

FAKULTA MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY
Univerzita Komenského
v Bratislave

Základy fyziky (1)

Juraj Tekel

elektronický učebný materiál
FMFI UK v Bratislave

Katedra teoretickej fyziky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave
Autor: Mgr. Juraj Tekel, PhD.
Názov: Základy fyziky (1)
Text neprešiel jazykovou korektúrou a nebol recenzovaný.

https://davinci.fmph.uniba.sk/~tekel1/teaching_zf.html

© CC BY-NC-SA 2026 Mgr. Juraj Tekel, PhD.

Záver

Toto je postupne upravovaná verzia, ktorá sa čím ďalej tým viac líši od verzie vydanej v roku 2024.

Poznámky Martina Mojžiša z kvantovej teórie poľa sa začínajú záverom. Osobne si myslím, že to je vynikajúci nápad. Úvod do textu nie je to isté ako úvod do problematiky. Kapitola nazvaná "Úvod" by mala vznikať ako posledná, keď už je všetko napísane, je jasné čo text obsahuje a čo nie, kde sa začína, kam sa dostane a kadiaľ pôjde. Keď už je jasné čo je jeho hlavné posolstvo a čo by si z neho čitatelia mali odniesť. Skutočný úvod je vlastne záverom. A tak aj tento text začína slovami, ktorými by kľudne mohol končiť.

Text sú rozšírené skriptá k prvému pokračovaniu predmetu "Základy fyziky", ktorý má aj svoje druhé pokračovanie a je rebrandovanou verziou staršieho predmetu "Fyzika pre matematikov". Ten sa dá učiť dvomi rôznymi spôsobmi a to podľa toho, na ktoré z dvoch podstatných mien v tejto vete človek dáva väčší dôraz. V tomto texte je väčší dôraz dávaný na fyziku a preto verím, že si z neho môžu odniesť čosi aj ľudia, na ktorých sa to druhé až tak veľmi nevzťahuje. To sa ukázalo byť veľmi užitočné, keď sa tento kurz dostal do ponuky študijného programu *Dátová veda*.

Čo a prečo je v tomto texte? Viac menej iba mechanika, na záver je kapitola o špeciálnej relativite, ale to je tiež čosi čo sa dá zabaliť do tejto škatule. Myslím si, že na úvod do fyziky to stačí. Naopak, podľa mňa je lepšie ísť najskôr do hĺbky, veci prejsť poriadne a detailne. Pri tom sa študenti a študentky zoznámia s slovami, nástrojmi, postupmi, ideami a situáciami, ktoré sa objavujú vo fyzike bežne. Napriek tomu sa nám podarí popísať vcelku veľa bežných situácii z bežného života – alebo aspoň z toho, čo teoretický fyzik považuje za bežný život.

Približný plán semestra je: hmotné body, sily, potenciálové sily, sústavy hmotných bodov, previazané oscilátory, tuhé teleso, neinerciálne vzťažné sústavy, trenie a špeciálna relativita. V prvých častiach predpokladáme, že máme dobre definovanú sústavu, v ktorej sa na všetko pozeráme. Až neskôr sa zamyslíme nad tým, ako tá istá situácia vyzerá z rôznych pohľadov. Posledné dve kapitoly sú viac menej bonusové – s trením súvisí veľa každodenných situácií a špeciálna relativita je super zaujímavá. Druhý semester ide potom oveľa viac do šírky. Ale o tom potom. Alebo po tom?

Materiálu sa tu nachádza oveľa viac ako sa reálne dá za jeden semester stihnúť. Dôvodov je niekoľko. Najpriamejší je ten, že tu je viac menej všetko, čo som na predmete aspoň niekedy učil. Druhý je ten, že som si sem poukladal niektoré zaujímavé veci, ktoré sa tu proste hodia. A tie dva najdôležitejšie sú: dáva študentom a študentkám, ktorí o to majú záujem, priestor pri samoštúdiu sa naučiť čosi naviac a mojim kolegom, ktorí možno v budúcnosti budú podľa tohto textu učiť, voľnosť upraviť si materiál podľa svojho gusta bez toho, aby museli hľadať niekde inde.

