pravej strany dane

  $$u(x,t) = g_1(x-t) + g_2(x+t) \tag{5.96}$$

  rovnicu budeme riesit v oblasti $t^2 > x^2$ a na jej hraniciach $t = |x|$ budeme mat zadanu hodnotu u

  $$u(x,-x) = u_1(x) \ , \ u(x,x) = u_2(x) \tag{5.97}$$

  pricom aby sme mali konzistentne zadanu ulohu $u_1(0) = u_2(0) = a_0$. toto dosadime do riesenia ulohy a dostaneme podmienky

  $$u_2(x) = g_1(0) + g_2(2x) \tag{5.98}$$
  $$u_1(x) = g_1(2x) + g_2(0) \tag{5.99}$$

  co pre $x = 0$ da $g_1(0) + g_2(0) = a_0$ a teda

  $$u(x,t) = u_1\left(\frac{x-t}{2}\right) + u_2\left(\frac{x+t}{2}\right) - a_0 \tag{5.100}$$

  vsimnime si, ze ak by sme zadali na hranici $t = |x|$ aj casovu derivaciu funckie u, tak by sme problem predefinovali, nakolko by sme tym padom urcili aj funkciu g aj funkciu g'

  tiez si vsimnime, ze ak by sme chceli zavriet oblast tak, aby bola uzavreta a zadat u na tejto oblasti to by tiez vo vseobecnsoti neslo, nakolko vo vnutry oblasti $t = |x|$ je riesenie u dane vzorcom (5.100) a nemozme ho lubovolne zadavat

- prichadzame k zaveru, ze Dirichletova okrajova uloha je pre vlnovu rovnicu zle definovana

6 Okrajové úlohy pre Poissonovu rovnicu a zovšeobecnenia

- uz sme pisali ze v parabolickych a hyperbolickcych rovniciach mame jednu specialnu premennu, ktoru identifikujeme s casom a tieto rovnice popisuju dynamicke situacie

  mozme sa vsak zaujimat o take riesenia rovnic

  $$(\partial_t - \Delta)u = 0 \ , \ (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \tag{6.1}$$

  ktore nezavisia od casu. napriklad preto, ze sme ich na zaciatku nainicialozovali tak, ze sa pocaitocna podmienka nebude menit, alebo preto ze sme pockali dostatocne dlho na to, aby sa riesenie ustalilo a prestalo sa v case menit (vedenie tepla, trenie)

  z fyzikalneho hladiska ide napriklad o elektrostaticke problemy, o tvar membran natiahnutych na zadany ram, vedenie tepla v ustalenom stave

- na zaciatok budeme studovat vlastnosti rieseni Poissonovej rovnice

  $$\Delta u = f \tag{6.2}$$

  pricom homogenna rovncia $\Delta u = 0$ nesie specialne meno Laplacovej rovnice (jej riesenia su doslezite pri hladani greenovych funkcii pre zadanu okrajovu podmienku, ale o tom potom)

- aky druh podmienok vieme nalozit na riesenia (6.2)

  ukaze sa, ze Cauchyho pociatocne podmienky nie, nakolko taketo riesenia nie su stabilne : ilustracny priklad, ktory pochadza od Hadamarda

  Cauchyho uloha pre Laplaceovu rovnicu v dvoch rozmeroch s pociatocou podmienkou

  $$u(x_1, 0) = 0 \ , \ u(x_1, 0)_{x_2} = \psi_n(x_1) = \frac{\sin(nx)}{n} \tag{6.3}$$

  ma riesenie

  $$u_n(x_1, x_2) = \frac{\sinh(nx_2)\sin(nx_1)}{n^2} \tag{6.4}$$

  rovnica s homogennou pociatocnou podmienkou ma nulove riesenie $u_0(x_1, x_2) = 0$. pre lubovolne ε viem zvolit n tak, aby

  $$|\psi_n(x_1)| < \varepsilon \ \forall x_1 \tag{6.5}$$

  a teda pociatocne podmienky pre tieto dve riesenia su lubovolne blizko pri sebe. avsak nech je n akekolvek, plati

  $$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists L \ , \ |u_n - u_0| > K \ \forall x_2 > L \tag{6.6}$$

  a teda riesenia u_n a u_0 su od seba lubovolne daleko. cauchyho uloha pre laplaceovu rovnicu je nestabilna

6.1 Klasifikacia okrajových úloh

- riesime teda Poissonovu rovnicu
$$\Delta u = f \ , \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{6.7}$$
kde Ω je hladka, ohranicena, spojita oblast, jej hranicu $\partial\Omega$ budeme oznacovat S (tj. mnozinu bodov, pre ktore neexistuje otvorena mnozina, ktora by bola cela dnu alebo cela von, nemusi nutne platit $S \subset \Omega$)
- budeme sa stretavat s tymito tromi druhmi okrajovych uloh (nie nutne na celom S tie iste, moze byt kombinovane)

6.1.1 Dirichletova okrajová úloha

- funckia zadana na hranici oblasti
$$u|_{x\in S} = \phi(x) \tag{6.8}$$
pre zadanu funkciu ϕ

zodpoveda fixovanemu okraju, fixovanej teplote, zadanemu potencialu

6.1.2 Neumanova okrajová úloha

- normalnova derivacia zadana na hranici oblasti
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in S} = \psi(x) \tag{6.9}$$
pre zadanu funkciu ψ

zodpoveda volnemu okraju, zadanemu toku tepla, zadanej hustote naboja

6.1.3 Robinova okrajová úloha

- zadana kombinacia
$$\alpha_1 u + \alpha_2 \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in S} = g(x) \tag{6.10}$$
pre zadanu funkciu ψ

zodpoveda okraju na pruzine, vymienaniu tepla s okolim s nulovou teplotou podla Fourierovho zakona

6.2 Vlastnosti harmonických funkcií

- hladke riesenia Laplacovej rovnice v zadanej oblasti Ω budu hrat specialnu ulohu, maju specialne vlastnosti a preto aj specialne meno, harmonicke funkcie a oznacenie v

  nebudeme od nich ziadat ziadne vlastnosti na hranici S, v zmysle ze konretna harmonicka funkcia ma konkretne vlastnosti na S a nas moze zaujimat aka konkretna harmonicka funkcia ma tieto vlastnosti, ale na vseobecnu harmonicku funckiu nebudeme nakladat ziadne okrajove podmienky a lubovolne riesenie $\Delta v = 0$ v celej oblasti Ω nazveme harmonickou funkciou

Veta o strednej hodnote

- klucovou vlastnostou harmonickych funkcii je nasledujuce tvrdenie (veta o strednej hodnote)

  pre harmonicku funkciu v plati

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \oint_{\partial B(x,\rho)} dS_y v(y) \tag{6.11}$$

  pre lubovolnu gulu $B(x,\rho)$ ktora je cela v nasej oblasti, $B(x,\rho) \in \Omega$ a kde ω_n je povrch jednotkovej n rozmernej gule

  znamena to teda, ze funkcna hodnota harmonickej funkcie je dana ako aritmeticky priemer hodnot na lubovolnej (!!!) guli ktora cela lezi v oblasti harmonicity

  tvrdenie vyplyva z explicitneho vypoctu. kedze operator Δ je translacne invariantny, mozme si bod x premiestnit do pociatku a nic nepokazime, zadefinujeme funkciu

$$\mu(\rho) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \oint_{\partial B(0,\rho)} dS_y v(y) \tag{6.12}$$

  a vypocitame jej derivaciu podla ρ. na to preskalujeme premennu y hodnotou ρ, co da

$$\mu(\rho) = \frac{1}{\omega_n} \oint_{\partial B(0,1)} dS_y v(y\rho) \tag{6.13}$$

  a jedine mieste kde sa na pravej strane nachadza ρ je v argumente v a mozme pisat

$$v(y \cdot (\rho + d\rho)) = v(y_1\rho + y_1 d\rho, \ldots) = v(y_1\rho, \ldots) + \frac{\partial v}{\partial y_i} y_i d\rho \tag{6.14}$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{\partial v}{\partial y_i} y_i \tag{6.15}$$

  druhy clen je derivacia $\nabla v \cdot y$ a teda derivacia v v smere y, ktory lezi na jednotkovej sfere a teda derivacia v v smere n, cim dostavame

$$\mu' = \oint_{|y|=1} \frac{\partial u}{\partial n} dS_y = \oint_{|y|=1} \nabla v \cdot dS_y = \int_{|y|<1} \Delta v dV_y = 0 \tag{6.16}$$

  kde sme pouzili Gaussovu vetu. funckia $\mu(\rho)$ je teda konstanta a pre spojitu v ju mozme vypocitat v limite $\rho \to 0$, co da $\mu(0) = v(0)$ a bude mat tuto hodnotu vsade, cim je dokaz dokonany

- tato veta plati aj opacne, a kazda funkcia ktora splna (6.11) je harmonicka v danej oblasti

  veta o strednej hodnote sa da prepisat aj ako integraovanie cez objem celej gule $B(x,\rho)$

Príklad 47. Prepíšte vetu o strednej hodnote harmonickej funkcie (6.11) do tvaru, v ktorom sa bude integrovať cez celý objem gule. □

Princípm minima a maxima

- oblast Ω nie je nutne uzavreta, takze nemozme rozpravat o maximach a minimach v na Ω, ale mozme hovorit o supreme a infime, oblast $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ uz uzavreta je, takze mozme hovorit o maxime a minime

  z vety o strednej hodnote vyplyva nasledujuce tvrdenie

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_S v \ , \ \min_{\bar{\Omega}} v = \min_S v \tag{6.17}$$

  harmonicka funckia teda dosahuje svoje maximum a minimum na hranici oblasti, kde je harmonicka

  z toho dostaneme, ze funkcia ktora ma maximum vo vnutry oblasti je nutne konstantna, ako bude jasne z nasledujuceho dokazu

- nech funkcia v nadobuda maximum v niektorom vnutornom bode $x_0 \in \Omega$, oznacme hodnotu tohto maxima $v(x_0) = M$ a zostrojme gulu so stredom v bode x_0 tak, aby bola cela v Ω

  funckia v ma potom na celej tejto guli hodnotu M. ak by v niektorych miestach mala mensiu hodnotu, musela by mat v niektorych miestach vacsiu hodnotu, nakolko priemer vsetkych hodnot je M, ale to nie je mozne nakolko M je maximalna hodnota, na zaklade toho musi mat hodnotu vsade na tejto guli, vsade v tejto guli a teda vsade v Ω

- **Dirichletov princip** - zo vsetkcyh funkcii, ktore splnaju $u|_{\partial\Omega} = \phi$ harmonicka funkcia minimalizuje hodnotu funkcionalu

$$E = \frac{1}{2} \int_\Omega dV \, |\nabla u|^2 \tag{6.18}$$

  Príklad 48. Dokážte Dirichletov princíp (6.18). □

- trivialny dosledok vety o minime a maxime je fakt, ze harmonicka funkcia ktora je na hranici Ω konstantna je nutne konstantna aj v celom objeme Ω

$$\forall x \in S \, v(x) = c \ \Rightarrow \ \forall x \in \Omega \ v(x) = c \tag{6.19}$$

Dôsledky pre jednoznačnosť a stabilitu riešenia okrajových úloh

- trivialnym dosledkom tohto trivialneho dosledku je jednoznacnost riesenia Dirichletovej okrajovej ulohu pre Poissonovu rovnicu

  ak by sme mali totiz dve riesenia u_1 a u_2, ich rozdiel je harmonicka funckia s homogennou okrajovou podmienkou a teda nula vsade v Ω

- poznamenajme, ze tu je klucova spojitost hranice a spojitost okrajovej podmienky na hranici, o com nas presvedci nasledujuci dvojrozmerny priklad

  ak hladame hramonicku funkciu v oblasti $\Omega = \{|x| < 1, x_2 > 0\}$ a teda polkruh a okrajovu podmienku zadame nulovu az na bod $(0, 0)$, potom ma uloha $\Delta v = 0$ ocividne riesenie $v = 0$ ale aj riesenie $v = Im(z + z^{-1}), z = x_1 + ix_2$

Príklad 49. Overte, že takto zadaná funkcia je hamronická a spĺňa okrajovú podmienku. □

- podobne dostaneme dokaz o stabilite riesenia Dirichletovej ulohy pre Poissonovu rovnicu. nech $u_{1,2}$ je riesenie s okrajovou podmienkou $\phi_{1,2}$, potom dostavame ze rozdiel $w = u_1 - u_2$ je riesenie Laplaceovej rovnice s okrajovou podmienkou $\phi_1 - \phi_2$

  ak zoberieme $|\phi_1 - \phi_2| < \varepsilon$, potom maximum w na hranici je ε a minimum je $-\varepsilon$, co ale znamena ze to je maximom a minimom aj vo vnutry. to ale znamenana ze

  $$|u_1 - u_2| < \varepsilon \ \forall x \in \Omega \tag{6.20}$$

  a teda ze riesenie je stabilne voci malej zmene okrajovej podmienky

- dokazeme este istu mieru jednoznacnosti riesenia Neumannovej ulohy pre Poissonovu rovnicu. majme dve riesenia $u_{1,2}$ tej istej ulohy. zostrojme $w = u_1 - u_2$

  DOPLNIT CEZ MIN MAX

  po pripade mozme vo vztahu (6.39) z nasledujucej casti pouzit $u_1 = u_2 = w$ a dostaneme

  $$\int_\Omega dV |\nabla w|^2 = 0 \tag{6.21}$$

  a kedze $|\nabla w|^2 \geq 0$ dostavame $\nabla w = 0$ a teda $w = const$ a dve riesenie Neumanovej ulohy sa mozu riesit najviac o konstantu (vseobecne roznu konstantu pre rozne dvojice rieseni)

6.3 Riešenie Dirichletovej okrajovej úlohy

- nas plan utoku je nasledovny

  riesenie budeme hladat podobne ako predtym, najskor najdeme specialne riesenie s $f = \delta$ a potom z neho skonstruujeme riesenie vseobecnej ulohy

  problemom bude okrajova podmienka, ktoru vyriesime pomocou rozumneho vyuzitia volnosti v greenovej funkcii

- v tejto casi bude greenova funkcia cosi trochu ine ako predtym, fundamentalne riesenie bude to iste ako predtym, ale Greenova funkcia nebude fundamentalne riesenie, ale fundamentalne riesenie uz s touto vhodnou volbou homogenneho riesenia (=hramonickej funkcie)

6.3.1 Fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice

- budeme hladat riesenie rovnice

  $$\Delta u = \delta \tag{6.22}$$

  bez akychkolvek podmienok na Ω a pojde teda cisto o vlastnost Laplaceovho operatora

  riesenie budeme oznacovat K a nazyvat fundamentalne riesenie Poissonovej rovnice, najdeme ho ako limitu $a \to 0$ fundamentalneho riesenie operatora $\Delta - a^2$ a to najdeme fourierovou transformaciou

- v casti 5.1 sme ukazali, ze pre fourierovu transformaciu $F[K]$ plati

$$F[K] = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{|\xi|^2 + a^2} \tag{6.23}$$

ostava teda obratit tento vyraz

$$\begin{aligned} K =& -\frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n\xi \frac{1}{|\xi|^2 + a^2} e^{-i\xi\cdot x} = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty d\alpha\, e^{-a^2\alpha} \int d^n\xi\, e^{-|\xi|^2\alpha - i\xi\cdot x} = \\ =& -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty d\alpha \frac{\pi^{n/2}}{\alpha^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha} - a^2\alpha} = -\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{|x|}{2a}\right)^{1-2/n} \int_0^\infty d\alpha\, \alpha^{-n/2} e^{-(\alpha+\alpha^{-1})\frac{|x|^2 a^2}{2}} \end{aligned} \tag{6.24}$$

na tomto mieste vypocitame vseobecnejsi integral

$$I = \int_0^\infty d\alpha\, \alpha^{-m} e^{-(\alpha+\alpha^{-1})\frac{z}{2}} \tag{6.25}$$

substitusciou $\alpha = e^u$ dostaneme integral

$$I = \int_{-\infty}^\infty du\, e^{u(1-m) - z\cosh u} = 2\int_0^\infty du\, \cosh\left[u(1-m)\right] e^{-z\cosh u} \tag{6.26}$$

s troskou sklamania skonstatujeme, ze dalej sa nepohneme a posledny vyraz je definiciou modifikovanej beselovej funkcie, co da vysledok

$$I = 2K_{m-1}(z) \tag{6.27}$$

pre fundamentalne riesenie operatora $\Delta - a^2$ teda dostavame

$$K = -\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{|x|}{2a}\right)^{1-2/n} 2K_{\frac{n}{2}-1}(a|x|) \tag{6.28}$$

ostava spravit limitu $a \to 0$, pre $n > 2$ nam pomoze asymptoticke vyjadrenie modifikovanej Besselovej funkcie

$$K_b(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(b) \left(\frac{2}{z}\right)^b \tag{6.29}$$

toto dosadime do predchadzajuceho vzorca a dostavame vztah, ktory je dobre definovany v limite maleho a a potom upravujeme

$$K = -\frac{1}{4\pi^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{1}{|x|^{n-2}} = \frac{1}{2-n} \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\frac{n}{2}}\right)^{-1} \frac{1}{|x|^{n-2}} = \tag{6.30}$$

$$= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \tag{6.31}$$

kde sme spoznali

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{6.32}$$

povrch jednotkovej sfery v n rozmeroch

- ostava si vyjasnit pripad $n = 2$ v ktorom asymptotika Besselovej funkcie vyzera inak

$$K_0(z) \sim -\log\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma \tag{6.33}$$

po tom co zahodime (nekonecnu) konstantu dostaneme

$$K = \frac{1}{2\pi}\log|x| \tag{6.34}$$

- tieto vzorce sa daju odvodit aj inym sposobom

ak budeme hladat riesenie v tvare $K(|x|) \equiv K(r)$, rovnica $\Delta K = 0$ pre $r > 0$ da[13]

$$K'' + \frac{n-1}{r}K' = 0 \tag{6.35}$$

jej riesenie hladame v tvare r^α, pricom pri $\alpha = 0$ sa musime mat na pozore. rovncia da $\alpha = 2-n$ a teda pre $n > 2$ dostaneme az na konstantu to iste ako predtym. konstantu dopocitame z podmienky

$$\int_{B(0,R)} dV_y K(y) = 1 \tag{6.36}$$

a podobne pre dva rozmery

6.3.2 Greenova funkcia pre Dirichletovu úlohu a jej riešenie

- Greenovu funkciu $G(x,y)$ pre $x, y \in \Omega$ zadefinujeme ako riesenie ulohy

$$\Delta G(x,y) = \delta(x-y) \tag{6.37a}$$
$$G(x,y)|_{x\in S} = 0 \tag{6.37b}$$

vidime teda, ze ide o vlastnosti operatora Δ a oblasti Ω ale nie je to vlastnost konkretnej ulohy f, ϕ

- kedze ide o specialny pripad Dirichletovej ulohy, vieme ze ma jednoznacne riesenie, riesenie bude v tvare $G(x,y) = K(x-y) + v(x,y)$ kde harmonicka funkcia v musi splnat

$$\Delta v(x,y) = 0 \tag{6.38a}$$
$$v(x,y)|_{x\in S} = -K(x-y)|_{x\in S} \tag{6.38b}$$

aj toto je Dirichletova uloha teda aj takato funckia v existuje najviac jedna. ak ju teda (akokolvek) najdeme, vieme, ze uz dalej hladat nemusime

- pred tym, ako si ukazeme ako hladat Greenovu funkciu si ukazeme, ako ju pouzijeme na riesenie Dirichletovej ulohy

[13] Pripomienka radialnej casti laplacianu $\Delta_r = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d}{dr}\right)$

- pre dve funkcie $w_1(x), w_2(x)$ na Ω plati

$$\int_\Omega dV\, \nabla w_1 \cdot \nabla w_2 = \oint_S w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n} dS - \int_\Omega dV\, w_1 \Delta w_2 \tag{6.39}$$

co je viac rozmerna verzia vzorca pre integrovanie per partes

ked teraz od seba odcitam dve verzie s vymenenym u_1 a u_2 dostaneme Greenov vzorec

$$\int_\Omega dV\, (w_1 \Delta w_2 - w_2 \Delta w_1) = \oint_S dS\, \left(w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n} - w_2 \frac{\partial w_1}{\partial n} \right) \tag{6.40}$$

ten sa ukaze byt klucovy

dostavame z neho napriklad symetriu Greenovej funkcie (pripad $w_1 = w_2 = G$)