Okrem tohto všetkého sa napriek nemalej snahe v texte určite nachádza veľa nepresností a chýb. Ak si nejakú všimnete, budem vďačný ak si to nenecháte pre seba a dáte mi vedieť – kontakt na mňa nájdete na stránke predmetu. Tam kdesi sa bude nachádzať aj updatovaná verzia týchto skrípt, kde budem tieto veci postupne odstraňovať.

čo treba vedieť?

Technická poznámka. Biely štvorec označuje koniec zadania príkladu, čierny štvorec koniec riešenia. Za bielym štvorcom zväčša nasleduje riešenie, za čiernym štvorcom nasleduje ďalší text. Príklady v texte, ktoré majú riešenie, sa bežne riešia počas prednášky alebo na cvičení. Ak tento text čítate bez toho, aby ste chodili na hodiny, asi je dobrý nápad vždy pred príkladom, za ktorým nasleduje riešenie nepokračovať hneď ďalej, ale najskôr si aspoň kostru riešenia skúsiť prejsť v hlave samostatne. Príklady v hlavnom texte bez riešenia sú zväčša pre študentov a študentky na rozmyslenie. Príklady v časti za hlavným textom potom boli z časti na domácu úlohu a z časti slúžia ako materiál na samoštúdium.

Poďakovanie. Vďaka patrí všetkým študentom a študentkám, ktorí viac či menej poctivo chodili na prednášky, počítali príklady na domácich úlohách a rôznymi spôsobmi reagovali na to, čo sa na predmete za tých jedenásť rokov postupne udialo. Aj oni značne pomohli dostať tento materiál do tejto podoby. Špeciálne a menovite by som chcel poďakovať Janovi Gašperovi, ktorí svojimi komentármi k finálnejším verziám tohto textu prispel k jeho záverečnej forme a natexoval niektoré z obrázkov. Ďakujem Samovi Kováčikovi, ktorí mal veľa dobrých pripomienok k finálnej verzii tohto textu.

Obsah

1 Úvod **1**
1.1 Čo je to fyzika? . . . 1
1.2 Odhadovačky . . . 3
1.3 Jednotky a rozmery . . . 4
1.3.1 Jednotky . . . 4
1.3.2 Fyzikálne veličiny . . . 6
1.3.3 Rozmerová analýza . . . 7
1.4 Kinematika pohybu hmotného bodu . . . 12

2 Dynamika jedného hmotného bodu **22**
2.1 Úvod – história, postuláty, základy . . . 22
2.2 Hmotný bod v jednom rozmere . . . 24
2.2.1 Konštantná sila . . . 25
2.2.2 Odporové prostredia . . . 26
2.2.3 Potenciálové sily . . . 30
2.2.4 Harmonický oscilátor . . . 37
2.2.5 Zákon zachovania hybnosti a premenná hmotnosť . . . 44
2.3 Hmotný bod vo viacerých rozmeroch . . . 47
2.3.1 Konštantná trojrozmerná sila . . . 48
2.3.2 Odporové sily v troch rozmeroch . . . 48
2.3.3 Potenciály v troch rozmeroch . . . 50
2.3.4 Harmonický oscilátor v troch rozmeroch . . . 54
2.3.5 Centrálne potenciály . . . 55
2.3.6 Keplerov problém . . . 59
2.3.7 Rozptyl a odpudivé sily . . . 70

3 Dynamika sústav hmotných bodov **77**
3.1 Dva hmotné body . . . 77
3.1.1 Pružné zrážky dvoch telies . . . 78
3.1.2 Nepružné zrážky telies . . . 81
3.1.3 Problém dvoch telies . . . 81
3.2 Interakcia N hmotných bodov . . . 90
3.3 Spriahnuté oscilátory . . . 92
3.3.1 Dve telesá na pružinke v jednom rozmere . . . 92
3.3.2 Tri a viac telies na pružinkách . . . 99
3.3.3 Lineárna retiazka z (veľmi) veľa telies na pružinkách . . . 101
3.4 Dynamika tuhého telesa . . . 111
3.4.1 Úvod a špeciálny príklad sily kolmej na os otáčania . . . 111
3.4.2 Kinematika tuhého telesa . . . 115

3.4.3 Dynamika tuhého telesa . . . 116
3.4.4 Niekoľko špeciálnych prípadov pohybu tuhého telesa . . . 118
3.4.5 Niekoľko zložitejších prípadov pohybu tuhého telesa . . . 121

4 (Ne)Inercialne vztažné sustavy 129
4.1 Zmena vzťažnej sústavy a inerciálne vzťažné sústavy . . . 129
4.1.1 Súradnicové systémy . . . 129
4.1.2 Inercialne vztazne sustavy . . . 130
4.2 Neinerciálne vzťažné sústavy . . . 131
4.2.1 Jednoduchý popis zotrvačných sil . . . 131
4.2.2 Poriadnejší popis zotrvačných síl . . . 133
4.2.3 Poriadny popis zotrvačných síl . . . 136
4.3 Dôsledky zotrvačných sil . . . 138
4.3.1 Lineárne zrýchľujúce sústavy . . . 138
4.3.2 Menej komplikované rotujúce sústavy . . . 139
4.3.3 Zem ako neinerciálna vzťažná sústava . . . 141
4.4 Ponaučenie . . . 144

5 Trecia sila 146
5.1 Mechanizmus suchého trenia . . . 146
5.2 Niekoľko jednoduchých úloh . . . 147
5.3 (O čosi) zložitejšie úlohy . . . 150

6 Špeciálna teória relativity 156
6.1 Úvod - história a základy . . . 156
6.1.1 Stručná história (rýchlosti) svetla . . . 156
6.1.2 Základné postuláty špeciálnej teórie relativity . . . 158
6.2 Obrázková špeciálna relativita . . . 159
6.2.1 Časopriestorové diagramy . . . 159
6.2.2 Meranie vzdialenosti a rýchlosti, zmena vzťažnej sústavy a konštantnosť c . . . 160
6.2.3 Relatívnosť súčasnosti a kauzalita . . . 163
6.2.4 Kontrakcia dĺžky a dilatácia času . . . 166
6.2.5 Dva paradoxy - dvojičky a rebríky v stodole . . . 168
6.3 Relativistická kinematika . . . 169
6.3.1 Lorentzove transformácie . . . 169
6.3.2 Invariantný interval a vlastný čas . . . 172
6.3.3 4-poloha, 4-rýchlosť, 4-hybnosť a 4-vektory . . . 174
6.3.4 Relativistické zrážky . . . 176
6.4 Relativistická dynamika . . . 178
6.4.1 4-sila . . . 178
6.4.2 Pohyb pod pôsobením konštantnej sily . . . 179

1 Úvod

1.1 Čo je to fyzika?

V prírode majú veci svoj poriadok. Deje nie sú náhodné a majú svoje pravidlá. Toto samo o sebe je vcelku fascinujúce, keďže to tak vôbec nemuselo byť. Pre existenciu života ako takého je to úplne kľúčové a všetko živé sa tomuto poriadku prispôsobilo. Dokonca je možné, že si ho do istej miery aj uvedomuje. Toto všetko má dôsledky presahujúce prírodné vedy, avšak my zostaneme pri tom, že človek sa rozhodol pravidlá, podľa ktorých príroda funguje, skúmať a pochopiť. Čo nám potom dáva nástroj na ich využívanie, od varenia piva po lety do vesmíru.

Základná idea fyziky je v predpovedaní budúcnosti. Zaujíma nás, čo sa bude diať so systémom, ktorý popisujeme. Môže to byť zväzok kľúčov padajúci na zem, vzduch obtekajúci auto na diaľnici, Zem na obežnej dráhe okolo Slnka, dva protóny, ktoré letia oproti sebe pod zemou vo Francúzsku, alebo čokoľvek iné.