- v (6.40) zobereiem $w_1 = u, w_2 = G(x, y)$ dostavame

$$\int_\Omega dV_y\, (u(y) \Delta G(y, x) - G(y, x) \Delta u(y)) = \oint_S dS_y\, \left(u(y) \frac{\partial G(y, x)}{\partial n_y} - G(y, x) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) \tag{6.41}$$

vyuzijeme teraz, ze u je riesenie ulohy (6.7,6.8) a teda ze pozname Δu aj u na hranici S. derivaciu u na hranici nepozname, ale tu vstupy do hry definicia Greenovej funkcie, vdaka ktorej clen v ktorom by sme tuto vedomost potrebovali vypadne. dostavame

$$u(x) = \int_\Omega dV_y f(y) G(x, y) + \oint_S dS_y\, \phi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \tag{6.42}$$

toto je vztah ktory dava riesenie Dirichletovej ulohy v uzavretej oblasti Ω a teda dokazuje existenciu riesenia tejto ulohy

- interpretacia clenov je mozna na zaklade analogie s elektrostatikov a vedenim tepla

  elektrostaticka analogia

  cast $f(y)K(x-y)$ hovori o potencialy, ktory bude bodovy naboj ulozeny v mieste $f(y)$ v mieste x

  cast $f(y)v(x, y)$ hovori o potencialy, ktory v mieste x budi naboj, ktory rozlozenie naboja $f(y)$ indukovalo na vodici, ktory tvori hranicu oblasti Ω (viac v casti o imaginarnych nabojoch)

  interpretovat druhy clen je trochu zlozitejsie, matematicky ide o potencial dvojvrstvy (priklad) v mieste x - hustota naboja σ_+ na jednej vrstve a σ_- sa vrstve ktora je velmi blizko, v limite su obe S_y, ide potom o rozlozenie dipoloveho momentu velkosti $\phi(y)$ v smere vektora n_y - potencial na dvojvrstve ma skok presne dany hustotou σ, co je presne to co chceme - z nuloveho potencialu mimo oblasti dostat nejaky zadany potencial $\phi(y)$ na hranici

  vodic zo zadanym rodelenim potencialu je teda rovnaky, ako uzemneny vodic, ktory ma v kazdom mieste ulozeny dipol s dipolovym momentom danym povodnym potencialom (a v smere normaly v danom mieste)

  cast $\frac{\partial v}{\partial n_y}$ potom zodpvoeda efektu, ktory ma tento dipol na volne naboje v tomto uzemnenom vodici a zodpoveda nejakemu imaginarnemu dipolu

tepelna analogia

druhy clen mozno interpretovat ako riesenie ulohy o vedeni tepla bez vnutornych zdrojov f, funckia $\partial G/\partial n$ potom hovori, ako sa fixovana teplota $\phi(y)$ na hranici S prejavi v mieste x

- pred tym ako sa pustime do konstrukcie Greenovej funkcie si ilustrujme ziskane vtahy na velmi jednoduchom priklade

Príklad 50. Metódou Greenovej funckie nájdite riešenie jednorozmernej úlohy na intervale $(0,1)$ s pravou stranou f a okrajovou podmienkou $u(0) = A, u(1) = B$. □

Riešenie. V prvom rade si uvedomme, ze preskalovanim premennej x by sme mohli lubovolny interval (a,b) previest na takyto tvar a teda uloha nie je az taka specialna ako sa zda. V druhom rade si spomenme, ze v pripade jedneho rozmeru $K = \frac{1}{2}|x|$ a teda

$$G(x,y) = \frac{1}{2}|x-y| + v(x,y) \tag{6.43}$$

tak, ze $\partial_x^2 v(x,y) = 0$ a teda $v(x,y) = \alpha x + \beta$, kde α, β su nejake funkcie y. Z podmienky $v(0,y) = -\frac{1}{2}|y|, v(1,y) = -\frac{1}{2}$ a z toho ze $y \in (0,1)$ dostaneme

$$\beta = -\frac{1}{2}y \ , \ \alpha = \frac{1}{2}(2y-1) \tag{6.44}$$

co da

$$G(x,y) = \frac{1}{2}|x-y| + xy - \frac{1}{2}(x+y) \tag{6.45}$$

Na okrajoch plati

$$\frac{\partial}{\partial n_y} = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y} & y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & y = 1 \end{cases} \tag{6.46}$$

pricom

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = -\theta(x-y) + x \tag{6.47}$$

pre druhy clen v (6.42) dostaneme

$$\oint_S dS_y\, \phi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = \sum_{y=0,1} \phi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = \phi(1)\left[-\theta(-1) + x\right] + \phi(0)\left[-\left(-\theta(0) + x\right)\right] =$$
$$= (B-A)x + A \tag{6.48}$$

Prvy clen upravujeme

$$\int_0^1 dy\, f(y) G(x,y) = -\int_0^1 dy\, F(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} + F(y) G(x,y)|_{y=0,1} \tag{6.49}$$

kde F je primitivna funkcia k f, a teda $F'(y) = f(y)$. Druhy clen vypadne (explicinte alebo z konstrukcie Greenovej funkcie). V druhom clene dostaneme

$$\int_0^1 dy\, F(y)\theta(x-y) + x \int_0^1 dy\, F(y) \tag{6.50}$$

druhy clen môže byť nulovy, nakolko F mozme posunut o lubovolnu konstantu a teda mozme ju nastavit tak, aby $\int_0^1 dyF(y) = 0$, druhy clen da $\int_0^x dy\, F(y)$, cize dostavame

$$u(x) = \int_0^x dy \int dy f(y) + (B - A)x + A \tag{6.51}$$

co je presne funkcia ktoru sme cakali. ■

6.3.3 Konštrukcia Greenovej funkcie metódou imaginárnych nábojov

- doteraz sme sa zaoberali ohranicenymi oblastami, nasledovat vsak bude hned ako prvy pripad oblast, ktora nie je ohranicena, pricom sa samozrejme budeme tvarit ako keby sa nic nestalo

  je teda namieste komentar co s tym. pripad neohranicenej oblasti budeme zavadzat ako pripad ohranicenej oblasti, ktora rastie. integraly ktore vystupuju vo vzorci (6.42) teda budu nevlastne a musime si davat pozor na to, aby boli dobre definovane a konvergovali. vzdy ked prichadzame do kontaktu s neohranicenou oblastou si na to musime davat pozor.

  that said, budeme s neohranicenymi oblastami pracovat, ako keby sa nechumelilo

- ukazeme si teraz metodu imaginarnych nabojov na niekolkych prikladoch

  idea by potom mala byt jasna

- **Greenova funkcia polpriestoru v dvoch rozmeroch** za oblast zoberieme polpriestor v 2D, takze

  $$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\right\} \tag{6.52}$$

  a hladame Greenovu funckiu, ktora bude mat tvar $G = \log|x - y|/2\pi + v$, kde harmonicka v splna

  $$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - y|\Big|_{y_1=0} \tag{6.53}$$

  ak zadefinujeme vektor $y' = (-y_1, y_2)$ je jasne ze $|\tilde{x} - y| = |\tilde{x} - y'|$ pre vsetky $y \in \Omega, \tilde{x} \in S$ a teda ak zoberieme za v

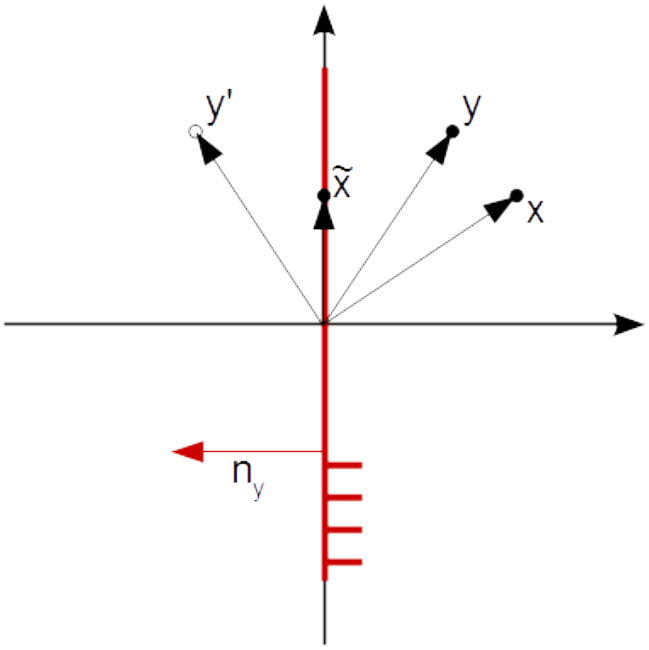
  $$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - y'| \tag{6.54}$$

  kedze $y' \notin \Omega$ tato funkcia je harmonicka a splna vztah (6.53). ale z jednoznacnosti riesenia Dirichletovej ulohy vieme, ze ine v neexistuje a nasa uloha je splnena a mame

  $$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\log|x - y| - \log|x - y'|\right) \tag{6.55}$$

  ostava dopocitat $\frac{\partial G}{\partial n_y}$. kedze normala smeruje von z objemu, dotavame

  $$\frac{\partial}{\partial n_y}\Big|_{y \in S} = -\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{6.56}$$



Obr. 26: Greenova funkcia v polpriestore.

pocitame

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\log|x-y| = \frac{1}{2}\frac{1}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}2(x_1-y_1)(-1) \tag{6.57a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\log|x-y'| = \frac{1}{2}\frac{1}{(x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2}2(x_1+y_1) \tag{6.57b}$$

a teda

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\right|_{y\in S} = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{x_1-y_1}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\right|_{y_1=0} + \frac{1}{2\pi}\left.\frac{x_1+y_1}{(x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\right|_{y_1=0} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1}{x_1^2+(x_2-y_2)^2} \tag{6.58}$$

co dava riesenie celej ulohy

$$u(x_1,x_2) = \int_0^\infty dy_1\int_{-\infty}^\infty dy_2\, f(y_1,y_2)\frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{(x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\right) +$$
$$+ \int_{-\infty}^\infty dy_2\,\phi(y_2)\frac{1}{2\pi}\frac{2x_1}{x_1^2+(x_2-y_2)^2} \tag{6.59}$$

aby mal vysledok zmysel, musia byt funkcie f,ϕ take, aby oba tieto integraly davali zmysel

Príklad 51. Najdite dvojrozmerné riešenie Laplaceovej rovnice v polrovine $x_1 > 0$ pre okrajovú podmienku

$$\phi(x_2) = \delta(x_2)\ , \tag{6.60}$$

$$\phi(x_2) = \frac{x_2}{x_2^2+1}\ . \tag{6.61}$$

□

- **Greenova funkcia stvrtpriestoru v dvoch rozmeroch** pozrime sa teraz na komplikovanejsiu oblast

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \{x_1 > 0, x_2 > 0\} \tag{6.62}$$

Greenova funkcia pre polpriestor bola zlozena z dvoch „nabojov“, jedneho v y a druheho v y'

ked ju teraz chceme vynulovat aj na priamke $x_1 = 0$, potrebujeme ku kazdemu z nich pridat nulujuci naboj, tj. jeden zaporny do (y_1, y_2) a jeden kladny do $(-y_1, -y_2)$, ak tieto miesta oznacime postupne y'', y''', dostaneme Greenovu funkciu

$$G(x, y) = K(x - y) - K(x - y') - K(x-'') + K(x - y''') \tag{6.63}$$

nie je problem overit, ze dvojica pridanych nabojov dava nulovy prispevok na priamke $x_1 = 0$ a teda nekazi povodnu okrajovu podmienku

- ostava si vyjasnit, ako vyzera derivovanie v smere normaly na hraniciach oblasti, co tiez nie je tazke

$$y_1 = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial}{\partial n_y} = -\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{6.64}$$

$$y_2 = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial}{\partial n_y} = -\frac{\partial}{\partial y_2} \tag{6.65}$$

Príklad 52. V dvoch rozmeroch najdite potenciál v priestore medzi dvomi kolmými priamkami, keď jedna je uzemnená a na druhej držíme potenciál $\phi(y_1)$. Pre aký tvar funkcie ϕ má úloha riešenie. □

- idea metódy imaginarnych nabojov je teda zrejma - kazda rovina vyrobi zrkadlovy obraz naboja a zmeni jeho znamienko

  pritom treba vyrabat zrkadlove obrazy aj novych obrazov, pokial su v oblasti, ktora je pre danu rovinu skutona (aj ked pre ine nie je)

- ine dvojrozmerne oblasti - priestor medzi dvomi priamkami $0 < x_1 < 1$, priestor medzi dvomi priamkami zvierajucimi uhol $\pi/4$, pripadne vseobecny uhol, stvorec

- **Greenova funkcia polriestoru v n rozmeroch** by uz nemusela byt ziadny problem. ak je polpriestor definovany podmienkou $x_i > 0$, potom zadefinujeme $y' = (y_1, \ldots, -y_i, \ldots)$ a Greenova funkcia bude

$$G(x, y) = K(x - y) - K(x - y') \tag{6.66}$$

ak y patri na hranicu, potom $y = y'$ a $|x - y| = |x - y'|$ a teda $G(x, y)_{y \in S} = 0$

rovnako ak x patri na hranicu $|x - y| = |x - y'|$ a $G(x, y)_{y \in S} = 0$

- **Poissonovo jadro** vidime ze vo vztahu pre riesenie Dirichletovej ulohy (6.42) v druhom clene vystupuje derivacia Greenovej funkcie, ktoru mozme vypocitat pre danu oblat raz a navzdy. tomuto vysledku sa hovori Poissonovo jadro, oznacuje sa $H(x, y)$ a cast riesenia za okrajovu podmienku ma potom tvar

$$\oint_S dS_y \, \phi(y) H(x, y) \tag{6.67}$$

vypocitajme teraz toto jadro pre polriestor $x_i > 0$. postupne pocitame

$$\frac{\partial K(x-y)}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\omega_n(2-n)}\left(\sum_j (x_j-y_j)^2\right)^{1-n/2} = \frac{1}{\omega_n(2-n)}\left(1-\frac{n}{2}\right)\frac{2(x_i-y_i)(-1)}{\left(\sum_j (x_j-y_j)^2\right)^{n/2}} =$$
$$= -\frac{1}{\omega_n}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n} \tag{6.68}$$

poznamenajme ze tento vztah plati aj v pripade $n = 2$. podobny vypocet da

$$\frac{\partial K(x-y')}{\partial y_i} = \frac{1}{\omega_n}\frac{x_i+y_i}{|x-y'|^n} \tag{6.69}$$

kdeze na hranici $|x-y| = |x-y'|$, dostavame

$$H(x,y) \equiv \left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\right|_{y\in S} = \frac{2x_i}{\omega_n|x-y|^n} \tag{6.70}$$

- ak teda hladame harmonicku funkciu v zadanu na hranici polpriestoru, riesenim je

$$v(x) = \frac{2x_i}{\omega_n}\int_{y_i=0} d^{n-1}y\,\frac{\phi(y)}{|x-y|^n} \tag{6.71}$$

- ODBOCKA - n-rozmerny dipol a H ako potencial dipoloveho rozdelenia, potencial dvojvrstvy - DOPLNIT

- **Greenova funkcia pre dvojrozmernu gulu** - pozrime sa teraz na oblast

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \{|x| < R\} \tag{6.72}$$

ak pre $x \in \Omega$ zadefinujeme

$$y^* = \frac{R^2}{|y|^2}y \tag{6.73}$$

tj. obraz bodu x pri kruznicovej inverzii, z kosinusovej vety lahko overime, ze pre bod $\tilde{x} \in S$ plati

$$|\tilde{x}-y^*| = \frac{R}{|y|}|\tilde{x}-y| \tag{6.74}$$

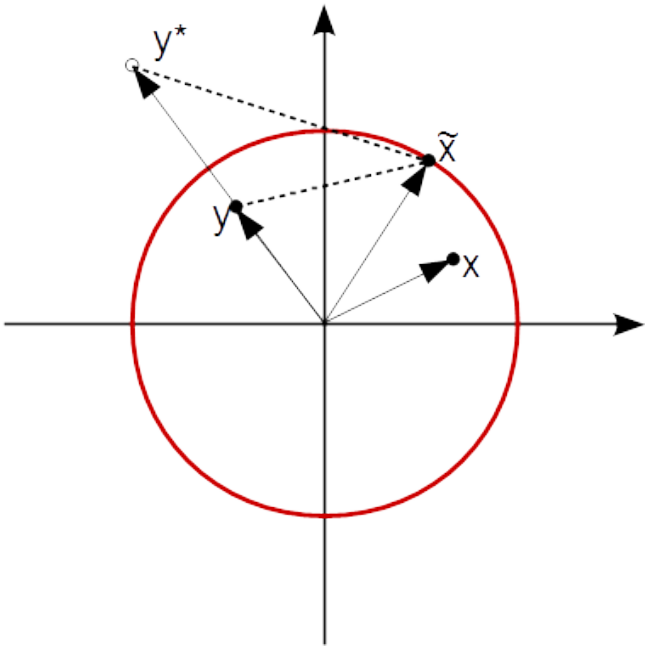
toto by sme dostali aj zdefinicie gule ako mnoziny bodov, ktore maju konstantny sucin vzdialenosti od zadanych dvoch bodov (v nasom pripade su tieto dva body y, y^*)

zoberme teraz (sme v dvoch rozmeroch)

$$v(x,y) = -K\left(\frac{|y|}{R}(x-y^*)\right) = \frac{1}{2\pi}\log\left[\frac{|y|}{R}|x-y^*|\right] \tag{6.75}$$

kedze pre $\tilde{x} \in S$ plati (6.74), dostavame

$$v(x,y)|_{x\in S} = -K(x-y)|_{x\in S} \tag{6.76}$$



Obr. 27: Greenova funkcia v gulovej oblasti.

kedze $y^* \notin \Omega$, takato v je harmonicka v Ω a Greenova funkcia bude mat tvar

$$G(x,y) = K(x-y) - K\left(\frac{y}{R}(x-y^*)\right) \tag{6.77}$$

pripadne by sme rovnaky vysledok pre v dostali z explicitneho tvaru rovnice $\Delta v = 0$ s okrajovou podmienkou (6.75) separaciou premennych

vsimnite si, ze neide o imaginarny naboj opacneho znamienka v mieste y^*, je k nemu este dorobeny dalsi prispevok

situacia v n rozmeroch bude trochu ina (ale nie velmi)

- pred tym ale vypocitajme **Poissonovo jadro** pre kruhovu oblast. plati

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \nabla G \cdot n = \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}, \frac{\partial G}{\partial y_2}\right) \cdot \left(\frac{y_1}{|y|}, \frac{y_2}{|y|}\right) \tag{6.78}$$

urobime explicitny vypocet, avsak pre $\frac{\partial G}{\partial n_x}$ a kedze G je symetricke, na konci vypoctu budeme moct vymenit x a y (toto este premysliet a mozno doplnit aj explicitny vypocet)

pocitame

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} - \frac{1}{2\pi}\frac{x_1 - y_1^*}{|x-y^*|^2} \tag{6.79a}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi}\frac{x_2 - y_2}{|x-y|^2} - \frac{1}{2\pi}\frac{x_2 - y_2^*}{|x-y^*|^2} \tag{6.79b}$$

$$\nabla G \cdot n_x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(x-y)\cdot x}{|x-y|^2|x|} - \frac{(x-y^*)\cdot x}{|x-y^*|^2|x|}\right] \tag{6.79c}$$

mame

$$(x - y^*) \cdot x = |x|^2 - \frac{R^2}{|y|^2} y \cdot x \tag{6.80}$$

co da

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_x} =& \frac{1}{2\pi |x||x-y|^2} \left[|x|^2 - y \cdot x - \left(|x|^2 - \frac{R^2}{|y|^2} y \cdot x \right) \frac{1}{|R|^2/|y|^2} \right] = \\ =& \frac{1}{2\pi |x||x-y|^2} \left(|x|^2 - \frac{|x|^2 |y|^2}{R^2} \right) \end{aligned} \tag{6.81}$$

ak teraz vymenime x a y, zoberieme $|y| = R$ a upravime dostaneme vyraz pre Poissonovo jadro pre kruhovu oblast

$$H(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^2} \tag{6.82}$$

a pre harmonicku funkciu v kruhu zadanu na jeho obvode dostaneme Poissonovu formulu

$$u(\rho, \theta) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\phi(\vartheta)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \vartheta)} \tag{6.83}$$

specialne ak $\phi = const$, potom vieme ze v je rovne tejto konstante aj vsade v kruhu a dostavame zaujimavu identitu pre integral na pravej strane

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \vartheta)} = \frac{2\pi}{R^2 - \rho^2} \tag{6.84}$$

Príklad 53. Nájdite Greenovu funkciu pre polkruhovú oblasť

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \{|x| < R, x_2 > 0\} \tag{6.85}$$

□

- **Greenova funkcia pre gulu v n rozmeroch** - vztah (6.74) pre x^* (6.73) bude platit v lubovolne vela rozmeroch, takze ked v n rozmeroch vzmeme

$$v(x, y) = -K_n \left(\frac{y}{R} (x - y^*) \right) = - \left(\frac{R}{|y|} \right)^{n-2} K_n (x - y^*) \tag{6.86}$$

dostaneme opat

$$v(x, y)|_{x \in S} = - K_n (x - y)|_{x \in S} \tag{6.87}$$

a teda

$$G(x, y) = K_n (x - y) - \left(\frac{R}{|y|} \right)^{n-2} K_n (x - y^*) \tag{6.88}$$

vsimnite si, ze v pripade $n > 2$ uz ma prispevok od v interpetaciu imaginarneho naboja s preskalovanou velkostou

podobny vypocet ako v dvojrozmernom pripade da

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \tag{6.89}$$

a dostaneme Poissonovu formulu v n rozmeroch

$$v(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \oint_S dS_y \frac{\phi(y)}{|x - y|^n} \tag{6.90}$$

6.4 Riešenie Neumannovej okrajovej úlohy

- už sme videli že dve riešenia Neumanovej úlohy

$$\Delta u = f \ , \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{6.91a}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x \in S} = \psi \tag{6.91b}$$

sa môžu líšiť najviac o konštantu

ukáže sa ale, že úloha nemusí nutne mať riešenie

6.4.1 Nutná podmienka pre existenciu riešenia

- pouzijeme (6.40) pre pripad $w_1 = 1$ a $w_2 = u$ riesenie ulohy (6.91), dostaneme

$$\oint_S dS\, \psi = \int_\Omega dV\, f \tag{6.92}$$

uloha (6.91) ma teda riesenie iba pre take funkcie f, ψ, ktore splnaju tuto podmienku, specialne pre homogennu rovnicu

$$\oint_S dS\, \psi = 0 \tag{6.93}$$

- tato podmienka ma osvetlujucu fyzikalnu interpretaciu ak si spomenieme na Poissonovu rovnicu ako na rovnicu pre ustalene prudenie tepla

  funkica f hovori o tom, ake zdroje tepla sa nachadzaju v objeme Ω, funkcia ψ hovori o tom, ako teplo do objemu cez jeho hranicu prudi

  podmienka (6.92) potom hovori jednoducho to, ze v ustalenom pripade teplo, ktore vyprodukuju zdroje v objeme musi vytiect cez jeho povrchu von. ak podmienka nie je splnena, stalene prudenie tepla v takej situacii neexistuje

6.4.2 Greenova funkcia pre Neumanovu úlohu a jej riešenie

- nasa strategia na riesenie neumannovej ulohy bude podobna ako pre dirichletovu ulohu, v Greenovom vzorci (6.40) pouzijeme $w_1 = G$ a $w_2 = u$ riesenie (6.91)

  G budeme volit tak, aby vypadol prvy clen a zostal iba clen, ktory obsahuje $\partial_n u$ na hranici objemu Ω

- tu ale narazame na problem, uloha

$$\Delta G(x, y) = \delta(x - y) \ , \ \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{6.94}$$

nema riesenie, nakolko nesplna podmienku (6.91), musime teda vymysliet nieco ine

pomoze nam, ze uloha neurcuje konstantu v rieseni

- Greenovu funkciu budeme hladat ako riesenie jemne modifikovanej ulohy

$$\Delta G_N(x,y) = \delta(x-y) - \frac{1}{\text{vol }\Omega}\ ,\ \left.\frac{\partial G_N}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{6.95}$$

lahko overime, ze takato uloha uz splna nutnu podmienku pre riesitelnost a ked jej riesenie dosadime do Greenovho vzorca spolu s u, dostaneme

$$u(x) = \int_\Omega dV_y\, f(y)G_N(x,y) - \oint dS_y \psi(y) G_N(x,y) + \int_\Omega dV_y \frac{u(y)}{\text{vol }\Omega} \tag{6.96}$$

kedze riesenie je urcene jednoznacne az na konstantu, posledny clen je konstanta a mozme pisat

$$u(x) = \int_\Omega dV_y\, f(y)G_N(x,y) - \oint dS_y \psi(y) G_N(x,y) + C \tag{6.97}$$

- Greenova funkcia sa da hladat aj ako riesenie ulohy

$$\Delta G_N(x,y) = \delta(x-y)\ ,\ \left.\frac{\partial G_N}{\partial n}\right|_S = \frac{1}{\text{vol }S} \tag{6.98}$$

kde vol S je $n-1$ rozmerny objem hranice S. presvedcte sa, ze to vedie na rovnaky vysledok u

- Greenovu funckiu G_N hladame opat ako $K(x-y)+v(x,y)$ a dostaneme podmienku

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = -\left.\frac{\partial K}{\partial n}\right|_S + \frac{1}{\text{vol }S} \tag{6.99}$$

6.4.3 Konštrukcia Greenovej funkcie metódou imaginárnych nábojov

- metodu budeme prezentovat este menej uplne ako v pripade dirichletovej ulohy ukazkov na jednom dvojrozmernom priklade
- poznamka o nekonecnosti tejto oblasti

Príklad 54. Nájdite Greenovu funkciu Neumanovej okrajovej úlohy pre polrovinu $x_1 > 0$. □

Riešenie. Potrebujeme teda najst taku funkciu harmonicku v nasej oblasti, aby platilo

$$\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = -\left.\frac{\partial K(x-y)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = -\frac{1}{2\pi}\frac{-y_1}{y_1^2+(x_2-y_2)^2} \tag{6.100}$$

Po skusenostiach z Dirichletovej ulohy nas neprekvapi, ze takouto funkciou je

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log|x-y'|\ ,\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\frac{x_1+y_1}{(x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\ . \tag{6.101}$$

Pre Greenovu funkciu teda dostavame

$$G_N(x,y) = \frac{1}{4\pi}\log\left[\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right)\cdot\left((x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right)\right] \tag{6.102}$$

co si pyta porovnanie s Greenovou funkciou pre rovnaku Dirichletovu ulohu (6.55).

$$G_N(x,y) = \frac{1}{4\pi}\log\left[\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{(x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\right] \tag{6.103}$$

■

6.5 Doplňujúce časti

Zovšeobecnený Laplaceov operátor

- prakticky vsetko z toho, co sme doteraz dostali pre laplaceov operator Δ prejde takmer bez zmeny pre vsobecnejsi operatorv v tvare

$$Lu = \nabla(k\nabla u) - qu \tag{6.104}$$

kde $k \in C^1(\Omega), q \in C(\Omega)$ su funkcie v oblasti Ω

v casti 3.2 sme videli ze $k(x)$ ma potom interpretaciu meniaceho sa koeficientu vedenia tepla

- pre funcie w_1, w_2 ktore maju vsetky prve derivacie a ktorych prve aj druhe derivacie su integrovatelne na Ω potom plati

$$-\int_\Omega dV\, w_1 L w_2 = \int_\Omega dV\, k\nabla w_1 \cdot \nabla w_2 + \int_\Omega q w_1 w_2 - \oint_S dS\, k w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n} \tag{6.105}$$

z coho dostaneme

$$\int_\Omega dV\, (w_1 L w_2 - w_1 L w_2) = \oint_S dS \left(w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n} - w_2 \frac{\partial w_1}{\partial n} \right) \tag{6.106}$$

ak teda teraz riesime ulohu

$$Lu = f \tag{6.107a}$$

$$\alpha_1 u + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = g \ , \ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq \ 0 \forall x \in \partial\Omega \tag{6.107b}$$

zadefinujeme

$$LG(x,y) = \delta(x-y) \tag{6.108a}$$

$$\alpha_1 G + \alpha_2 \frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_S = 0 \ \text{ pripadne modifikacia pre NU} \tag{6.108b}$$

v (6.106) pouzijeme $v = G$ a u riesenie (6.107a) dostaneme

$$u(x) = \int_\Omega dV_y\, f(y) G(x,y) + \oint_S dS_y k(y) \left(u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} - G(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \right) \tag{6.109}$$

a teda pre rozne okrajove ulohy da podobne vztahy ako predtym

$$\text{Dirichlet} \quad u(x) = \int_\Omega dV_y\, f(y) G(x,y) + \oint_S dS_y k(y) \phi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \tag{6.110a}$$

$$\text{Neuman} \quad u(x) = \int_\Omega dV_y\, f(y) G(x,y) - \oint_S dS_y k(y) \psi(y) G(x,y) + C \tag{6.110b}$$

$$\text{Robin} \quad u(x) = \int_\Omega dV_y\, f(y) G(x,y) - \oint_S dS_y k(y) \frac{g(y)}{\alpha_2(y)} G(x,y) \tag{6.110c}$$

Príklad 55. Rozmyslite si, ako je to teraz s jednoznačnosťou riešenia každej z úloh. □

Všeobecná dvojrozmerná oblasť

- v prípade dvoch rozmerov existuje fascinujúce spojenie s teóriou funkcie komplexnej premennej. tu spomenme len jednu
- ak v dvoch rozmeroch zavedieme komplexnu premennu $z = x_1 + ix_2$, greenovu funkciu pre jednotkovu kruznicu (**??**) mozme zapisat ako

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1 - z_x\bar{z}_y}{z_x - z_y}\right| \tag{6.111}$$

  (overit ako priklad)

- ale kazda dostatocne slusna oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sa da zobrazit na jednotkovu kruznicu konformnou transformaciou. takato transformacia je v dvoch rozmeroch kompatibilna s operatorom Δ a ak toto zobrazenie pozname

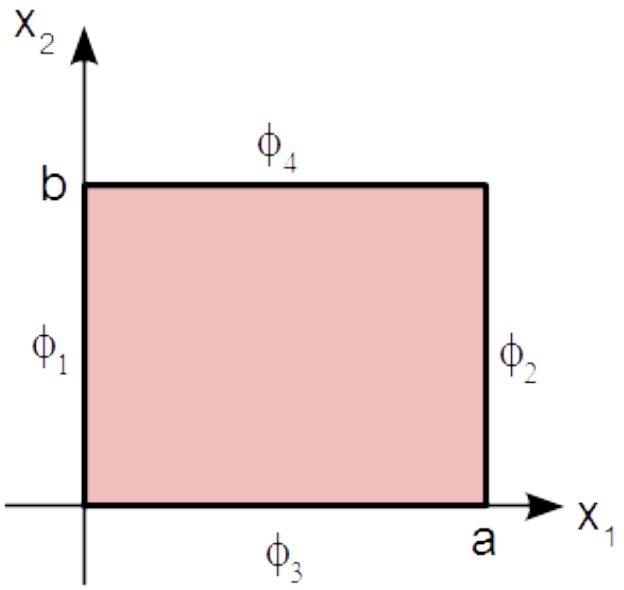
$$f : f(z) \to w \ , \ z \in \Omega \subset \mathcal{C} \to w \in B(0,1) \subset \mathcal{C} \tag{6.112}$$

  potom Greenova funkcia pre oblast Ω ma tvar

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1 - f(z_x)f(\bar{z}_y)}{f(z_x) - f(z_y)}\right| \tag{6.113}$$

Vonkajšia úloha

-



Obr. 28: Okrajove podmienky(7.2) pre obdĺžnik.

7 Fourierova metóda riešenia PDE

- v tejto casti sa pozrieme na inu metodu riesenia okrajovych uloh, ktora vo svojom jadre pouziva zovseobecnenia tvrdeni linearnej algebry do nekonecnorozmernych vektorovych priestorov

  na zaciatok si ju ale ilustrujeme na niekolkych jednoduchych ulohach a ukazeme jej prakticke vyuzitie pre riesenie okrajovych uloh

- zacnime Dirichletovou ulohou pre Laplaceovu rovnicu v oblzniku, tj.

$$\Delta u = 0 \ , \ \Omega = \{0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b\} \tag{7.1}$$

  pricom okrajova podmienka vyzera nasledovne

$$u(0, x_2) = \phi_1 \ , \ u(a, x_2) = \phi_2 \tag{7.2a}$$
$$u(x_1, 0) = \phi_3 \ , \ u(x_1, b) = \phi_4 \tag{7.2b}$$

  ide o velmi jednoduchu ulohu v jednoduchej oblasti, mame teda pocit ze by jej riesenie nemalo predstavovat problem

  napriek tomu ked zacneme hladat Greenovu funkciu metodou imaginarnych nabojov, narazame na problem

  dvojica protilahlych hran vyvori k danemu naboju v mieste y nekonecne vela imaginarnych nabojov, ku ktorym budeme mat dalsiu nekonecnu sadu imaginarnych nabojov od kolmej dvojice

  pre riesenie okrajovej ulohy budeme musiet taketo nekonecne superpozicie derivovat a uloha sa stane velmi rychlo velmi tazko sledovatelna

- skusime sa teda v takomto pripade vzdat (aspon na cas) metody Greenovej funcie, ktora bola uzitocna v inych pripadoch a na formalnejsie uvahy, a skusime najst iny recept na hladanie riesenia

7.1 Fourierova metóda v dvoch rozmeroch

7.1.1 Separácia premenných pre Laplaceovu rovnicu v obdĺžniku

- budeme riesit jednoduchsiu ulohu pre pripad

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 \ , \ \phi_4 = \phi \neq 0 \tag{7.3}$$

nakolko kedze ide o linearny problem, riesenie vseobecnej ulohy (7.1) mozme zlozit zo styroch takychto legovych kociek

idea teraz bude najst riesenie v separovanom tvare

$$u(x) = X(x_1)Y(x_2) \tag{7.4}$$

kedze vieme, ze riesenie je jednoznacne po pripadnom uspechu mozme vyhlasit vitazstvo a netrapit sa vcelku specialnou volbou tvaru riesenia (pripadne sa mozme zamysliet nad tym, preco tento specialny tvar fungoval a kedy bude fungovat vseobecne, a to aj spravime)

dosadime a upravime (ciarka znaci derivaciu podla premennej danej funkcie)

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \tag{7.5}$$

tuto podmienku mozme splnit iba ak $X''/X = -\lambda, Y''/Y = \lambda$, kde λ je nejaka konstanta, nazvisiaca na $x_{1,2}$. to preto, lebo rovnica $f_1(x) = f_2(y)\ \forall x, y$ ine riesenie nemoze mat

tieto rovnice riesime postupne

- pre pripad $\lambda = 0$ dostavame dve linearne funkcie, ktore ale nie su kompatibilne s okrajovymi podmienkami (daju identicku nulu)
  - pre klade $\lambda > 0$? dostavame najskor

$$X'' = -\lambda X \tag{7.6}$$

ma vseobecne riesenie

$$X(x_1) = A \sin \sqrt{\lambda} x_1 + B \cos \sqrt{\lambda} x_1 \tag{7.7}$$

teraz na rad pridu okrajove podmienky, ktore hovoria, ze $X(0) = X(a) = 0$. prva z nich da $B = 0$, druha hovori ze

$$A \sin \sqrt{\lambda} a = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{\lambda} a = \pi k \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{k^2 \pi^2}{a^2} \ , \ k \in \mathbb{N} \tag{7.8}$$

po uvazeni okrajovych podmienok sme ako prijatelne riesenia rovnice (7.6) teda dostali

$$X_k(x_1) = \sin\left(\frac{k\pi x_1}{a}\right) \tag{7.9}$$

– co s $\lambda < 0$, rovnica

$$X'' = -\lambda X \tag{7.10}$$

ma v tom pripade vseobecne riesenie

$$X(x_1) = A \sinh \sqrt{-\lambda} x_1 + B \cosh \sqrt{-\lambda} x_1 \tag{7.11}$$

v ktorej daju okrajove podmienky nutne $A = B = 0$

- rovnica pre Y ma v takom pripade riesenie

$$Y(x_2) = C_k \sinh\left(\frac{k\pi x_2}{a}\right) + D_k \cosh\left(\frac{k\pi x_2}{a}\right) \tag{7.12}$$

opat pridu na rad okrajove podmienky, ktore daju $D_k = 0$. takze homogennu cast okrajovych podmienok splna lubovolna funkcia v tvare

$$u_k(x) = \sinh\left(\frac{k\pi x_2}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_1}{a}\right) \tag{7.13}$$

kedze ide o linearnu rovnicu, mozme si dovolit robit kombinacie takychto funkcii, ale nic viac, riesenie nehomogennej casti bude mat teda tvar

$$u(x) = \sum C_k u_k(x) \tag{7.14}$$

tak aby platilo $u(x_1, b) = \phi(x_1)$. tu vyuzijeme ortogonalost funkcii tvaru (7.10)

$$\frac{2}{a} \int_0^a dx_1 \sin\left(\frac{k\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x_1}{a}\right) = \delta_{kl} \tag{7.15}$$

pomocou ktorej mozeme z ϕ vyprojektovat cast, ktora urcuje koeficient C_k

$$\begin{aligned}
\int_0^a dx_1 u(x_1, b) \sin\left(\frac{l\pi x_1}{a}\right) &= \sum C_k \sinh\left(\frac{k\pi b}{a}\right) \int_0^a dx_1 \sin\left(\frac{k\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x_1}{a}\right) = \\
&= \sum C_k \sinh\left(\frac{k\pi b}{a}\right) \frac{a}{2} \delta_{kl} = \frac{a}{2} C_l \sinh\left(\frac{l\pi b}{a}\right) = \\
&= \int_0^a dx_1 \phi_4(x_1) \sin\left(\frac{l\pi x_1}{a}\right) \qquad (7.16) \\
C_l &= \frac{2}{a \sinh\left(\frac{l\pi b}{a}\right)} \int_0^a dx_1 \phi_4(x_1) \sin\left(\frac{l\pi x_1}{a}\right) \qquad (7.17)
\end{aligned}$$

- nasli sme teda riesenie ulohy, ostava uz len dopocitat integraly vo vyjadreni C_k

  co sa presne stalo? podarilo sa nam identifikovat riesenia u_k v separovanom tvare, ktore splnali homogennu cast okrajovych podmienok. tieto riesenia boli velmi specialne. z nich sme potom vytvorili linearnu kombinaciu, ktora splnala nehomogennu okrajovu podmienku

Príklad 56. Nájdite koeficienty C_l v (7.17) pre $a = b = 1$ a $\phi_4(x_1) = x(1 - x)$. Ako vyzerá riešenie rovnice? □

Príklad 57. Nájdite vyjadrenie pre zvyšné tri časti okrajovej úlohy (7.1) a potom nájdite jej všeobecne riešenie. □

Príklad 58. Nájdite riešenie úlohy

$$u(0, x_2) = 0 \ , \ u(a, x_2) = 0 \tag{7.18a}$$

$$-u_{x_2}(x_1, 0) = \psi(x_1) \ , \ u(x_1, b) = 0 \tag{7.18b}$$

a úlohy

$$u_{x_1}(0, x_2) = 0 \ , \ u(a, x_2) = 0 \tag{7.19a}$$

$$-u_{x_2}(x_1, 0) = \psi(x_1) \ , \ u(x_1, b) = \phi(x_1) \tag{7.19b}$$

□

- separacia premmennych bola ucinna z dvojice dovodov

  v prvom rade operator Δ sa da rozdelit na dve casti

  $$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} \tag{7.20}$$

  a v druhom rade hranie oblasti Ω boli definovane ciarami, na ktorych je jedna zo suradnic konstantna

- metoda teda bude fungovat uplne rovnako pre ine „kockate“ oblasti v kartezkych sradniciach

- v sferickych suradniciach ma Δ podobny tvar

  $$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega \tag{7.21}$$

  kde Δ_r obsahuje iba derivacie podla ∂_r a Δ_Ω obsahuje iba derivacie podla uhlovych premennych. takze to nie je tak ze sa Δ rozpada na nezavisle casti, ale minimalne pre homogennu ulohu $\Delta u = 0$ v gulatych oblastiach (gule, medzigulia, radialne vyseky) budeme moct metodu pouzit