Najdôležitejším jazykom na popis fyzikálnych systémov sa ukázala byť matematika. Vo všeobecnosti sa to deje asi takto. Máme systém a množinu M všetkých stavov, v ktorých sa tento systém môže nachádzať. Systém sa nachádza v jednom konkrétnom z týchto stavov, $X_0 \in M$. Pravidlá v prírode potom povedia, v ktorom z možných stavov sa systém nachádza po nejakom čase t. Toto je dané zobrazením, ktorému hovoríme *pohybové rovnice* (po anglicky *equations of motion*, odtiaľ skratka EOM)[1]

$$EOM \,:\, M \to M \;,\; X_0 \mapsto X(t) \;. \tag{1.1}$$

Keďže čas plynie spojito, pohybové rovnice na množine M kreslia čiary dané časovým vývojom. To, že v prírode existujú pravidlá a časový vývoj je jednoznačný, znamená, že tieto čiary sa nikde nepretínajú. Že stav v danom čase jednoznačne určuje, ako budú stavy systému vyzerať neskôr. Ak sa nám čiary pretínajú, znamená to, že sme množinu M alebo pohybové rovnice identifikovali nesprávne.

Je na mieste otázka, či parameter, ktorý určuje zmenu stavu, musí byť práve čas t. Vrátime sa k nej v kapitole 6 o špeciálnej relativite.

Systém charakterizujú *fyzikálne veličiny*, ktoré sú funkciami stavu, v ktorom sa systém nachádza. Veličina je potom po matematickej stránke

$$A \,:\, M \to \mathbb{R} \;. \tag{1.2}$$

Časový vývoj veličiny je daný časovým vývojom stavu $A(t) = A[X(t)]$. Stretneme sa s veličinami ako poloha, rýchlosť, energia, hybnosť a podobne.

Špecifikácia konkrétneho elementu z M sa deje vymenovaním hodnôt niektorých špeciálnych veličín a_i, ktoré stav úplne charakterizujú. Počtu týchto veličín sa hovorí počet *stupňov voľnosti* systému. Pohybové rovnice sú potom po technickej stránke pravidlá pre časový vývoj týchto veličín

$$EOM \,:\, M \to M \;,\; a_{i,0} \mapsto a_i(t) \;\forall i \;. \tag{1.3}$$

[1] Toto treba čítať nasledovne: Pohybové rovnice sú zobrazením z množiny M do množiny M, takým, že stav X_0 sa zobrazí do stavu, ktorý bude mať systém v čase t.

To znamená, že počiatočná hodnota i-tej veličiny $a_{i,0}$ sa po čase t zmení na hodnotu $a_i(t)$. Tieto rovnice sú zväčša diferenciálne, hovoria, ako sa stav systému zmení za veľmi krátky čas a zmena za dlhý čas je potom iterovanie tejto krátkodobej zmeny.

Ako príklad uveďme jeden hmotný bod v jednom rozmere. Neskôr uvidíme, že to, čo nasleduje, je vlastne definícia hmotného bodu. Stav hmotného bodu s danou hmotnosťou je charakterizovaný jedným reálnym číslom, ktoré určuje jeho polohu $a_1 = x$, a jedným reálnym číslom $a_2 = p$, ktoré určuje jeho rýchlosť, resp. hybnosť. Všetky ostatné fyzikálne veličiny sú potom funkciami týchto dvoch parametrov $A[X] = A(x, p)$. Že stačia tieto a práve tieto dva parametre, je dôsledkom pravidiel, podľa ktorých funguje svet. Množina M je teda rovina $\mathbb{R}^2$ a časový vývoj vyzerá ako čiary v tejto rovine.

Fyzika je teda chodenie po svete a hľadanie množiny stavov M, danej množinou fyzikálnych veličín a_i, ktorá zodpovedá systému, ktorý chcem popisovať.

Je dôležité si uvedomiť, že pre daný systém množina M vyzerá vždy rovnako. Pohybové rovnice, ktoré popisujú zmenu stavov, už univerzálne nie sú a v rôznych podmienkach sú rôzne. Napríklad hmotný bod môže byť voľný, môže sa nachádzať v gravitačnom poli, na pružine atď.