7.1.2 Separácia premenných pre Laplaceovu rovnicu v kruhu

- tento problem sme uz vyriesili metodou Greenovej funkcie. avsak bude poucne pozriet sa nan aj separaciou premmennych, nakolko takto budeme vediet riesit ulohy vo vseobecnejsich oblastiach, kde uz bude problem najst Greenovu funkciu

- takze riesime rovnicu $\Delta u = 0$ v oblasti $\Omega = \{|x| < \rho\} \subset \mathbb{R}^2$ s okrajovou podmienkou

  $$u(x, y)|_{|x|=\rho} \equiv u(\rho, \theta) = \phi(\theta) \tag{7.22}$$

  kde sme zaviedli polarne suradnice. v nich mame pre Laplacian

  $$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{7.23}$$

co znamena, ze by malo viest ku zdarnemu konci hladanie riesenia v tvare

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{7.24}$$

co vedie na rovnice

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{7.25a}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \tag{7.25b}$$

rovnica pre Θ ma vseobecne riesenie v tvare suctu sinusov a kosinusov. z podmienky $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$ dostaneme

$$\sin(2\pi\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\theta) = \sin(\sqrt{\lambda}\theta) \tag{7.26}$$

kedze toto ma platit pre lubovolny uhol θ pri tom istom λ, dostaneme

$$2\pi\sqrt{\lambda} = 2\pi k \;\Rightarrow\; \lambda_k = k^2 \tag{7.27}$$

dostavame teda pre funkcie Θ

$$\Theta_k = \{1, \sin(k\theta), \cos(k\theta)\} \;,\; k = 1, 2, \ldots \tag{7.28}$$

rovnica pre R ma potom riesenie v tvare $r^{\pm k}$ pre nenulovu vlastnu hodnotu a riesenie v tvare

$$R_0 = A_0 + D_0 \log\frac{1}{r} \tag{7.29}$$

vseobecne riesenie rovnice $\Delta u = 0$ ma teda tvar superpozicie rieseni

$$u_k(r,\theta) = \left\{1, \log\frac{1}{r}, r^k\sin(k\theta), r^k\cos(k\theta), \frac{1}{r^k}\sin(k\theta), \frac{1}{r^k}\cos(k\theta)\right\} \tag{7.30}$$

tuto kombinaciu teraz potrebujeme zvolit tak, aby sme splnili okrajovu podmienku. kedze riesenie je v pociatku ohranicene, dostavame

$$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\left(A_k\cos(k\theta) + B_k\sin(k\theta)\right) \tag{7.31}$$

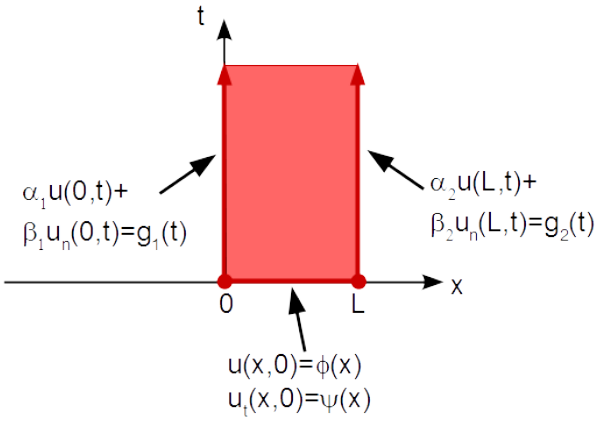
kde sme nulovu vlastnu hodnotu zahrnuli do casti A_0. z ortogonality sinusov a kosinusov dostaneme

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\,\phi(\theta) \tag{7.32a}$$

$$A_k = \frac{1}{\pi\rho^k}\int_0^{2\pi} d\theta\,\cos(k\theta)\,\phi(\theta) \tag{7.32b}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi\rho^k}\int_0^{2\pi} d\theta\,\sin(k\theta)\,\phi(\theta) \tag{7.32c}$$

- treba poznamenat ze nulovost konstant D_0, C_k bola specialna pre nasu oblast a pre ine oblasti, napriklad rozne medzikruzia a ich vyseky, to tak byt nemusi



Obr. 29: "Hranata" oblast v priestore (t, x)

- premyslite si, že $\phi = const$ sa $u = const$

Príklad 59. Vyrieste rovnicu pre okrajovu podmienku

$$\phi(\theta) = -\left. K(x-y)\right|_{x=\rho e^{i\theta}} \tag{7.33}$$

a teda najdite harmonicku cast Greenovej funkcie explicitnym vypoctom. Moze sa zist identita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \cos k\theta}{k} = -\frac{1}{2}\log\left(1 + x^2 - 2x\cos\theta\right) \quad |x| < 1 \ . \tag{7.34}$$

□

Príklad 60. Ako by vyzeral tvar riešenia (7.31) pre prípad vonkajšku kruhu a medzikružia? □

7.1.3 Separácia premenných pre vlnovú rovnicu v jednom rozmere

- vlnovy operator v jednom rozmere ma tiez separovany tvar

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 \tag{7.35}$$

a teda ocakavame, ze pre rozumne hranatu oblast bude separacia premennych tiez fungovat

riesime problem na usecke $x \in (0, L)$

hranata oblast = cauchyho uloha s okrajovou podmienkou

$$\alpha_1 u + \beta_1 \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0} = g_0(t) \ , \ \ \alpha_2 u + \beta_2 \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=L} = g_1(t) \tag{7.36}$$

a pociatocnou podmienkou

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{7.37}$$

- rovnicu $u_{tt} - u_{xx} = 0$ opat riesime separaciou premennych $u(x,t) = X(x)T(t)$, ktore daju rovnice

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \ T'' + \lambda T = 0 \tag{7.38}$$

metoda je pouzitelna, ak hranatost oblasti zaruci, ze sa okrajove podmienky (7.36) rozdelia na dve nezavisle podmienky pre $X(0), X(L)$ v ktorych nebude vystupovat T, uvidime ze to nebude musiet vzdy byt tak pre nehomogenne podmienky ale uvidime, ze sa s tym da poradit

vsimnite si opacne znamienko v rovnici pre T oproti Laplacevej rovnici

podme sa na situaciu pozriet od jedoduchsich pripadov

- **homogenne dirichletove okrajove podmienky** a teda

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \Rightarrow \ X(0) = X(L) = 0 \tag{7.39}$$

hladame netrivialne riesenia, postupne

  - $\lambda = 0$ da riesenie $X = c_1 x + c_2$, v ktorom okrajove podmienky vedu nutne na $c_1 = c_2 = 0$
  - $\lambda < 0$ da riesenie $X = c_1 \sinh\sqrt{-\lambda}x + c_2 \cosh\sqrt{-\lambda}x$, v ktorom okrajove podmienky vedu nutne opat na $c_1 = c_2 = 0$
  - $\lambda > 0$ da riesenie $X = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$, v ktorom okrajove podienky okrem trivialneho riesenia daju aj netrivialne vdaka periodickosti sinusu

$$c_2 = 0 \ , \ \sqrt{\lambda}L = k\pi \ k \in \mathbb{N} \tag{7.40}$$

    a teda dostavame sadu funkcii X, ktore splnaju rovnicu aj okrajovu podmienku

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \ , \ \lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2} \ k \in \mathbb{N} \tag{7.41}$$

z druhej rovnice potom dostaneme

$$T'' = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}T \ \Rightarrow \ T_k(t) = A_k \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + B_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \tag{7.42}$$

lubovolna funkcia v tvare

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + B_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right] \tag{7.43}$$

teda splna okrajovu podmienku (7.39). pociatocu podmienku bude ale splnat iba jedno riesenie, konkretne v case $t = 0$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{k\pi x}{L}\right) \ , \ u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.44}$$

vyuzijeme kolmost sinusov

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \delta_{kl} \tag{7.45}$$

kazdu z rovnic vynasobime $\sin\left(\frac{k\pi}{L}\right)$, preintegrujeme a dostaneme

$$A_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^L dx\, \psi(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \ , \ B_k = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \phi(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.46}$$

Príklad 61 (Homogenna Neumanova podmienka)**.** Najdite vseobecne riesenie pociatocnej ulohy s homogennou okrajovou podmienkou v tvare

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0. \tag{7.47}$$

□

Návod. Pre X dostaneme $X_k = \cos(k\pi x/L)$, tentoraz aj pre $k = 0$ (preco)?

- rieseniam u_k v (7.43) sa hovori stojate vlny alebo mody
- **nehomogenna dirichletova uloha** budeme riesit uplne vseobecnu dirichletovu ulohu

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.48a}$$
$$u(x,0) = \phi(x)\ ,\ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{7.48b}$$
$$u(0,t) = g_0(t)\ ,\ u(L,t) = g_1(t) \tag{7.48c}$$

  hovorime teda o nehomogennej rovnici s nehomogennymi pociatocnymi podmienkami a nehomogennymi okrajovymi podmienkami

- strategia pre riesenie bude nasledovna : nehomogenity rozdelime na tri casti a vdaka linearnosti ich budeme moct vyriesit osobitne

  riesime teda tri ulohy pre funkcie $u^{(1,2,3)}(x,t)$, pricom $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ktore splnaju rovnice

$$u^{(1)}_{tt} - u^{(1)}_{xx} = 0\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.49a}$$
$$u^{(1)}(x,0) = \phi(x)\ ,\ u^{(1)}_t(x,0) = \psi(x) \tag{7.49b}$$
$$u^{(1)}(0,t) = 0\ ,\ u^{(1)}(L,t) = 0 \tag{7.49c}$$

$$u^{(2)}_{tt} - u^{(2)}_{xx} = f(x,t)\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.50a}$$
$$u^{(2)}(x,0) = 0\ ,\ u^{(2)}_t(x,0) = 0 \tag{7.50b}$$
$$u^{(2)}(0,t) = 0\ ,\ u^{(2)}(L,t) = 0 \tag{7.50c}$$

$$u^{(3)}_{tt} - u^{(3)}_{xx} = 0\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.51a}$$
$$u^{(3)}(x,0) = 0\ ,\ u^{(3)}_t(x,0) = 0 \tag{7.51b}$$
$$u^{(3)}(0,t) = g_0(t)\ ,\ u^{(3)}(L,t) = g_1(t) \tag{7.51c}$$

- rovnicu (7.49) sme uz vyriesili

- rovnicu (7.51) vyriesime trikom : zavedieme funkciu

$$U(x,t) = Lu^{(3)}(x,t) - [(L-x)g_0(t) + xg_1(t)] \equiv Lu^{(3)}(x,t) - s(x,t) \tag{7.52}$$

ktora splna rovnicu

$$U_{tt} - U_{xx} = -\left[(L-x)g_0''(t) + xg_1''(t)\right] \ , x \in (0,L), t > 0 \tag{7.53a}$$

$$U(x,0) = -\left[(L-x)g_0(0) + xg_1(0)\right] \tag{7.53b}$$

$$U_t(x,0) = -\left[(L-x)g_0'(0) + xg_1'(0)\right] \tag{7.53c}$$

$$U(0,t) = 0 \ , \ U(L,t) = 0 \tag{7.53d}$$

ktoru vyriesime rozdelenim $U = U^{(1)} + U^{(2)}$ na dve casti ktore riesia ulohu typu (7.49) a (7.50) funkcia $s(x,t)$ v (7.52) samozrejme nevznikla nahodou, ide o riesenie ulohy $s_{xx}(x,t) = 0$ s patricnou okrajovou podmienkou. funckia U teda hovori, co sa v $u^{(3)}$ deje nad ramec stacionarneho riesenia

- ostava nam teda vyriesit ulohu (7.50). z riesenia homogennej ulohy vieme, ze lubovolna funkcia ktora splna okrajove podmienky (7.50c) ma tvar

$$u^{(2)}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.54}$$

podobne ako pri odvodzovani (7.46) vyuzijeme ortogonalitu sinusov a dostaneme rovnicu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 A_k(t) + f_k^S(t)\right] = 0 \tag{7.55}$$

kde

$$f_k^S(t) = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x,t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.56}$$

rozmyslite si, ze podobny vyraz s kosinusom nebude mat na riesenie ziadny efekt a rozmyslite si, co to fyzikalne znamena[14]

rovnica (7.55) ma platit pre lubovolne x a hranata zatvorka musi byt nulova pre kazde k, podobne z okrajovej podmienky dostaneme $A_k(t) = A_k'(t) = 0$ pre vsetky k, co dava riesenie v tvare (variacia konstant)

$$A_k(t) = \frac{L}{k\pi}\int_0^t d\tau \, f_k^S(\tau) \sin\left(\frac{k\pi(t-\tau)}{L}\right) \tag{7.57}$$

Príklad 62 (Nehomogenna Neumanova uloha)**.** Najdite vseobecne riesenie (naj)nehomogennej(sej) Neumanovej ulohy

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \ , \ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.58a}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{7.58b}$$

$$u_x(0,t) = h_0(t) \ , \ u_x(L,t) = h_1(t) \tag{7.58c}$$

□

[14] Lubovolnu kosinusovu komponentu sily f vyrusi sila ktora drzi konce na mieste.

Príklad 63 (Nehomogenna zmiesana uloha)**.** Najdite vseobecne riesenie nehomogennej zmiesanej ulohy, kde je vo vztahu (7.58c) na jednom konci zadana hodnota a na druhom konci derivacia funckie $u(x,t)$. □

V dvoch ulohach si ukazeme riesenie pripadov komplikovanejsich okrajovych podmienok.

Príklad 64. Vypocitajte pohyb struny, ktorej jeden koniec je ukotveny, jeden koniec je volny a struna zacina svoj pohyb so zadanou vychylkou a nulovou rychlostou. □

Riešenie. Ide teda o homogenne okrajove podmienky. Derivacia $u_x(x,t)$ udava silu, ktorou je v mieste x tahany element struny v priecnom smere, riesime teda rovnicu

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.59a}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \ u_t(x,0) = 0 \tag{7.59b}$$

$$u_x(0,t) = 0 \ , \ u(L,t) = 0 \tag{7.59c}$$

kde sme zvolili ukotveny koniec $x = L$ a volny koniec $x = 0$. Po separacii premennych a okrajovych podmienkach

$$X_k(x) = \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right] \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.60}$$

Pociatocna podmienka da $T'(0) = 0$ a teda

$$T_k(t) = \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{L}\right] \tag{7.61}$$

A teda vseobecne riesenie v tvare (konstanty B urcime z pociatocnej podmienky DOPLNIT)

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{L}\right] \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right] \tag{7.62}$$

■

Príklad 65. Vypocitajte pohyb struny, ktorej jeden koniec je ukotveny a na druhom je zavazie s hmotnostou m_0. Struna sa spolu so zavazim pohybuje podla druheho newtonovho zakona bez posobenia inych sily. Struna opat zacina s danou vychylkou a nulovou rychlostou. □

Riešenie. Zavazie sa pohybuje spolu so strunou, takze musi mat rovnake zrychlenie ako krajny bod a potom $F = ma$ da okrajovu podmienku (pre jednoduchost sme vymenili okraje a ukotveny bod je v $x = 0$)

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.63a}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \ u_t(x,0) = 0 \tag{7.63b}$$

$$u(0,t) = 0 \ , \ u_x(L,t) = m_0 u_{tt}(L,t) \tag{7.63c}$$

Riesime separaciou premennych, kde v okrajovej podmienke pre X pouzijeme $T'' = -\lambda T$ a dostaneme

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \ X(0) = 0 \ , \ X'(L) + m_0 \lambda X(L) = 0 \tag{7.64}$$

pociatocna podmienka zavisi od λ, kvoli comu nebudu vlastne funkcie X_k na seba kolme! uvidime co to bude znamenat a ako sa to bude dat opravit.

Nie je tazke vyriesit

$$X(k) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\right) x \ , \ \tan\left(\sqrt{\lambda_k} L\right) = -\frac{1}{m_0 L \sqrt{\lambda_k}} \tag{7.65}$$

ked si nakreslime grafy funkcii presvedcime sa, ze rovnica ktora urcuje λ_k ma nekonecne vela rieseni, ktore su vsak transcendentne cisla. Problem je, ze taketo funkcie na seba nie su kolme!

$$\begin{aligned} \int_0^L dx\, X_k(x) X_l(x) =& \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_l})L}{\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_l}} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}+\sqrt{\lambda_l})L}{\sqrt{\lambda_k}+\sqrt{\lambda_l}}\right] = \\ =& \begin{cases} \frac{L}{2} - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}L\right)}{4\sqrt{\lambda_k}} = \frac{L}{2} + \frac{1-\sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}L\right)}{2m_0 L \lambda_k} & k = l \\ -m_0 L \sin\left(\sqrt{\lambda_k}L\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_l}L\right) & k \neq l \end{cases} \end{aligned} \tag{7.66}$$

Znamena to, ze funkcie X_k su na seba kolme ak zavedieme skalarny sucin v tvare

$$\int_0^L dx\, (1 + m_0 L \delta(x-L)) X_k(x) X_l(x) \tag{7.67}$$

k tomuto sa este vratime. Zatial len piseme ze vseobecne riesenie ma tvar

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_k} x\right) \tag{7.68}$$

kde

$$A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\left(\int_0^L dx\, \phi(x) X_k(x) + m_0 L \phi(L) X_k(L)\right) \ , \ \|X_k\|^2 = \int_0^L dx\, X_k^2(x) + m_0 L X_k^2(L) \tag{7.69}$$

■

7.1.4 Separácia premenných pre rovnicu vedenia tepla v jednom rozmere

- operator v rovnici vedenia tepla v jednom rozmere ma tiez separovany tvar

$$\partial_t - \partial_x^2 \tag{7.70}$$

a teda ocakavame, ze pre rozumne hranatu oblast bude separacia premennych tiez fungovat

riesime problem na usecke $x \in (0, L)$

hranata oblast = cauchyho uloha s okrajovou podmienkou

$$\alpha_1 u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=0} = g_0(t) \ , \ \alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=L} = g_1(t) \tag{7.71}$$

a pociatocnou podmienkou

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{7.72}$$

- rovnicu $u_t - u_{xx} = 0$ opat riesime separaciou premennych $u(x,t) = X(x)T(t)$, ktore daju rovnice

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \ T' + \lambda T = 0 \tag{7.73}$$

metoda je pouzitelna, ak hranatost oblasti zaruci, ze sa okrajove podmienky (7.71) rozdelia na dve nezavisle podmienky pre $X(0), X(L)$ v ktorych nebude vystupovat T, uvidime ze to nebude musiet vzdy byt tak pre nehomogenne podmienky ale uvidime, ze sa s tym da poradit

vsimnite si opacne znamienko v rovnici pre T oproti Laplacevej rovnici

podme sa na situaciu pozriet od jedoduchsich pripadov

- **homogenne dirichletove okrajove podmienky** a teda

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \Rightarrow \ X(0) = X(L) = 0 \tag{7.74}$$

hladame netrivialne riesenia, postupne

  - $\lambda = 0$ da riesenie $X = c_1 x + c_2$, v ktorom okrajove podmienky vedu nutne na $c_1 = c_2 = 0$
  - $\lambda < 0$ da riesenie $X = c_1 \sinh\sqrt{-\lambda}x + c_2 \cosh\sqrt{-\lambda}x$, v ktorom okrajove podmienky vedu nutne opat na $c_1 = c_2 = 0$
  - $\lambda > 0$ da riesenie $X = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$, v ktorom okrajove podienky okrem trivialneho riesenia daju aj netrivialne vdaka periodickosti sinusu

$$c_2 = 0 \ , \ \sqrt{\lambda}L = k\pi \ k \in \mathbb{N} \tag{7.75}$$

    a teda dostavame sadu funkcii X, ktore splnaju rovnicu aj okrajovu podmienku

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \ , \ \lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2} \ k \in N \tag{7.76}$$

z druhej rovnice potom dostaneme

$$T' = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}T \ \Rightarrow \ T_k(t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \tag{7.77}$$

lubovolna funkcia v tvare

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.78}$$

teda splna okrajovu podmienku (7.74). pociatocku podmienku bude ale splnat iba jedno riesenie, konkretne v case $t = 0$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.79}$$

vyuzijeme kolmost sinusov

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) = \delta_{kl} \tag{7.80}$$

kazdu z rovnic vynasobime $\sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right)$, preintegrujeme a dostaneme

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L dx \, \phi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.81}$$

Príklad 66 (Homogenna Neumanova podmienka)**.** Najdite vseobecne riesenie pociatocnej ulohy pre rovnicu vedenia tepla s homogennou okrajovou podmienkou v tvare

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0. \tag{7.82}$$

□

Riešenie. Rovnica pre funkciu X_k ma opat riesenie

$$X_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.83}$$

Rovnica pre T ma opat riesenie (7.77), co da dohromady

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.84}$$

s

$$A_0 = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \phi(x) \ , \ A_k = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \phi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.85}$$

Vsimnite si, ze pre velke casi sa riesenie ustali na homogennom rozdeleni teploty tak, aby sa celkove teplo zachovavalo. To preto, lebo tato okrajova podmienka zodpoveda izolovanym koncom, cez ktore netecie teplo. ■

Príklad 67. Explicitne dopocitajte riesenie predchadzajucej ulohy pre pripad

$$\phi(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) T_0 + \frac{x}{L} T_1 \tag{7.86}$$

a sledujte, ako sa teplota v case ustali. □

- **nehomogenna rovnica s homogennou Dirichletovou podmienkou** - riesenie rovnice $u_t - u_{xx} = f(x,t)$ budeme hladat variaciou konstant

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.87}$$

riesenie dosadime do rovnice, vyuzijeme ortogonalitu sinusov a za predpokladu ze rovnica ma platit pre vsetky x dostaneme

$$A_k'(t) = e^{\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x,t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \equiv e^{\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} f_k(t) \tag{7.88}$$

kosinusy v rozvoji f by boli nekompatibilne s okrajovou podmienkou, nakolko to, ze v krajnych bodoch fixujeme (nulovu) teplotu urcuje, kolko tepla musi pretiect cez okraj. riesenie tejto rovnice je

$$A_k(t) = A_k(0) + \int_0^t d\tau\, f_k(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2}{L^2}\tau} \tag{7.89}$$

kde konstanta $A_k(0)$ je dana rovnako ako pre homogennu rovnicu pociatocnou podmienkou vztahom (7.81)

- **Uplne nehomogenny Dirichletov problem** - riesime teda rovnicu

$$u_t - u_{xx} = f(x,t)\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.90a}$$
$$u(x,0) = \phi(x) \tag{7.90b}$$
$$u(0,t) = g_0(t)\ ,\ u(L,t) = g_1(t) \tag{7.90c}$$

  riesenie budeme opat hladat tak, ze ho rozdelime na dve homogenne ulohy $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ ktore riesia

$$u_t^{(1)} - u_{xx}^{(1)} = f(x,t)\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.91a}$$
$$u^{(1)}(x,0) = \phi(x) \tag{7.91b}$$
$$u^{(1)}(0,t) = 0\ ,\ u^{(1)}(L,t) = 0 \tag{7.91c}$$

$$u_t^{(2)} - u_{xx}^{(2)} = 0\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.92a}$$
$$u^{(2)}(x,0) = 0 \tag{7.92b}$$
$$u^{(2)}(0,t) = g_0(t)\ ,\ u^{(2)}(L,t) = g_1(t) \tag{7.92c}$$

- riesenie prvej ulohy sme uz nasli a druhu opat prevedieme na tento znamy pripad
- podobne ako predtym odcitame od funkcie $u^{(2)}$ riesenie rovice $s_{xx} = 0$ s okrajovou podmienkou (7.92c), a teda dostaneme

$$U(x,t) = Lu^{(2)}(x,t) - [(L-x)g_0(t) + xg_1(t)] \tag{7.93}$$

  ktora bude riesit ulohu

$$U_t - U_{xx} = -\left[(L-x)g_0'(t) + xg_1'(t)\right]\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.94a}$$
$$U(x,0) = -\left[(L-x)g_0(0) + xg_1(0)\right] \tag{7.94b}$$
$$U(0,t) = 0\ ,\ U(L,t) = 0 \tag{7.94c}$$

  co je opat uloha, ktoru vieme riesit

Príklad 68 (Nehomogenna Neumanova uloha)**.** Najdite vseobecne riesenie (naj)nehomogennej(sej) Neumanovej ulohy pre rovnicu vedenia tepla

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)\ ,\ x \in (0,L), t > 0 \tag{7.95a}$$
$$u(x,0) = \phi(x)\ ,\ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{7.95b}$$
$$u_x(0,t) = h_0(t)\ ,\ u_x(L,t) = h_1(t) \tag{7.95c}$$

□

Príklad 69 (Vedenie tepla s fixovanou teplotou)**.** Najdite resenie rovnice vedenia tepla v tyci, ktorej konce maju fixovanu teplotu, a teda rieste problem

$$u_t - u_{xx} = 0 \ , \ x \in (0, L), t > 0 \tag{7.96a}$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \tag{7.96b}$$

$$u(0, t) = T_0 \ , \ u(L, t) = T_1 \tag{7.96c}$$

□

Riešenie. Riesenie homogennej ulohy sme uz mali

$$u^{(1)}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \ , \ A_k = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \phi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.97}$$

Priamociaro piseme[15]

$$U = Lu^{(2)} - [(L - x)T_0 + xT_1] \tag{7.99a}$$

$$U_t - U_{xx} = 0 \ , \ U(x, 0) = -(L - x)T_0 - xT_1 \tag{7.99b}$$

$$U(x, t) = \sum B_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.99c}$$

$$B_k = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, [-(L - x)T_0 - xT_1] \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{2L((-1)^k T_1 - T_0)}{k\pi} \tag{7.99d}$$

Cele riesenie je teda

$$u(x, t) = \left(1 + \frac{x}{L}\right) T_0 + \frac{x}{L} T_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k + \frac{2((-1)^k T_1 - T_0))}{k\pi}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.100}$$

Po dostatocne dlhom case budu vsetky cleny exponencialne potlacene a zostane len riesenie s/L, co je ako sme uz povedali riesenie stacionarnej ulohy s danymi okrajovymi podmienkami. Toto rozdelenie na stacionarne riesenie a zvysok sa ukazuje byt velmi uzitocne. ■

Príklad 70. Nájdite teplotu tyce, ktorej jeden koniec je fixovany na teplotu T_0 a druheho teplota sa harmonicky meniť s frekvenciou ω. □

Príklad 71 (Vymena tepla na okraji)**.** Majme tyc, ktorej jeden koniec je izolovany a druhy si vymiena teplo s okolim o teplote T_0. □

Riešenie. Teplo sa vymiena podla nasledujucich dvoch principov

- smer toku tepla je dany zapornym gradientom teploty
- velkost toku tepla je dana rozdelom teplot

[15] Kdesi využijeme

$$\int_0^L dx\, x \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{L^2}{k^2\pi^2} \left[\sin(k\pi) - k\pi\cos(k\pi)\right] \ . \tag{7.98}$$

Tieto dve podmienky daju okrajovu podmienku na okraji kde sa vymiena teplo

$$u_x(L,t) = -\left[u(L,t) - T_0\right] \tag{7.101}$$

Na druhom okraji mame Neumannovu okrajovu podmienku $u_x(0,t) = 0$. Ked teraz skusime metodu separacie premennych zistime, ze pre $T_0 \neq 0$ sa okrajova podmienka nerozpadne na podmienky pre X a T. Avsak pre pripad $T_0 = 0$ dostaneme

$$X_k = \cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) \ , \ \tan\left(\sqrt{\lambda_k}L\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{7.102}$$

a uz obligatne

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) \ , \ A_k = \int_0^L dx\,\phi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) \tag{7.103}$$

Zo vztahu

$$\int_0^L dx\,X_k(x)X_l(x) = \frac{\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_l}L\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}L\right) - \sqrt{\lambda_l}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}L\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_l}L\right)}{\lambda_k - \lambda_l} \tag{7.104}$$

dostaneme ortogonalitu funckii X_k.

Pre nenulove T_0 vyskusame metodu z predchadzajuceho prikladu. Najdeme riesenie rovnice $s_{xx} = 0$ s rovnakou okrajovou podmienkou. Dostaneme

$$s(x) = c_1 x + c_2 \ , \ s'(0) = c_1 = 0 \ , \ s'(L) = c_1 = -c_1 L - c_2 + T_0 \tag{7.105}$$

a teda $s(x) = T_0$. Funckia $U = u - T_0$ bude teda splnat okrajove podmienky s nulovou teplotou (overit) a je teda dana predchadzajucim riesenim. ■

Príklad 72. Najdite priebeh teploty pre predchadajucu ulohu pre pociatocne rozdelnie teploty

$$\phi(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)T_1 + \frac{x}{L}T_2 \tag{7.106}$$

pre rozne kombinacie teplot $T_{0,1,2}$. □

Príklad 73 (Vymena tepla na okraji II)**.** Vyrieste predchadzajuce dva priklady pre pripad fixovanej teploty namiesto izolovaneho konca. □

Príklad 74. Vyrieste ulohu o vedeni tepla v tyci pre pripad, ked si oba konce vymienaju teplo s okolim pri roznych teplotach. □

Riešenie. Uz len heslovito. Stacionarne riesenie ma tvar

$$s(x) = \frac{T_1 - T_0}{1 + L}x + \frac{T_1 - T_0}{1 + L} + T_0 \tag{7.107}$$

Ulohu s homogennymi okrajovymi podmienkami a pociatocnou podmienkou

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) - s(x) \tag{7.108}$$

vyriesime separaciou premennych. To vedie na

$$X_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) + \sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) \ , \ \tan\left(\sqrt{\lambda_k}L\right) = \frac{2\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}-1} \tag{7.109}$$

Overime ze tieto funkcie su na seba kolme a dostaneme riesenie

$$u(x,t) = \frac{T_1 - T_0}{1+L}x + \frac{T_1 - T_0}{1+L} + T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}t} X_k(x) \ , \ A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^L dx\, \bar{\phi}(x) X_k(x) \tag{7.110}$$

■

7.2 Fourierova metóda vo všobecnom prípade

- riesme vseobecnu homogennu ulohu v n rozmeroch v oblasti Ω

$$Lu = \begin{cases} \rho u_t & \text{vedenie tepla} \\ \rho u_{tt} & \text{vlna} \end{cases} \ , \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{7.111}$$

  s homogennou okrajovou podmienkou

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x\in S} = 0 \tag{7.112}$$

  funkcie $\alpha_{1,2}$ su nezaporne v $\bar{\Omega}$ a v ziadnom bode nie su naraz nulove. operator L ma tvar zobseobecneneho Laplacianu

$$L = \nabla(k\nabla) - q \tag{7.113}$$

  pricom na $\bar{\Omega}$ plati $k > 0, \rho \geq 0, q \geq 0$ (uvidime neskor preco su tieto podmienky dolezite)

- pouceny z predchadajucich casti budeme hladat riesenie tejto ulohy separaciou premennych $u(x,t) = X(x)T(t)$, z ktorej dostaneme

$$LX + \lambda\rho X = 0 \ , \ \alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial n}\Big|_{x\in S} = 0 \tag{7.114}$$

  kde klucovou bola homogennost okrajovych podmienok

  pre T potom dostaneme zodpovedajucu rovnicu $T'(\text{resp. } T'') + \lambda T = 0$

- sustavu rovnic pre X nazyvame Sturm-Liouvillov problem

  uloha ma vzdy trivialne riesenie $X \equiv 0$, to nas ale nebude zaujimat

  netrivialne riesenie ma uloha len pre niektore hodnoty cisla λ - **vlastne cisla**

  zodpovedajuce riesenia X - **vlastne funkcie** - budeme oznacovat Φ

- tato uloha ma spocitatelne vela vlastnych cisel λ_k, pricom sa daju usporiadat $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$, ale nie su nutne rozne

- zavedme teda triedu funkcii f, ktore

– na $\bar{\Omega}$ su po castiach spojite

– aj prve a druhe parcialne derivaie su po castiach spojite

– splnaju okrajovu podmienku

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{x\in S} = 0 \tag{7.115}$$

taketo funkcie teda tvoria vektorovy priestor nad realnym cislami a mozme v nom zaviest skalarny sucin

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{\bar{\Omega}} dV\, \rho(x) f_1(x) f_2(x) = 0 \tag{7.116}$$

pre lubovolnu nezapornu funkciu ρ, ktora nie je identicky nulova na Ω

budeme oznacovat V

- funkcie Φ_k evidnetne patria do V

  funkcie prisluchajuce roznym vlastnym odnotam $\lambda_k \neq \lambda_l$ su na seba kolme, lebo definicne vztahy

$$L\Phi_k + \lambda_k \rho \Phi_k = 0\ ,\ L\Phi_l + \lambda_l \rho \Phi_l = 0 \tag{7.117}$$

  vynasobime postupne Φ_l, Φ_k odcitame a preintegrujeme cez Ω a dostaneme

$$\int_\Omega dV\, [\Phi_l L\Phi_k - \Phi_k L\Phi_l] = (\lambda_l - \lambda_k) \int_\Omega dV\, \rho \Phi_k \Phi_l \tag{7.118}$$

  z Greenovho vzorca a z okrajovej podmienky je lava strana nulova a teda ak su vlastne hodnoty rozne, dostavame

$$\int_\Omega dV\, \rho \Phi_k \Phi_l = \langle \Phi_k, \Phi_l\rangle = 0 \tag{7.119}$$

- ak ma r funkcii $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ rovnaku vlastnu hodnotu, potom z nich mozme vyrobit linearne kombinacie, ktore uz na seba kolme budu

- mozme teda predpokladat, ze funkcie Φ_k tvoria ortogonalny system a ako take ich mozme potom aj normovat aby platilo $\|\Phi_k\|^2 = \langle \Phi_k, \Phi_k\rangle = 1$

- taketo funckie Φ_k tvoria ortonormalnu bazu priestoru V so skalarnym sucinom danym ρ z (7.114) to znamena ze kazda funkcia $f \in V$ sa da zapisat ako

$$f(x) = \sum_k c_k \Phi_k(x)\ ,\ c_k = \int_\Omega dV\, \rho(x) f(x) \Phi_k(x) \tag{7.120}$$

  takemuto rozvoju hovorime fourierov rad a cislam c_k fourierove koeficienty

  v konecnorozmernom priestore kazda mnozina n navzajom kolmych vektorov tvori bazu, avsak v nekonecom to uz je komplikovanejsie a nie kazda spocitatelna mnozina ortogonalnych vektorov je bazou, tvrdenie o bazovosti Φ_k je teda netrivialne

- vlastne cisla λ_k su realne - ak imaginarnej vlastnej hodnote $\lambda = a + ib$ prislucha vlastna funkcia $\Phi = \Phi_R + i\Phi_I$, potom dostaneme ze aj $\bar{\lambda}$ je vlastne cislo s vlastnou funckiou $\bar{\Phi} = \Phi_R - i\Phi_I$. tieto dve funkcie ale na seba musia byt kolme, a teda

$$\left\langle \Phi, \bar{\Phi} \right\rangle = 0 = \int dV \rho(\Phi_R^2 + \Phi_L^2) \tag{7.121}$$

  co plati iba pre $\Phi_{R,L}$ identicku nulu a teda trivialne riesenie

- vsetky vlastne cisla λ_k su nezaporne - dostaneme

$$\int_\Omega dV\, \Phi_k L\Phi_k + \lambda \int_\Omega dV\, \rho(x)\Phi_k^2(x) = 0 \tag{7.122}$$

  druhy integral je urcite kladny, prvy integral je z Greenovho vzorca

$$\int_\Omega dV\, \Phi_k L\Phi_k = -\int_\Omega dV\, k\nabla\Phi_k \cdot \nabla\Phi_k - \int_\Omega dV\, q\Phi_k^2 \tag{7.123}$$

  urcite zaporny, takze $\lambda > 0$ aby mala sancu tato rovnost platit

- pre cisto neumanovu okrajovu podmienku v pripade $q = 0$ je vlastnou hodnotou aj $\lambda = 0$ s vlastnou funkciou $\Phi = 1$, inak su vlastne hodnoty ostro vacsie ako nula

- riesenie **vlnovej rovnice** z ulohy (7.111) ma potom tvar

$$u(x,t) = \sum_k \left[\left(c_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin\sqrt{\lambda_k}t \right) \Phi_k(x) \right] \tag{7.124}$$

  funkcia $u(x,t)$ patri do V pre lubovolny fixny cast t a teda ju mozno napisat v tvare

$$u(x,t) = \sum_k A_k(t)\Phi_k(x) \tag{7.125}$$

  a naviac

$$A_k = \int_\Omega dV\, \rho u\Phi_k = -\frac{1}{\lambda_k}\int_\Omega dV\, uL\Phi_k \tag{7.126}$$

  pouzitim Greenovho vzorca prenesieme L na funkciu u a vyuzijeme ze u je riesenim rovnice a dostaneme

$$A_k = -\frac{1}{\lambda_k}\int_\Omega dV\, \rho u_{tt}\Phi_k \tag{7.127}$$

  priamo z (7.125) potom dostavame

$$u_{tt}(x,t) = \sum_k A_k''(t)\Phi_k(x) \tag{7.128}$$

  z tychto dvoch vztahov dostaneme

$$A''(t) + \lambda_k A(t) = 0 \tag{7.129}$$

  a teda

$$A_k(t) = c_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin\sqrt{\lambda_k}t \tag{7.130}$$

  ostava urcit koeficienty c_k, d_k. tie dostaneme z prvej casti rovnice (7.126)

$$c_k = \int_\Omega dV\, \rho(x)\phi(x)\Phi_k(x)\ ,\ d_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_\Omega dV\, \rho(x)\psi(x)\Phi_k(x) \tag{7.131}$$

Príklad 75. Ukazte, ze vseobecnej riesenie rovnice vedenia tepla v (7.111) je

$$u(x,t) = \sum_k \left[\left(\int_\Omega dV' \, \rho(x')\phi(x')\Phi_k(x') \right) e^{-\lambda_k t} \Phi_k(x) \right] . \tag{7.132}$$

□

7.2.1 Vlastnosti úplných systémov funkcií

- system funkcii

$$\{\varphi_k(x)\}, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \ldots \tag{7.133}$$

budeme nazyvat ortogonalny vzhladom na vahu $\rho(x)$ ak plati

$$\int_\Omega dV \, \rho(x)\bar{\varphi}_k(x)\varphi_l(x) = A_k \delta_{kl} \tag{7.134}$$

kde uvazujeme komplexne funkcie, lebo s takymi mozme mat docinenia

napriklad system funkcii

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta} \right\} \tag{7.135}$$

je ortogonalny pre kruznicu, tj. $\Omega = \{x, |x| = 1\}$

- vsimnime si, ze kazdy ortogonalny system mozme normovat ak prejdeme od φ_k k

$$\varphi_k \to \frac{1}{\sqrt{A_k}} \varphi_k \tag{7.136}$$

budeme teda predpokladat, ze kazdy system s ktorym sa stretneme bude ortonormalny

- ak $f(x)$ je absolutne kvadraticky integrovatelna funkcia na Ω, potom cisla

$$c_k = \int_\Omega dV \, f(x)\bar{\varphi}_k(x) \tag{7.137}$$

budeme nazyvat fourierovymi koeficientami funcie f

- ciastocne sucty $\sum c_k \varphi_k$ maju potom nasledovnu minimalnu vlastnost. vyraz

$$\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_M) = \int_\Omega dV \, \left| f(x) - \sum_{k=1}^{M} \gamma_k \varphi_k(x) \right|^2 \tag{7.138}$$

dosahuje minimum pre

$$\gamma_i = c_i \; \forall i = 1, \ldots, M \tag{7.139}$$

dokaz nie je komplikovany. rozpiseme

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_\Omega dV \, |f|^2 + \sum_{k=1}^{M} |\gamma_k|^2 - \sum_{k=1}^{M} \left(\bar{\gamma}_k \int_\Omega dV \, f(x)\bar{\varphi}_k(x) + \gamma_k \int_\Omega dV \, \bar{f}(x)\varphi_k(x) \right) = \\ &= \int_\Omega dV \, |f|^2 + \sum_{k=1}^{M} |\gamma_k|^2 - \sum_{k=1}^{M} (\bar{\gamma}_k c_k + \gamma_k \bar{c}_k) = \\ &= \int_\Omega dV \, |f|^2 - \sum_{k=1}^{M} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{M} |c_k - \gamma_k|^2 \end{aligned} \tag{7.140}$$

posledny vyraz je evidentne najmensi ked je posledna suma nulova a teda ked plati (7.139)