Fyzika je teda predpovedanie budúcnosti. Zisťuje, ako bude systém vyzerať v budúcom čase z informácie, ako vyzerá teraz. Tieto dve vety sú super dôležité a odporúčam ich prečítať ešte raz.

Na záver úvodu jedna trochu filozofická úvaha. O fyzike píšeme ako o objavovaní prírodných zákonov. Čo to ale sú prírodné zákony? Na podobné otázky odpovedá *filozofia vedy* a dobre si rozmyslieť tieto odpovede je veľmi dôležité. A sú ľudia, ktorých to veľmi baví. Ja ako autor tohto textu medzi nich veľmi nepatrím a viac ma baví pozerať sa na dôsledky prírodných zákonov, keď to už ale berieme poriadne od podlahy, oplatí sa tomu aspoň pár slov venovať.

Vo svete sú veci a s nimi sa dejú veci. Filozofia at its best! Prírodné zákony sú potom najlepší možný spôsob, ako tieto veci a tieto deje popísať čo najmenším počtom slov. Ak vás to zaujíma, určite sa rýchlo dogooglite k čomusi hlbšiemu. Tu si ukážme len jeden príklad: Voľný pád, o ktorom budeme ešte viackrát rozprávať. Situácia je takáto: máme teleso na Mesiaci a pýtame sa, za aký čas dopadne na zem, keď ho pustíme z nejakej danej výšky. V princípe by sme mohli mať veľkú trojrozmernú tabuľku, kde by boli pre všetky možné telesá – pierko, žlté kladivo, modré kladivo, ... – a pre všetky možné výšky vypísané časy, za ktoré sa to stane. Aj to by bol popis tohto deja. Ukazuje sa, že sa to ale dá spraviť lepšie. Napríklad tabuľka vôbec nemusí byť taká veľká, lebo žlté a modré kladivo padnú za rovnaký čas. Tabuľka dokonca vôbec nemusí byť trojrozmerná, lebo za rovnaký čas padnú všetky telesá. A keď sa na tabuľku pozrieme ešte lepšie, všimneme si, že nám stačí jediný vzorec, z ktorého rovnako pre ľubovoľnú výšku čas dopočítame. Obrovskú tabuľku sme teda stlačili do jedného vzorca. A ukáže sa, že veľa podobných vzorcov – nielen pre padanie vecí na rôznych planétach a v rôznych prostrediach, ale aj pre iné deje – sa dá zabaliť do jednej rovnice.

Ale o tom neskôr. Stačilo filozofovania, poďme na fyziku.

Príklad 1.1. Aké problémy by vznikali, keby sme jedno teleso v jednom rozmere nesprávne identifikovali množinu stavov ako danú iba polohou x? □

Príklad 1.2. Ako vyzerá množina možných stavov pre hmotný bod fixovaný na kružnicu? Ako to vyzerá pre hmotný bod vo dvoch rozmeroch? Pre dva hmotné body v troch rozmeroch? □

1.2 Odhadovačky

Skôr, ako sa pustíme do "ozajstnej" fyziky, pozrime sa na jeden veľmi štandardný druh úloh. Niekedy sa im hovorí Fermiho úlohy alebo jednoducho úlohy na odhadovanie.

Príklad 1.3. Koľko je v Bratislave kaderníčok a kaderníkov? □

Riešenie. Presnú odpoveď netušíme, možno ju vedia na daňovom úrade, ale aj o tom mám svoje pochybnosti. Poďme ale čosi skúsiť vymyslieť.

Prvý spôsob, ako to odhadnúť, môže byť napríklad skrz množstvo práce, ktorá sa dá z ľudí v Bratislave vyťažiť. V Bratislave žije cca 600-tisíc ľudí, polovica sú ženy, každá v priemere trikrát za rok zájde ku kaderníčke, kaderníčka pracuje 250 dní v roku a za deň by mala ostrihať cca 8 ľudí

$$(600\ 000/2)\ \times\ (3\ /\ 250\ /\ 8)\ =\ 450 \tag{1.4}$$

Možno sme trochu podcenili počet návštev, ale zas vôbec sme nerátali mužov. Ak by sme povedali, že priemerný človek ide do kaderníctva jedenapolkrát za rok, asi nie sme ďaleko od pravdy.