- z (7.140) dostavame aj dalsiu dolezitu vlastnost. nakolko $\Delta \geq 0$ dostavame

$$\int_\Omega dV\, |f|^2 \geq \sum_{k=1}^{M} |c_k|^2 \ \forall M \tag{7.141}$$

kedze integral na pravej strane je konecny, suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \tag{7.142}$$

nutne konverguje. ak plati rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \int_\Omega dV\, |f|^2 \tag{7.143}$$

hovorime ze system $\{\varphi_k\}$ je uplny a potom

$$\lim_{M\to\infty} \int_\Omega dV \left| f - \sum_{k=1}^{M} c_k \varphi_k \right| = 0 \tag{7.144}$$

a teda

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} c_k \varphi_k(x) = f(x) \tag{7.145}$$

- DOPLNIT POZNAMKU O KONVERGENCII A GIBS PHENOMENON

7.3 Vlastné funkcie Laplaciánu v dvoch a troch priestorových rozmeroch

7.3.1 Vlastné funkcie Laplaciánu v kartézkych súradniciach

dva rozmery

- hladame riesenie dvojrozmernej rovnice

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \ + \ \text{okrajove podmienky} \tag{7.146}$$

separujeme premenne $u = XY$

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0 \tag{7.147}$$

$$\frac{X''}{X} + \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu \tag{7.148}$$

pre Y dostaneme rovincu a riesenie

$$Y'' = -\mu Y \ \Rightarrow \ Y = A_Y \sin\sqrt{\mu} y + B_Y \cos\sqrt{\mu} y \tag{7.149}$$

kde konstanty A_Y, B_Y zvolilme tak, aby platili okrajove podmienky. podobne

$$X'' = -(\lambda - \mu) X \ \Rightarrow \ X = A_X \sin\sqrt{\lambda - \mu} x + B_X \cos\sqrt{\lambda - \mu} x \tag{7.150}$$

- pozrime sa teraz na pripad homogennych dirichletovych okrajovych podmienok na stranach stvorca s hranou a. podmienka pre Y da

$$B_Y = 0 \ , \ \sqrt{\mu}a = k\pi \ \Rightarrow \ \mu = \frac{k^2\pi^2}{a^2} \tag{7.151}$$

podobne podmienka pre X da

$$B_X = 0 \ , \ \sqrt{\lambda - \mu}a = l\pi \ \Rightarrow \ \lambda - \mu = \frac{l^2\pi^2}{a^2} \tag{7.152}$$

dostaneme teda pre vlastne hodnoty

$$\lambda = \frac{\pi^2}{a^2}\left(k^2 + l^2\right) \ , \ k, l = 1, 2, \dots \tag{7.153}$$

zodpovedajuce vlastne funkcie su

$$u_{kl}(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{k\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{l\pi x_2}{a}\right) \tag{7.154}$$

Príklad 76. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné funkcie Laplaciánu v štvorci s homogennou Neumannovou podmienkou. □

- este jeden priklad, pre nekonecny pas $0 < x_2 < L$ s nulovou okrajovou podmenkou pre $x_2 = 0, L$ hladame ohranicene vlastne funkcie laplacianu, opat separaciou premmenny dostaneme

$$Y = \sin\frac{k\pi x_2}{L} \tag{7.155}$$

pre X dostavame rovnicu

$$X'' = -(\lambda - k^2)X \tag{7.156}$$

ktora ma ohranicene riesenie $\lambda - k^2 > 0$ v tvare

$$X = A_X \sin\sqrt{\lambda - k^2}x + B_X \cos\sqrt{\lambda - k^2}x \tag{7.157}$$

ale tentoraz bez podmienky na hodnotu $\lambda - k^2$, ktora moze byt lubovlne kladne cislo ν, cim dostavame vlastne hodnoty a vlastne funkcie

$$u_{k\nu} = (a\sin\nu x_1 + b\cos\nu x_2)\sin\frac{k\pi x_2}{L} \ , \ k = 1, 2, \dots \ , \ \nu > 0 \tag{7.158}$$

vlastne hodnoty λ nie su diskretne, nakolko neide o ohranicenu oblast

viac rozmerov

Príklad 77. Nádite vlastné hodnoty a vlastné funkcie Laplaciánu pre n rozmernú kockatú oblast $0 < x_i < a \ i = 1, \dots, n$ s homogénnou

- Dirichletovou okrajovou podmienkou,
- Neumanovou okrajovou podmienkou.

□

7.3.2 Vlastné funkcie Laplaciánu v polárnych súradniciach

- riesenie Laplaceovej rovnice v polarnych suradniciach sme uz nasli, rovnice pre vlastne hodnoty Laplacianu budu podobne, avsak drobna zmena povedie na znacne rozdielny vysledok

- separovanim prememnnych $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ dostaneme

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \lambda = 0 \tag{7.159}$$

$$\frac{r(rR')'}{R} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu \tag{7.160}$$

rovnicu pre Θ hravo vyriesime, ak si uvedomime ze hladame riesenie ktore je periodicke v θ, tj. $\Theta(2\pi+\theta) = \Theta(\theta)$

$$\Theta'' = -\mu\Theta \;\Rightarrow\; \mu = m^2 \;,\; m = 0,1,\dots \;,\; \Theta = e^{\pm im\theta} \tag{7.161}$$

rovnica pre radialnu cast potom bude mat tvar

$$r^2R'' + rR' + (r^2\lambda - m^2)R = 0 \tag{7.162}$$

rieseniami tejto rovnice su Besselove funkcie

$$R(r) = AJ_m(\sqrt{\lambda}r) + BY_m(\sqrt{\lambda}r) \tag{7.163}$$

vlastne funkcie teda maju tvar

$$u_{\lambda m} = \left(AJ_m\left(\sqrt{\lambda}r\right) + BY_m\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)e^{\pm im\theta} \tag{7.164}$$

- ostava uz len urcit vlastne hodnoty λ a koeficienty A, B

  kedze Y_m je singularne pre nulovy argument, pre oblasti ktore obsahuju pociatok dostaneme pre ohranicene riesenia $B = 0$ (inak musime ale zaratat aj Y_m !)

  ako ziskame vlastnu hodnotu λ budeme ilustrovat na kruhovej oblasti s polomerom a s nulovou Dirichletovou okrajovou podmienkou $u|_{r=a} = 0$. aby to platilo pre vsetky funkcie (7.164) dostaneme

$$J_m\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{x_{m,k}^2}{a^2} \tag{7.165}$$

  kde $x_{m,k}, k = 1,2,\dots$ su nuly Besselovej funkcie $J_m(x)$

- **kmitanie kruhovej membrany** - vlastne frekvenice kmitania su presne tieto vlastne hodnoty. pat najnizsich je potom

$$x_{0,1} \approx 2.40 \;,\; u_1 \sim J_0(2.40r/a) \tag{7.166}$$

$$x_{1,1} \approx 3.83 \;,\; u_{2,3} \sim J_1(3.83r/a)\cos\theta \;,\; J_1(3.83r/a)\sin\theta \tag{7.167}$$

$$x_{2,1} \approx 5.14 \;,\; u_{4,5} \sim J_2(5.14r/a)\cos 2\theta \;,\; J_2(5.14r/a)\sin 2\theta \tag{7.168}$$

$$x_{0,2} \approx 5.52 \;,\; u_6 \sim J_0(5.52r/a) \tag{7.169}$$

  je velmi poucne nakreslit si funkcie $u_{1,\dots,6}$ a uvedomit si, ako pri nich membrana kmita

Príklad 78. Najdite vlastne hodnoty a vlastne funkcie Lalaciánu v kruhovej oblasti s Naumanovou okrajovou podmienkou. Explicitne nájdite niekolko najnizich vlastnich hodnot a nakreslite prislucha-juce vlastne funcie. □

7.3.3 Vlastné funkcie Laplaciánu v sférických súradniciach

- v sferickych suradniciach ma Laplacian tvar

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi}\right] \tag{7.170}$$

  vidime teda, ze to opat so separaciou premennych nebude uplne priamociare, ale bude sa to dat

- riesenie rovnice

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{7.171}$$

  budeme hladat v separovanom tvare $u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, cim sa rovnica rozpadne na

$$\frac{(r^2R')'}{R} + r^2\lambda = -\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta} = \mu \tag{7.172}$$

  a opat se tieto dva vyrazy musia rovnat tej istej konstante

- druhu cast rovnice prepiseme na

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \sin\theta\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta} + \mu\sin^2\theta \tag{7.173}$$

  co sa opat musi rovnat nejakej konstante. z rovnice pre Φ a z toho, ze toto riesenie musi byt periodicke s periodou 2π usudime, ze tato konstanta musi byt $-m^2, m = 0, 1, 2, \ldots$ a dostavame

$$\Phi = e^{\pm im\varphi}\ ,\ m = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.174}$$

- v rovnici pre Θ spravime substituciu $z = \cos\theta$, cim ju prevedieme na

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)M'(z)\right] + \left[\mu - \frac{m^2}{1-z^2}\right] = 0 \tag{7.175}$$

  tato rovnica ma normovatelne riesenie iba pre $\mu = l(l+1), l = 0, 1, 2, \ldots$ a pre $m \leq l$, ktore ma potom tvare pridruzenych Legendrovych funkcii

$$M(z) = AP_l^m(z) + BQ_l^m(z) \tag{7.176}$$

  vo vacsine toho, co bude zaujimat nas cast Q vypadne, nakolko pre $z = \pm 1$ a teda na z-ovej osy je tato funkcia singularna pre lubovolne m, l, dostavame teda

$$\Theta(\theta) = P_l^m(\cos\theta) \tag{7.177}$$

  to spolu s (7.174) dava

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = P_m^l(\cos\theta)e^{im\varphi}\ ,\ l = 0, 1, 2, \ldots\ ,\ m = -l, \ldots, l \tag{7.178}$$

ako vlastne funkci uhlovej casti laplacianu

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi}\right]Y_{lm}(\theta,\varphi)\equiv Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm} \tag{7.179}$$

tymto funkciam sa hovori sfericke hramonicke funkcie a tvora bazu funkcii na jednotkovej (a teda kazdej) sfere, v zmysle ze kazda funkcia $f(\theta,\varphi)$ na sfere sa da napisat ako

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{7.180}$$

- ostava vyriesit radialnu cast. tu bude zaver tiez trochu antiklimaticky. rovnica prejde do tvaru

$$r^2R''+2rR'+\left[\lambda r^2-l(l+1)\right]R=0 \tag{7.181}$$

ak teraz prejdeme k funkcii $S(r)=\sqrt{r}R(r)$ rovnica prejde na rovnicu pre S, ktorej riesenia budu polocislene Besselove funkcie

$$R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left[AJ_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)+BY_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{r}\right)\right] \tag{7.182}$$

opat v pripade, ze hladame riesenie ktore je konecne v pociatku cast Y vypadne

- ked teraz spojime (7.174,7.176,7.182), dostaneme vseobecne riesenie rovnice (7.171)

$$u_{\lambda lm}=\frac{1}{\sqrt{r}}\left[AJ_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)+BY_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{r}\right)\right]\left[CP_l^m(z)+DQ_l^m(z)\right]\left[Ee^{im\varphi}+D^{im\varphi}\right] \tag{7.183}$$

a specialne pre riesenia konecne v pociatku a na z-ovej osy

$$u_{\lambda lm}=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{7.184}$$

funkciam $J_{l+1/2}/\sqrt{r}$ sa niekedy hovori sfericke besselove funkcie a oznauju sa j

Laplaceova rovnica v sferickych suradniciach

- pozriem sa na Laplaceovu rovnicu, tj. pripad (7.181) s $\lambda=0$, substitucia $r=e^t$ da

$$\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{dR}{dt}-l(l+1)R=0 \tag{7.185}$$

hladame riesenie v tvare $R=e^{\alpha t}$, co da $a^2+a-l(l+1)=0$ a teda riesenia v tvare

$$R(r)=Ar^l+B\frac{1}{r^{l+1}} \tag{7.186}$$

a teda „slusne“ riesenia Laplaceovej rovnice v tvare

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^l+B_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}\right]Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{7.187}$$

- ako ukazku pouzitia tohto vzoraca si vyriesme priklad znamy z hodin teorie elektromagnetickeho pola - uzemnena gula v homogennom elektrickom poli

  uzemnenu vodivu gulu polomeru a vlozime do povodne homogenneho elektrickeho pola. to bolo povodne popisane potencialom $u_0 = -Ez = -Er\cos\theta$. novy potencial je dany rovniciou

$$\Delta u = 0 \ , \ u|_{r=a} = 0 \ , \ u|_{r\to\infty} = u_0 \tag{7.188}$$

  nakolko ocakavame, ze vo velkej vzdialenosti od gule sa pole nezmeni

  kedze situacia je symetricka okolo z-ovej osy, v rozvoji (7.187) budu iba cleny s $m = 0$ (premysliet). pre velke r

$$u = \sum_l A_l r^l P_l^0(\cos\theta) \tag{7.189}$$

  a teda cleny s $l \geq 2$ rastu prilis rychlo. clen s $l = 0$ nema spravne spravanie v smere $\theta = \pi/2$ a teda dostavame riesenie v tvare

$$u = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta \tag{7.190}$$

  koeficient A je urceny z podmienky pre $r \to \infty$ na $A = -E$, koeficient B urcime z druhej okrajovej podmienky

$$-Ea + \frac{B}{a^2} = 0 \ \Rightarrow \ B = Ea^3 \tag{7.191}$$

  cim dostaneme vysledok

$$u = -Er\left(1 - \frac{a^2}{r^3}\right)\cos\theta \tag{7.192}$$

  to je superpozicia povodneho elektrickeho pola a potenicalu dipolu s momentom $p \sim Ea^3$

Príklad 79. Nájdite všeobecné vyjadrenie riešenia Laplaceovej rovnice v cylindrických súradniciach. Nájdite riešenie tejto rovnice v oblasti polonekonecného valca $z > 0, r < a$ s homogénnou Dirichletovou okrajovou podmienkou. □

Sfericke harmoniky

- explicitne vyjadrenie sferickych harmonik aj s normaliaciou je

$$Y_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \ , \ m = -l, \ldots, l \tag{7.193}$$

- mody kmitania sferickej membrany - DOPLNIT

7.4 Rovnice vo viacerých rozmeroch

Táto časť je najmä zbierkou riešených príkladov, ktoré ilustrujú použitie výsledkov z predchádzajúcej časti na riešenie Laplaceovej rovnice, vlnovej rovnice a rovnice vedenia tepla v troch priestorových rozmeroch.

7.4.1 Laplaceova rovnica

Príklad 80. Polonekonečný valec $z > 0, r < a$ má plášť fixovaný na nulovú teplotu a základňu na teplotu T_0? Nájdite rovnováže rozdelenie teploty vo valci. □

Riešenie.

- ulohu riesime v cylindrickych suradniciach, kde je Laplacian

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7.194}$$

riesime Laplaceovu rovnicu $\Delta u = 0$, separujeme premenne $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ a dostaneme

$$\frac{(rR')'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = -\frac{Z''}{Z} = -\mu \tag{7.195}$$

- pre funkciu Z dostaneme teda

$$Z_\mu(z) = Ee^{-\sqrt{\mu}z} + Fe^{\sqrt{\mu}z} \tag{7.196}$$

a pre cast R, Θ dostaneme rovnaku rovnicu ako pre vlastne hodnoty laplacianu v polarnych suradniciach s vlastnou hodnotou a teda

$$u_{\mu m} = \left(AJ_m\left(\sqrt{\mu}r\right) + BY_m\left(\sqrt{\mu}r\right)\right)\left(C\sin m\theta + D\cos m\theta\right)\left(Ee^{-\sqrt{\mu}z} + Fe^{\sqrt{\mu}z}\right) \tag{7.197}$$

TOTO OVERIT

zostava uz len najst pravnu linearnu kombinaciu takychto funckii aby platili okrajove podmienky

- v prvom rade dostavame F=0, nakolko nase riesenie ma byt ohranicene ked $z \to \infty$, v druhom rade dostavame $m = 0$, nakolko nase riesenie je rotacne symetricke okolo osi z. v tretom rade dostavame $J_0(\sqrt{\mu}a) = 0$ a teda

$$\mu = \frac{x_{0,k}^2}{a^2}\ ,\ k = 1, 2, \ldots \tag{7.198}$$

kde $x_{0,k}$ su opat nuly Besselovej funkcie $J_0(x)$ a teda riesenie ma tvar

$$u(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(x_{0,k}z/a\right)e^{-x_{0,k}z/a} \tag{7.199}$$

ostava urcit konstanty A_k tak, aby platilo $u(r, \theta, 0) = T_0$. dostavame teda

$$A_k = T_0\int_0^a dr\, rJ_0\left(x_{0,k}z/a\right) \tag{7.200}$$

kde v nasom oznaceni su Besselove funkcie normovane na jednotku. explicitny vypocet potom da

$$A_k = \frac{2T_0}{x_{0,k}J_1\left(x_{0,k}\right)} \tag{7.201}$$

■

Príklad 81. Rozmyslite si, čo by sa v predchádzajúcom príklade zmenilo, ak by sme mali danú teplotu na základni inak, a to

1. radiálnou funkciou $T(r)$,

2. všeobecneou funkciou $T(r, \theta)$.

□

Príklad 82. Majme dutú vodivú sféru polomeru a, ktorej horná polovica je držaná na potenciály V_0 a dolná polovica je uzemnená. Ako vyzerá potenciál v sfére? □

Riešenie. • a

■

Príklad 83. Majme polguľu s polomerom a, ktorá na oblom povrchu prijíma teplo s konštantným tokom a na rovnom povrchu teplo konštantným tokom odovzdáva. Nájdite vzťah medzi týmito tokmi, aby bola splnená nutná podmienka pre existenciu riesešenia. Nájdite rovnovážne rozdelenie teploty. □

Riešenie. • a

■

7.4.2 Rovnica vedenia tepla

Príklad 84. Majme nekonečný valec s polomerom a, v ktorom je teplota na začiatku

$$T(r) = T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \ . \tag{7.202}$$

Ako vyzerá teplota vo vlaci v čase t? □

Riešenie. • a

■

Príklad 85. Majme polovicu nekonečných valca $r < a, \theta \in (0, \pi)$ alebo $r < a, y > 0$, v ktorej je na začiatku všade rovnaká teplota. Oblá časť je tepelne izolovaná, rovná časť v rovine x, z je držaná na konštantnej teplote. Nájdite rozdelenie teploty v čase t. □

Riešenie. • a

■

Príklad 86. Guľa s polomerom a má na povrchu fixovanú nulovú teplotu a na začiatku má v objeme rozdelenie teploty $T(r, \theta)$ nezávislé na súradnici φ. Ako sa v čase mení rozdelenie teploty v guli? □

Riešenie. • a

■

Príklad 87. Guľa s polomerom a si na povrchu vymieňa teplo s okolím o nulovej teplota a na začiatku má v objeme radiálne rozdelenie teploty $T(r)$. Ako sa v čase mení rozdelenie teploty v guli? □

Riešenie. • a

■

7.4.3 Vlnová rovnica

7.5 Spektrálny rozklad samoadjungovaných operátorov

- v tejto kapitole si ukazeme, ako vacsina toho, o sme hovorili pre operator L a rovnicu $Lu = f$ prejde do vseobecneho hilbertovho priestoru
- majme teda hilbertov priestor $\mathcal{H}$, v ktorom budeme sklarny sucit oznacovat $\langle u, v\rangle$ pre $u, v \in \mathcal{H}$ a majme na tomto Hilbertovom priestore samoadjungovany (symetricky) operator T, tj.

$$\langle u, Tv\rangle = \langle Tu, v\rangle \tag{7.203}$$

- priamociaro ukazeme ze vlastne cisla $Tu = \lambda u$ su ralne, nakolko

$$\langle u, Tu\rangle = \langle Tu, u\rangle \;\Rightarrow\; \lambda \langle u, u\rangle = \bar{\lambda} \langle u, u\rangle \tag{7.204}$$

  a vlastne vektory prisluchajuce roznym vlastnym hodnotam su na seba kolme

$$\langle \phi_k, T\phi_l\rangle = \langle T\phi_k, \phi_l\rangle \;\Rightarrow\; (\lambda_k - \lambda_l) \langle \phi_k, \phi_l\rangle = 0 \tag{7.205}$$

- kompaktny operator - taky, ktory zobrazi otvorenu mnozinu na kompaktnu mnozinu (teda identita napriklad nie)

  da sa dokazat, ze pre takyto operator plati spektralny rozklad

$$Tv = \sum_{\lambda_k} \phi_k \langle \phi_k, v\rangle \tag{7.206}$$

  pre vsetky v z jadra operatora T. to plati v zmysle ze limita tejto sumy ked k ide od 1 po N ide do Tv ked $N \to \infty$

  pouzitim trochy kvantovomechanickeho oznacenia ozme pisat

$$T = \sum_k \lambda_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k| \tag{7.207}$$

- co to znamena pre riesenie rovnic? riesme rovnicu $Tu = f$, vektor f rozlozime do bazy ϕ_k

$$f = \sum_k c_k \phi_k \;,\; c_k = \langle \phi_k, f\rangle \tag{7.208}$$

  potom

$$\sum_k (\lambda_k \langle \phi_k, u\rangle - c_k)\, \phi_k = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_k \langle \phi_k, u\rangle - c_k = 0 \;\forall i \tag{7.209}$$

  a teda dostavame ze koeficienty riesenia u v rozvoji do ϕ_k su c_k/λ_k a teda riesenie ma tvar

$$u = \sum_k \frac{c_k}{\lambda_k} \phi_k \tag{7.210}$$

- ked toto prepiseme opat braketovym znacenim

$$u = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} |\phi_k\rangle \langle\phi_k| f \tag{7.211}$$

dostaneme inverzny operator T^{-1}, ktory sme v predchadzajich castiach identifikovali s Greenovou funkciou

$$G = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} |\phi_k\rangle \langle\phi_k| \tag{7.212}$$

to najlepsie vidno ked si prepiseme (7.210) pre Hilbertov priestor funkcii

$$u(x) = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \int dV' \, \phi_k(x)\phi_k(x')f(x') \;\Rightarrow\; G(x,x') = \sum_k \frac{1}{\lambda_k}\phi_k(x)\phi_k(x') \tag{7.213}$$

tymto vztahom sa dava do spojitosti fourierova metoda a metoda Greenovej funkcie

- dva priklady

  funkcie vo stvorci s nulovou okrajovou podmienkou

$$\phi_{kl}(x_1,x_2) = N_{kl} \sin\frac{k\pi x_1}{a} \sin\frac{l\pi x_2}{a} \tag{7.214}$$

  a teda

$$G(x,x') = -\sum_{kl} \frac{1}{\frac{\pi^2}{a^2}(k^2+l^2)} N_{kl}^2 \sin\frac{k\pi x_1}{a} \sin\frac{l\pi x_2}{a} \sin\frac{k\pi x_1'}{a} \sin\frac{l\pi x_2'}{a} \tag{7.215}$$

  rovnica vedenia tepla s nulovou okrajovou podmienkou

$$u_t = \Delta u \;,\; u(x,0) = \phi(x) \tag{7.216}$$

  riesenie teda bude

$$u(x,t) = \int_\Omega dV' \left(\sum_k e^{-\lambda_k}\phi_k(x)\phi_k(x')\right)\phi(x') \tag{7.217}$$

  vyrazu v zatvorke sa hovori tepelne jadro, alebo heat kernel

$$K(x,x') = \sum_k e^{-\lambda_k}\phi_k(x)\phi_k(x') \tag{7.218}$$

8 Zovšeobecnená úloha a Sobolevove priestory

V tejto casti len velmi kratky uvod do toho, co je zovseobecnena uloha, Sobolevove priestory a podobne.

- idea je podobna ako pri distribuciach, ked sme si vsimli, ze sme pri predpokladoch slusnosti rieseni a pociatocnych podmienok rovnic dosli k vzorcom, ktore davaju rozumny vysledok aj pre funkcie ktore tieto predpoklady nesplnaju

  konkretne integralne vzorce daju rozumny vysledok aj pre vseliak nespojite funkcie, ktore normalne nevieme derivovat

- chceli by sme teda nejak zovseobecnit pojem funkcie a vyrobit priestor, v ktorom bude mat rovnica $Lu = f$ dobry zmysel aj pre nespojitu funkciu u

- idea v zavedeni „slabych“ pojmov, ktore budu povedome z teorie distribucii. preco to ale je ine? lebo tu budeme vediet objeky medzi sebou pobodovo nasobit a teda je to uzitocne do nelinearnych rovnic, kde take nasobenie vystupuje

- opat budeme mat priestor testovacich funkcii $\varphi \in \mathcal{D}$

  majme priestor funkcii $L^2(\Omega)$ a teda kvadraticky integrovatelne funkcie na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, norma je v tomto priestore dana

  $$\|u\|^2 = \int_\Omega dV\, u^2(x) \tag{8.1}$$

  zavedieme **slabu derivaciu** $\partial_i^W u$ pre $u \in L^2$ nasledovnym vztahom (motivacia z integrovania per-partes)

  $$\int_\Omega dV\, (\partial_i^W u)\varphi = -\int_\Omega dV\, u(\partial_i \varphi)\ \forall \varphi \in \mathcal{D} \tag{8.2}$$

- priestor funckii, pre ktore existuje takto definovana slaba derivacia budeme nazyvat **Sobolevov priestor** a oznacovat $W^{2,1}(\Omega)$. zavedieme v nom normu

  $$\|u\|_W^2 = \int_\Omega dV\, \left(u^2 + \left|\nabla^W u\right|^2\right) \tag{8.3}$$

  nie je tazke rozmysliet si, co bude priestorom $W^{k,l}(\Omega)$ a ako v nom bude vyzerat norma.

- **slabe riesenie** rovnice $Lu - f = 0$, kde L je linearny diferencialny operator radu l, bude potom taka funcia $u \in W^{2,l}$, pre ktoru plati

  $$\int_\Omega dV\, u\,(L\varphi - f) = 0\ \forall \varphi \in \mathcal{D} \tag{8.4}$$

Hovoril som ze to bude kratke.

9 Nelinárne rovnice a rovnice vyššých rádov

9.1 Razy revisited

- v casti 1.4 sme sa uz s nelinearnou rovnicou stretli, islo o (bezviskoznu) Burgersovu rovnicu

$$u_t + uu_x = 0 \tag{9.1}$$

ide o transportnu rovnicu, kde rychlost transportu zavisi od koncentracie, miesta s vyssou koncentraciou dobiehaju miesta z nizsou a ukazali sme, ze vysledkom tejto zavislosti je vznik razov - nespojitosti v povodne spojitej pociatocnej podmienke

toto sa prejavilo tym, ze charakteristiky sa v (x,t) diagrame pretinali a riesenie prestalo byt jednoznacne urcene. vtedy sme povedali ze v takom pripade prestava nas model fungovat a musime na pomoc zavolat cosi ine

- tym cimsi bol zakon zachovania, teraz sme uz dospeli a mozeme to vyriesit vysokoskoslky

9.1.1 Slabé riešenie

- teraz ten isty vztah pre rychlost sirenia razu odvodime metodou slabych rieseni

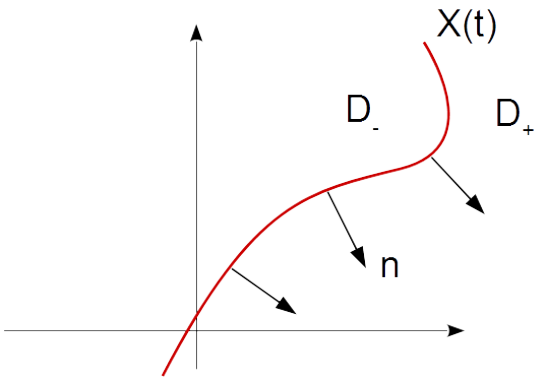
opat budeme vychadzat zo zakona zachovania

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^n}{n}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = 0 \tag{9.2}$$

avsak teraz budeme hladat jeho riesenie v slabom zmysle, tj.

$$\begin{aligned} \int dx\,dt\,\left(u^n\varphi_t + \frac{n}{n+1}u^{n+1}\varphi_x\right) &= 0 \\ \int dx\,dt\,\left(\frac{n}{n+1}u^{n+1}, u^n\right)\cdot\nabla\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{9.3}$$

kde druhy zapis rovnice sa coskoro ukaze byt uzitocny. predpokladajme, ze riesenie u ma jednu nespojitost, ktora sa v case r nachadza v mieste $X(t)$ a rozdeluje integracnu oblast na dve casti D_- a D_+. nenormovany vektor v smere X je (dx,dt) a teda jednotkovy vektor kolmy na $X(t)$ je



$$n = \frac{1}{\sqrt{1+\left|\dot{X}\right|^2}}\left(1, -\dot{X}\right) \tag{9.4}$$

a teda normalovy vektor pre ∂D_- je n a pre ∂D_+ je to $-n$, tak dostaneme pouzitim Gaussovej vety a uvazenim, v objeme $D_\pm$ plati zakon zachovania

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_-} ds\,\varphi\left[n\cdot\left(\frac{n}{n+1}u^{n+1}, u^n\right)\right] - \int_{\partial D_+} ds\,\varphi\left[n\cdot\left(\frac{n}{n+1}u^{n+1}, u^n\right)\right] &= 0\\ \int dt\,\varphi\left(\frac{n}{n+1}u_-^{n+1} - u_-^n\dot{X} - \frac{n}{n+1}u_+^{n+1} + u_+^n\dot{X}\right) &= 0\end{aligned} \tag{9.5}$$

toto ma platit pre lubovolnu funkciu φ a teda integrand musi byt nulovy, cim dostavame opat rovnicu (**??**)

$$\dot{X} = \frac{n}{n+1}\frac{u_-^{n+1} - u_+^{n+1}}{(u_-^n - u_+^n)} \tag{9.6}$$

opat nam teda ostava urcit, ktory zakon zachovania zostava v plastnosti aj v pritomnosti razu

9.2 Burgersova rovnica

- najjednoduchsi sposob, ako „opravit“ rovnicu (9.1) je pridat na pravu stranu clen εu_{xx}. ten zahrna efekty viskozity, pripadne pri popise dopravy hovori o tom, ze vodici volia svoju rychlost nie len podla hustoty premavky, ale aj podla toho ako sa tato hustota meni

  pre male zmeny u je clen u_{xx} zanedbatelny a dostavame povodnu transportnu rovnicu, pre velke zmeny je clen dolezity

  dostavame teda Burgersovu rovnicu

  $$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \tag{9.7}$$

  tato rovnica sa da explicitne vyriesit (Hopf,Cole)

- zavedieme substitucie

  $$u = \psi_x\ , \psi = -2\varepsilon\log\phi \tag{9.8}$$

  ktore prevedu Burgersovu rovnicu (9.7) na

  $$\phi_t = \varepsilon\phi_{xx} \tag{9.9}$$

- k tomu sa da prist nasledovne. prepiseme rovnicu (9.7) ako zakon zachovania

  $$u_t - \left(\varepsilon u_x - \frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \tag{9.10}$$

  vidime, ze ak nadjeme funkciu ψ, pre ktoru

  $$u = \psi_x\ ,\ \psi_t = \varepsilon u_x - \frac{1}{2}u^2 \tag{9.11}$$

rovnica (9.10) bude trivialne splnena. pre ψ potom dostavame

$$\psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 = \varepsilon\psi_{xx} \tag{9.12}$$

vsimnite si, ze to je sice podobne vyzerajuca, ale ina rovnica ako povodna Burgerova rovnica v tvare

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = \varepsilon u_{xx} \tag{9.13}$$

- majme teraz pociatocnu podmienku $u(x,0) = f(x)$, potom je zrejme ze

$$\phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2\varepsilon}F(x)} \tag{9.14}$$

kde $F(x)$ je primitivna funkcia k $f(x)$, $F'(x) = f(x)$ rovnicu pre ϕ (9.9) vieme riesit Poissonovym vzorcom

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int d\xi\, \phi(x,0) e^{-\frac{1}{4\pi t}(x-\xi)^2} \tag{9.15}$$

$u(x,t)$ potom najdeme z

$$u(x,t) = -2\varepsilon \frac{\phi_x}{\phi} \tag{9.16}$$

- pozrime sa teraz na niektore konkretne pripady

  zacnime pociatocnou podmienkou

$$u(x,0) = -\tanh\left(\frac{x}{a}\right) \tag{9.17}$$

pre parameter a. dostavame

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int ds\, \tanh\left(\frac{s}{a}\right) = -a\int dz\, \tanh z = \begin{pmatrix} e^z = u \\ dz = u^{-1}du \end{pmatrix} = \\ &= -a\int du \frac{u^2-1}{u^3+u} = -a\int du\left[\frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{u}\right] = -a\left[\log\left(u^2+1\right) - \log u + C\right] = \\ &= -a\log\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) + C \end{aligned} \tag{9.18}$$

aditivna konstanta C sa v ϕ zmeni na multiplikativnu konstantu e^C a vo vztahu pre u (9.16) vypadne, mozme teda polozit $C = 0$ a dostaneme

$$\phi(x,t) = \int d\xi \left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)^{\frac{a}{2\varepsilon}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon}} \tag{9.19}$$

- pripad $a = 2\varepsilon$ - riesenie bude

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\left[2\sqrt{\pi\varepsilon t}e^{\frac{t+2x}{4\varepsilon}} + 2\sqrt{\pi\varepsilon t}e^{\frac{t-2x}{4\varepsilon}}\right] = e^{\frac{t}{4\varepsilon}} 2\cosh\left(\frac{x}{2\varepsilon}\right) \tag{9.20}$$

a z toho

$$u(x,t) = -\tanh\left(\frac{x}{2\varepsilon}\right) \tag{9.21}$$

a teda staicke riesnie!!

- pripad $a = 4\varepsilon$ - tu mame

$$\left(e^{\frac{\xi}{4\varepsilon}} + e^{-\frac{\xi}{4\varepsilon}}\right)^2 = e^{\frac{\xi}{2\varepsilon}} + e^{-\frac{\xi}{2\varepsilon}} + 2 \tag{9.22}$$

co da

$$\phi(x,t) = e^{\frac{t}{4\varepsilon}} 2\cosh\left(\frac{x}{2\varepsilon}\right) + 2 \tag{9.23}$$

a riesenie

$$u(x,t) = -\frac{\sinh\left(\frac{x}{2\varepsilon}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{2\varepsilon}\right) + e^{-\frac{t}{4\varepsilon}}} \tag{9.24}$$

co je riesenie ktore v limite $t \to \infty$ prechadza na staticke riesenie (9.21)

- ina pociatocna podmienka

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \tag{9.25}$$

dostaneme ze

$$\psi(x,0) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \tag{9.26}$$

a teda

$$\phi(x,0) = \begin{cases} e^{-x/2\varepsilon} & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{9.27}$$

riesenie pre $\phi(x,t)$ s touto pociatocnou podmienkou je

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{0} d\xi\, e^{-\frac{\xi}{2\varepsilon} - \frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{0}^{\infty} d\xi\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon}} \tag{9.28}$$

co je vyjadrenie obsahujuce error function, $u(x,t)$ bude obsahovat jej derivacie a to vcelku skaredy vyraz. ked sa to vsak nakresli (napriklad Mathematice), uvidime ostry hrb v rieseni, ktory sa pohybuje rychlostou

$$\dot{X} = \frac{1}{2} \tag{9.29}$$

- presne to sme cakali, nakolko Burgerova rovnica hovori, ze zakon zachovania pre $n = 1$ plati dalej, avsak ostatne uz neplatia a presne taku hodnotu pre $\dot{X}$ ocakavame

Príklad 88. Ukážte, že Burgerova rovnica má riešenie dané funkciou

$$\phi(x,t) = Ae^{\varepsilon a^2 t - ax} + Be^{\varepsilon b^2 t - bx} \ . \tag{9.30}$$

$A, B, a \neq b$ su kladne realne konstanty. Nájdite vyjadrenie riešenia $u(x,t)$ a rozmyslite si, že ide o kopec výšky $2\varepsilon|a-b|$ a šírky rádovo $1/|a-b|$, ktorý sa pohybuje do prava rýchlosťou $\varepsilon(b+a)$. Ukážte, že to je opäť presne toľko, koľko by ste čakali podľa zákona zachovania energie. □

Riešenie. Funkciu (9.30) je priamociare dosadit do difuznej rovnice (9.9). Odvodenie riesenia tiez nie je tazke, dostaneme

$$u(x,t) = 2\varepsilon a \frac{e^{a(\varepsilon a t - x)} + \frac{bB}{aA} e^{b(\varepsilon b t - x)}}{e^{a(\varepsilon a t - x)} + \frac{B}{A} e^{b(\varepsilon b t - x)}} = 2\varepsilon a \frac{1 + \frac{bB}{aA} e^{\varepsilon(b-a)(\varepsilon(b+a)t - x)}}{1 + \frac{B}{A} e^{\varepsilon(b-a)(\varepsilon(b+a)t - x)}} \tag{9.31}$$

To je funkcia tvaru $f(x-ct)$ kde rychlost sirenia je $c=\varepsilon(b+a)$. Bez ujmi na vseobecnosti mozme predpokladat $b>a$. Potom

$$f(\xi\to\infty)=2\varepsilon a\ ,\ \ f(\xi\to-\infty)=2\varepsilon b\ . \tag{9.32}$$

Ide teda o kopec, ktory prechadza z vacsej hodnoty $2\varepsilon b$ na mensiu hodnotu $2\varepsilon a$ a preto m vysku $2\varepsilon(b-a)$. Pre rychlost sirenia teda dostavame $(u_-+u_+)/2$, presne podla zakona zachovania.