V Bratislave by malo byť niekoľko stoviek kaderníčok a kaderníkov. Presnejšie číslo povedať nevieme, ale môžeme si byť celkom istí, že ich nie je 50 a určite tiež nie 5000. Dá sa tento odhad nejako overiť?

Skúsime odhadnúť nejako inak. Napríklad cez finančné toky. Procedúra u kaderníčky stojí v priemere 30 EUR, tri štvrtiny zoberú prevádzkové náklady, dane a podobne a kaderníčka by mala zarobiť okolo 12 000 EUR ročne

$$(600\ 000\ /\ 2)\ \times\ 3\ \times\ 30\ \times\ \left(\frac{1}{4}\ /\ 12\ 000\right)\ =\ 562.5 \tag{1.5}$$

Zdá sa, že to celkom sedí. Tiež sa zdá, že kaderníčka za rok obslúži o čosi menej ľudí, ako sme odhadli v prvom výpočte, prípadne sme čosi zle odhadli teraz. Dostávame sa teda k číslu približne 500.

Vieme to vymyslieť ešte nejako? Títo ľudia musia niekde študovať, koľko je na Slovensku učilíšť s takýmto zameraním? A podobne. Je s čím tento výsledok porovnať? Jeden katalóg na internete obsahoval kedysi pre Bratislavu 83 kaderníctiev. To znamená, že tieto čísla znejú uveriteľne. A ozaj by sme v Bratislave očakávali niekoľko stoviek takýchto ľudí. ■

Prečo sa kurz o fyzike začína takouto otázkou? Fyzika popisuje svet okolo nás. A teda čosi, s čím máme akú-takú skúsenosť. Výsledky fyzikálnych úvah, či sú to zelené rámiky na tabuli, výsledky domácich úloh alebo odpovede na skutočné výskumné otázky, sa vždy dajú zasadiť do sveta okolo nás. A je fajn mať cit pre to, či toto zasadenie dáva aspoň trochu zmysel. V prípade domácich úloh nám to môže ušetriť body, v prípade skutočných research problémov nám na rozmyslenie si, či sme niekde nespravili chybu, často nič iné neostáva.

V angličtine sa čomusi podobnému hovorí "numeracy", neviem o tom, že by po slovensky existoval podobný výraz. Asi najlepšie číselná gramotnosť. Ak máte ambíciu fyzike ozaj rozumieť, mali by ste takúto schopnosť mať, alebo aspoň na nej pracovať. Zopár príkladov na precvičenie nasleduje, ale stačí mať oči otvorené a isto ich nájdete oveľa, oveľa viac.

Ďalšie úlohy

Príklad 1.4. Koľko loptičiek sa vmestí do squashového kurtu? □

Návod. Neviete, aký veľký je kurt alebo aká veľká je loptička? Nevadí, skúste odhadnúť. Rozmýšľajte pri tom, akú asi chybu robíte a aký presný je tým pádom váš výsledok. ■

Príklad 1.5. Aká dlhá čiara sa dá nakresliť s jednou obyčajnou ceruzkou? □

Príklad 1.6. Keby sa všetci ľudia postavili vedľa seba, akú veľkú plochu by zaberali? □

Príklad 1.7. Akú veľkú sumu si musia organizátori vypýtať od každého z účastníkov vianočného posedenia Katedry teoretickej fyziky? □

Príklad 1.8. Koľko peňazí sa vmestí do jedného obrneného auta? □

Príklad 1.9. Koľko vodičov a vodičiek zamestnáva Košická MHD? Koľko stojí osvetlenie v Banskej Bystrici? Akú časť rozpočtu mesta to tvorí? □

Príklad 1.10. Koľko vlasov narastie človeku za jeden deň? Za celý život? □

Príklad 1.11. Koľkokrát je gravitácia na Mesiaci slabšia ako gravitácia na povrchu Zeme? □