Ostava najst vztah pre sirku kopca. Zadefinujme sirku ako vzdialenost bodov, medzi ktorymi strati funkcia α nasobok svojej vysky. Nech su tieto body $z_\pm$, tj

$$f(z_-)-f(z_+)=\alpha 2\varepsilon(b-a)\ . \tag{9.33}$$

Ak zadefinujeme $y_\pm=e^{(b-a)z_\pm}$ potom dostaneme pre sirku kopca

$$z_+-z_-=\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{y_+}{y_-}\right)\ . \tag{9.34}$$

Vyraz $\log(y_+/y_-)$ uz nezavisi od ε, takze v leading order v ε mame

$$z_+-z_-\sim\frac{1}{b-a} \tag{9.35}$$

co je ako sme videli $\varepsilon/|u_--u_+|$. ■

9.3 KdV rovnica

- trochu historie

  1834 - J.S. Russell pozoroval v kanaly vlnu, ktora nemenila svoj profil niekolko kilometrov (nahanal ju na koni), potom v umelom kanaly taketo vlny studoval a zmeral zavislost rychlosti jej siernia od anplitudy

  predtym sa myslelo, ze povrchove vlny na hladine vedia byt len sinusovky

  1894 - Korteweed a de Vries ukazali, ze vlny na plytkej vode (neskor ukazeme co to znamena presne) sa riadia rovnicou

  $$u_t+\alpha uu_x=\beta u_{xxx} \tag{9.36}$$

  a ze rieseniami tejto rovnice su aj vlny v tvare ako ich pozoroval Russell

  od 1950 sa ukazalo ze KdV rovnica ma sirku paletu velmi zaujimavych vlastnosti daleko za popis sirenia vln na vodnej hladine

- preskalovanim premennych x,t,u mozme nastavit koeficienty α,β lubovolne, najcastejsie $\alpha=1,\beta=-1$ a teda rovnica

  $$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{9.37}$$

- podobne sa da ukazat, ze ak $u(x,t)$ je riesenie (9.36), potom aj

  $$\lambda^2u(\lambda x,\lambda^3t) \tag{9.38}$$

je riesenie (9.36), specialne pre $\lambda = -1$. a rovnako

$$u(x - ct, t) + c/\alpha \tag{9.39}$$

je riesenie (9.36) pre lubovolne $c > 0$

- riesenie rovnice (9.37) budeme hladat v tvare postupnej vlny $f(x-ct) = f(z)$, cim rovnica prejde na

$$-cf' + ff' + f''' = 0 \tag{9.40}$$

co mozme preintegrovat na

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 + f'' = A \tag{9.41}$$

a vyuzitim symetrie (9.39) mozme prest k $A = 0$. takuto rovnicu vynasobime f' a opat preintegrujeme, cim dostaneme

$$\frac{1}{2}(f')^2 + \frac{1}{6}f^3 - \frac{c}{2}f^2 = E \tag{9.42}$$

ako vidime, ide o rovnicu, ktora popisuje pohyb castice v istom potencialy. vo zvycajnom oznaceni klasickej mechaniky by sme mali

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{c}{2}x^2 = E \tag{9.43}$$

a teda pohyb v potencialy $V(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{c}{2}x^2$. derivovanim tejto rovnice podla casu dostaneme Newtonovu pohybovu rovnicu. hladame riesenie, ktore popisuje vlnu, takze pre $t \to \pm\infty$ musime dostat $x \to const.$ tu vyuzijeme fakt z klasickej mechaniky, ktory hovori ze pohyb do lokalneho maxima potencialu s energiou presne rovnou energii tohto maxima trva nekonecne dlhy cas. pohyb v suradnici x, ktory bude zodpovedat hladanej vlne, sa teda zacina v lokalnom maxime potencialu $x = 0$, pokracuje do prava, zastane a vrati sa spat. je zrejme ze tento pohyb ma nulovu energiu $E = 0$. ostava uz len dopocitat presnycasovy priebeh

(tento argument odporucam dobre premysliet, tiez je uzitocne nakreslit cely fazovy portret pre pohyb dany rovnicou (9.43))

zavedieme $f = g^2$, pre ktoru plati rovnica

$$(g')^2 + \frac{1}{6}g^4 - \frac{c}{2}g^2 = 0 \tag{9.44}$$

tu nam pomoze niekolko hypergoniometrickych identit

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{9.45}$$

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \tag{9.46}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cosh^2 x} = -2\tanh x \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{9.47}$$

aby sme dostali riesenie

$$g(z) = a\frac{1}{\cosh(b(z - z_0))} \tag{9.48}$$

s podmienkou $b^2 = a^2/12 = c/4$. dostavame konecne riesenie

$$u(x,t) = 3c\frac{1}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct-x_0)\right]} \tag{9.49}$$

- a teda postupna vlna. vidime teda, ze tendenciu zhlukovat sa a vytvarat raz v profile $1/\cosh^2 x$ z clenu uu_x (preco ma tento profil tentdenciu vytvarat raz?) v rovnici kompenzuje disperzia sposobena clenom u_{xxx} (o disperzii viac v nasledujucej casti)

9.4 sine-Gordon rovnica

- solitovone riesenia dovoluju aj ine rovnice. z nich pre nas bude zaujimava sine-Gordonova rovnica

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \tag{9.50}$$

v ktorej bude mat stabilita solitonovych rieseni topologicke pozadie

- nazov - ked extra clen napiseme v tvare $m^2\beta^{-1}\sin(\beta u)$, v limite maleho β dostaneme Klein-Gordonovu rovnicu pre volne skalarne pole s hmotnostou m

- opat budeme hladat riesenia v tvare postupnych vln $f(x-ct) = f(z)$, z coho dostaneme

$$\frac{1}{2}(1-c^2)(f')^2 = -\cos f + C_1 \tag{9.51}$$

z podobnych uvah ako pre KdV rovnicu dostaneme, ze solitonove riesenie existuje pre $C_1 = 1$ a prepiseme tuto rovnicu do separovaneho tvaru

$$\frac{df}{\sin\frac{f}{2}} = \pm\frac{2dz}{\sqrt{1-c^2}} \tag{9.52}$$

ktory zintegrujeme

$$2\log\tan\frac{f}{4} = \pm\frac{2}{\sqrt{1-c^2}}(z-z_0) \tag{9.53}$$

$$f = 4\arctan e^{\pm\frac{z-z_0}{\sqrt{1-c^2}}} \tag{9.54}$$

a teda schod, ktory sa pohybuje rychlostou c. dostavame riesenia pre sirenie oboma smermy. ide o riesenia, ktore prechadzaju z nulovej hodnoty na hodnotu 2π a teda je to kvalitativne iny soliton ako KdV soliton (9.49)

- iny pristup k rieseniu by bol dokazat, ze rovnica ma relativisticku invariantnost, najst staticke riesenie a potom toto riesenie boostovat do tvaru

$$u(x,t) = f_{stat}\left(\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}\right) \tag{9.55}$$

- **mechanicka interpretacia** - rovnica (9.50) popisuje system matematickych kyvadiel. tie su upevnene na spolocnu vodorovnu priamku a kazde moze kmitat v rovine kolmej na tuto priamku. okrem toho su susedne kyvadla spojene pruzinou (alebo torzne previazane). a rovnica plati v priblizeni velmi husto ulozenych kyvadiel

  rovnica ma potom evidentne staticke riesenie kde vsetky kyvadla visa bez kmitania a male oscilacie okolo tejto rovnovaznej polohy

  avsak ma aj dalsie riesenie, ktore zodpoveda pretoceniu polovice kyvadiel raz okolo osi otacania. tak vznikne akasi vyvrtka, ktora sa moze pohybovat hore-dolu po retazi kyvadiel

  a z toho je zrejme, ze budu existovat aj komplikovanejsie zatocene riesenia

- **Bäcklund transformation** - iny pristup k rieseniu rovnice

  najskor prejdeme k suradniciam $\xi = x + t, \eta = x - t$ v ktorych ma rovnica tvar

$$u_{\xi\eta} = \sin u \tag{9.56}$$

  majme riesenie ϕ^0 tejto rovnice a zkonstruujme funkciu ϕ^λ, pre ktoru plati

$$\phi^\lambda_\eta = 2\lambda \sin\left(\frac{\phi^\lambda + \phi^0}{2}\right) + \phi^0_\xi \tag{9.57}$$

$$\phi^\lambda_\xi = 2\frac{1}{\lambda} \sin\left(\frac{\phi^\lambda - \phi^0}{2}\right) - \phi^0_\eta \tag{9.58}$$

  pre lubovolne λ. priamociary vypocet dava

$$\phi^\lambda_{\xi\eta} = \lambda \cos\left(\frac{\phi^\lambda + \phi^0}{2}\right)\left(\phi^\lambda_\xi + \phi^0_\eta\right) = \cos\left(\frac{\phi^\lambda + \phi^0}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi^\lambda - \phi^0}{2}\right) = \sin\phi^\lambda - \sin\phi^0 \tag{9.59}$$

  a teda aj ϕ^λ splna rovnicu (9.50)

  ak teraz zoberieme za ϕ^0 trivialne riesenie $\phi^0 = 0$, integrovanim dvojice rovnic

$$\phi^\lambda_\eta = 2\lambda \sin\frac{1}{2}\phi^\lambda \ , \ \phi^\lambda_\xi = 2\frac{1}{\lambda}\sin\frac{1}{2}\phi^\lambda \tag{9.60}$$

  dostaneme solitonove riesenie (9.55) s

$$c = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} \tag{9.61}$$

- naviac ak (ked) si uvedomime ze dve taketo transformacie komutuju, teda ze

$$\phi^0 \to \phi^{\lambda_1} \to \phi^{\lambda_1\lambda_2} \ , \ \phi^0 \to \phi^{\lambda_2} \to \phi^{\lambda_2\lambda_1} \tag{9.62}$$

  da $\phi^{\lambda_1\lambda_2} = \phi^{\lambda_2\lambda_1} \equiv \phi^{12}$, dostaneme

$$\tan\frac{\phi^{12} - \phi^0}{4} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tan\frac{\phi^2 - \phi^1}{4} \tag{9.63}$$

v ked vezmeme $c_1 = c_2 = c$ dostaneme tzv kink-kink riesenie (hrb-hrb)

$$u(x,t) = 4\arctan\left(\frac{c\sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma ct)}\right) \tag{9.64}$$

kde $\gamma = 1/\sqrt{1-c^2}$ je zvycajny relativisticky faktor.

ked vezmeme $c_1 = -c_2 = c$ dostaneme tzv kink-antikin riesenie (hbr-antihrb)

$$u(x,t) = 4\arctan\left(\frac{\sinh(\gamma ct)}{c\cosh(\gamma x)}\right) \tag{9.65}$$

- je dobre rozmysliet si ako tieto riesenia vyzeraju pre retiazku kyvadiel
- na rovnicu (9.50) sa da pozerat ako na pohybovu rovnicu klasickeho 1+1 rozmerneho pola. ta potom plynie z (hustoty) lagranzianu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(u_t^2 - u_x^2\right) - (1-\cos u) \tag{9.66}$$

ako Lagrange-Eulerova rovnica. prisluchajuci hamiltonian je potom

$$\mathcal{H} = \int dx \left(\frac{1}{2}\left(u_t^2 + u_x^2\right) + (1-\cos u)\right) \tag{9.67}$$

pre riesenia s konecnou energiou musime mat $u_x \to 0$ pre $x \to \pm\infty$ a teda $u \to const.$ kedze aj potencialna energia musi byt konecna, tato konstanta musi byt taka, aby

$$1 - \cos u = 0 \tag{9.68}$$

co da $u(\pm\infty, t) = 2\pi n_\pm$ kde sme explicitne zdoraznili ze prirodzene cislo n, ktore nuluje vyraz $1-\cos$ moze byt rozne na pravo a na lavo. vidime, ze solitonove riesenie (9.55) je specialnym pripadom pre $n_- = 0, n_+ = 1$, podobne dostavame zodpovedajuce $n_\pm$ pre kink-(anti)kink

- spojite deformacie pola nemozu zmenit pocet hrbov, nakolko na to by bolo treba nekonecne vela energie. dostavame teda ze pocet hrbov

$$Q = \frac{u(\infty) - u(-\infty)}{2\pi} \tag{9.69}$$

sa zachovava. toto mozme prepisat ako zakon zachovania

$$Q = \int dx\,\rho\ ,\ \rho = \frac{1}{2\pi}u_x \tag{9.70}$$

ked potom hladane zachovavajuci sa prud, dostaneme

$$j_x = -\rho_t = -\frac{1}{2\pi}u_{xt} \ \Rightarrow\ j = -\frac{1}{2\pi}u_t \tag{9.71}$$

co nam da zachovavajuci sa prud

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu u\ ,\ \partial^\mu J_\mu = 0 \tag{9.72}$$

dostali sme zakon zachovania, ktory nijak nepouzil pohybovu rovnicu, iba topologiu problemu

- trochu iny pohlad dostaneme ked si uvedomime ze zavedenim

$$\varphi = e^{iu} \tag{9.73}$$

dostaneme pole, ktoreho hodnoty su na kruznici a teda zobrazenie

$$\varphi : \mathbb{R} \to S^1 \tag{9.74}$$

s obmedzenim, ze obraz zobrazenia musi byt uzavreta slucka na S^1 prechadzajuca jednotkou (spomenme si na $\cos u = 1$). taketo zobrazenia sa daju klasifikovat poctom namotani realnej osi na kruznicu, ktore je v tomto pripade rovne poctu hrbov Q. je zrejme, ze spojitymi zmenami nevieme zmenit pocet tychto namotani tak ako nevieme zmenit pocet hrbov Q

- toto je aj klucom k stabilite riesenia (9.55), funkcia zodpovedajuca rieseniu bez hrbu (kopec) sa neda spojitymi deformaciami zmenit na toto riesenie, resp. na jeho zmenu na riesenie bez hrbu (kopec) by bolo treba nekonecne vela energie

9.5 Dispezia

9.5.1 Základná idea disperzie, fázová a grupová rýchlosť

- s efektom disperzie sme sa uz stretli, avsak zatial iba v zakuklenej podobe

  na zaver si o nom povieme viac

- jednym slovom disperzia = rozne frekvenice sa siria rozne rychlo, co sa tym mysli?

  vlnova rovnica v jednom rozmere

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{9.75}$$

  jej riesenie sme nasli d'Alambertovim vzorcom. pozrieme sa na to ale inak

  budeme hladat riesenie v tvare rovinnej vlny

$$u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \tag{9.76}$$

  dosadenim do rovnice dostavame podmienku $\omega^2 = c^2k^2$ a teda $\omega = \pm ck$ a dostavame

$$u(x,t) = Ae^{ik(x-ct)} \tag{9.77}$$

  a teda sinusovka sa za cas δt posunie o vzdialenost $c\delta t$. o tolko sa posunie teda miesto s rovnakou fazou $kx - \omega t$ a rychlost tohto sirenia nazyvame fazovou rychlostou

$$v = \frac{\omega}{k} = \pm c \tag{9.78}$$

  prva rovnost bude platit aj pre vseobecnejsi pripad

- lubovolna linearna rovnica ma riesenie v tvare (9.76), avsak podmienka, ktoru dostaneme pre ω bude ina, hovorime jej disperzny vztah a piseme $\omega = \omega(k)$, fazova rychlost je potom dana vztahom $faza = const$ alebo

$$\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0 \;\Rightarrow\; k\dot{x} - \omega = 0 \;\Rightarrow\; v = \frac{\omega(k)}{k} \tag{9.79}$$

- v pripade rovnice s linearnym disperznym vztahom (vlnova, transportna) sme dostali riesenie v tvare $f(x-vt)$ a teda zaciatocny profil sa nemeni, iba sa posuva. to suvisi s tym, ze vsetky rovinne vlny sa siria rovnako rychlo. ak rozvinieme pociatocnu podmienku do furierovych komponent

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{ikx} \tag{9.80}$$

kazda z tychto komponent si teraz zije svojim zivotom

$$A(k,t) = A(k) e^{i\omega(k)t} \;\Rightarrow\; u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} \tag{9.81}$$

ak $\omega(k) = vk$ a integral da ocivide $u(x,t) = f(x-vt)$

ak je $\omega(k)$ komplikovanejsie, vysledok bude iny. na zaciatku lokalizovany balik sa bude rozmazavat. to preto, ze komponenty s roznym k v (9.80) pojdu rozne rychlo

nas bude zaujimat, ako rychlo sa budu sirit hrby v takto lokalizovanych balikoch. to bude popisovat grupova rychlost V a na jej odvodenie si ukazeme dva rozne sposoby (v troch roznych baleniach)

  - ideou prveho je interferencia - hrby budu vznikat tam, kde maju vsetky mody rovnaku fazu a teda kde

$$\frac{d}{dk}(kx - \omega t) = 0 \;\Rightarrow\; x - \frac{d\omega}{dk} t = 0 \;\Rightarrow\; V = \frac{d\omega}{dk} \tag{9.82}$$

    pre $\omega = vk$ dostaneme $v = V$ a teda uz viac krat overeny fakt ze baliky sa nerozchadzaju
  - nech $A(k)$ je nenulova iba v malom okoli hodnoty k_0, potom mozme pisat

$$\omega(k) = \omega_0 + U(k - k_0) \tag{9.83}$$

    a teda

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, A(k) e^{ik(x-Ut)} e^{-i(\omega_0 - Uk_0)t} = \phi(x-Ut) e^{-i(\omega_0 - Uk_0)t} \tag{9.84}$$

    a teda hrb sa moduluje oscilujucim faktorom a posuva sa rychlostou U, ktora je presne

$$V = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \tag{9.85}$$

    tento vztah nam aj hovori, kde mame robit derivaciu aby sme vypocitali rychlost daneho balika. v maxime rozdelenia $A(k)$
  - treti posob je prezleceny prvy - napiseme

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, A(k) e^{it\psi(k,x,t)} \tag{9.86}$$

    kde

$$\psi(k,x,t) = k\frac{x}{t} - \omega(k) \tag{9.87}$$

    pre velke casi je exponenciala rychlo oscilujuci faktor, co znamena pre malu zmenu k sa velmi zmeni a prispevky do integralu od k a $k + dk$ sa navzajom vyrusia - iba ze by sa ψ

nemenilo, vtedy prispeva k aj $k+dk$ s rovnakou fazou, dominantny prispevok do integralu bude od tych oblasti, v ktorych

$$\frac{d\psi}{dk} = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{d\omega}{dk}t \tag{9.88}$$

co da opat ten isty vztah pre V

- priklad : $\omega(k) = ck^{\alpha}$, potom

$$v = ck^{\alpha-1} \;,\; V = \alpha c k^{\alpha-1} = \alpha v \tag{9.89}$$

9.5.2 Vlny vo vode a disperzny vztah z okrajovych podmienok

- ako nazov naznacuje, disperzia nemusi byt zakodovana v rovnici a moze byt dosledkom netrivialnych okrajovych podmienok
- studujme prudenie objemu vody dane polom rychlost $\vec{v}$, ak nas zaujima nevyrive prudenie, z $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ dostavame existenciu potencialu pre pole rychlosti

$$\vec{v} = \vec{\nabla} u \tag{9.90}$$

z nestlacitelnosti kvapalini $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ dostaneme Laplaceovu rovnicu

$$\Delta u = 0 \tag{9.91}$$

majme teraz situaciu, v dvoch rozmeroch, tiazove pole v zapornom y-ovom smere a rovnovaznu vysku kvapaliny h_0. nech je vlnenie kvapaliny dane vyskou $h(x,t)$ v mieste x a case t. nasa oblast je teda ohranicena $0 < y < h(x,t)$ a na hranici musime urcit okrajove podmienky. to je postupne nulovost toku cez dno, volnost hadiny (atmosfericky tlak v bernouliho rovnici) a trochu komplikovanejsi vztah ktory hovori ze hladina sa netrha (element na hladine zostane na hladine)

$$u_y\big|_{y=0} = 0 \tag{9.92}$$

$$u_t + \frac{1}{2}\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u + gy\Big|_{y=h(x,t)} = 0 \tag{9.93}$$

$$h_t - u_y + h_x u_x\big|_{y=h(x,t)} = 0 \tag{9.94}$$

posledna podmienka hovori, ze ak zadefinujeme $f = h - y$, tak na hladine bude konvektivna derivacia tejto funkcie nulova. podmienku potom dostaneme priamo z definice konvektivnej derivacie

$$\frac{df}{dt} = f_t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f \tag{9.95}$$

a $\vec{v} = \vec{\nabla} u$. prvu okrajovu podmienku splnaju riesenia v tvare

$$u(x,y,t) \sim \cosh(ky) e^{i(kx - \omega t)} \tag{9.96}$$

druhe dve podmienky musime linearizovat $h = h_0 + \varepsilon, u = \varepsilon$ co da po eliminovani h

$$u_{tt} + g u_y|_{y=h_0} = 0 \tag{9.97}$$

ked teraz do tejto rovnice dosadime riesenie (9.96), dostaneme disperzny vztah

$$\omega^2 = gk \tanh(kh_0) \tag{9.98}$$

v limite $kh_0 << 1$ (dlhe vlnove dlzky) dostaneme linearnu disperziu $\omega = k\sqrt{gh_0}$

v limite $kh >> 1$ (kratke vlnove dlzky) dostaneme disperziu $\omega = \sqrt{gk}$

- ked napiseme vtahy pre v_x, v_y pre male vzdialenosti od hladiny a tie preintegurujeme pre $x(t), y(t)$ zistime, ze body na hladine sa pohybuju po kruzniciach a teda hladina ma tvar cykloidy!!!

Odporúčaná a doplňujúca literatúra

Ako ku každej téme, literatúry je veľmi veľa. A ak uvážime aj rôzne elektronické materiály prednášajúcich pocelom svete, je jej nekonečne veľa. Tu je niekoľko kníh a internetových zdrojov, ktoré boli priamo alebo nepriamo použité pri tvorbe týchto poznámok.

- V.J. Arsenin, „Matematická fyzika“, Alfa, 1977.
- V.I. Arnold, „Lectures on Partial Differential Equations“, Springer, 2004.
- A.V. Bitsadze, „Equations of Mathematical Physics“, MIR Publishers Moscow.
- I. Stavroulakis, S. Tersian, „Partial Differential Equations - An Introduction with Mathematica and MAPLE', World Scientific.
- E. Miersemann, „Partial Differential Equations“, elektronický materiál Leipzig University.
- D. Trim, „Applied Partial Differential Equations“, elektronický materiál .
- V. Grigorian, „Partial Differential Equations“, elektronický materiál UCSB.
- M. Finan, „A First Course of Partial Differential Equations in Physical Sciences and Engeneering“, elektronický materiál Arkansas Tech University.

K ako zbierky príkladov k cvičeniam a/alebo samostatnej príprave okrem už spomenutých poslúžia

- A.V. Bitsadze, D.F. Kalinichenko, „A collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics“, MIR Publishers Moscow.
- W.H. Steeb, „Problems in Theoretical Physics Volume II: Advanced Problems“, Wissenschaftsverlag.
- N.N. Lebedev, I.P. Skalskaya, Y.S. Uflyand, „Worked Problems in Applied Mathematics“, Dover Publications.
- I. Yanovsky, „Partial Differential Equations: Graduate Level Problems and Solutions“, elektronický materiál.