Príklad 1.12. Aká veľká je hustota vzduchu? □

Príklad 1.13. Zoberieme si dva pollitrové poháre kofoly, rožok a tresku a vydáme sa na túru. Zastavíme sa pri horskej bystrinke a jeden z pohárov kofoly do nej vlejeme. Počkáme dostatočne dlho, aby sa všetka voda na planéte dostatočne premiešala a toto čakanie si skrátime výdatným obedom z rožka, tresky a druhého pohára kofoly. Keď teraz naberieme vodu z potoka do pohára, koľko atómov z pôvodnej kofoly sa v ňom bude nachádzať? □

Návod. Jeden mol látky je definovaný ako zoskupenie, ktoré obsahuje počet častíc rovný číselnej hodnote Avogadrovej konštanty N_A. Jej hodnota, rovnako ako aj molové hmotnosti prvkov periodickej tabuľky, sa dá ľahko nájsť v literatúre. Potom už len stačí vedieť, že voda = dvakrát vodík + jedenkrát kyslík. ■

1.3 Jednotky a rozmery

Fyzikálne veličiny majú rozmery! V tejto zdanlivo nevinnej vete sa ukrýva veľmi veľa informácie. Prekvapujúco veľa a bola by škoda nezamyslieť sa nad tým skôr, ako sa pustíme do „naozajstnej“ fyziky.

1.3.1 Jednotky

V prvom rade táto veta hovorí, že musí existovať niečo, čo tento rozmer charakterizuje. Hovoríme tomu jednotky a hovoríme, že fyzikálne veličiny v jednotkách meriame. Isto si pamätáte, že jednotiek je veľa a názov väčšiny z nich bol napísaný pod obrázkom bradatého uja pri fyzikálnom kabinete. Zaujímavé je, že jednotiek vôbec nepotrebujeme tak veľa a pre veľkú väčšinu nášho kurzu nám budú stačiť tri:

- jednotka času,
- jednotka dĺžky,
- jednotka hmotnosti.

Prečo práve tieto tri? Tieto tri veličiny sú „najprirodzenejšie“, najjednoduchšie vnímateľné človekom. No a ukazuje sa, že pri výbere takejto trojice sú veci najjednoduchšie. Mohli sme vybrať napríklad energiu, silu a výkon ako tri nezávislé veličiny, to by ale vzhľadom na ich neintuitívnosť nedávalo veľký zmysel.

Obrátením predchádzajúcej logiky sa dá povedať, že mechanika ako časť fyziky je vlastne obsiahnutá v týchto jednotkách. To, na čo stačia jednotky času, dĺžky a hmotnosti, sú mechanické problémy.

Úmyselne sme zatiaľ žiadne konkrétne jednotky nepísali. Ako isto viete, sústav jednotiek je veľa a okrem našej štandardnej – SI – sa v niektorých menej rozvinutých krajinách používajú aj iné. To, že jednotky môžeme zvoliť prakticky ľubovoľne, bude mať ešte ďalekosiahle dôsledky. Poďme sa ale predtým pozrieť na tie naše jednotky, ktoré nám tiež dokážu čo-to prezradiť.

- Jednotkou **času** je **sekunda**. Ako každá jednotka, aj sekunda má svoju veľmi presnú, veľmi technickú a veľmi nezrozumiteľnú definíciu, ktorú nás na strednej škole skúšali. V nej sa však podstata toho všetkého veľmi stráca, a preto sa na sekundu pozrime z trochu iného uhla.[2] Svet okolo nás sa periodicky mení a časová os je veľmi prirodzene rozdelená na opakujúce sa úseky. Pravidelne sa strieda svetlo a tma, pravidelne sa mení a opakuje charakter počasia. Tieto procesy sú úzko spojené s pohybom Zeme okolo svojej osi a jej pohybom okolo Slnka a všetko živé na tejto planéte sa týmto zmenám chtiac-nechtiac muselo prispôsobiť. Ľudia takto dostali do vienka veľmi prirodzené časové jednotky rok, mesiac a deň. Deň je trochu pridlhý na každodenné použitie, a tak sme deň rozdelili na hodiny, minúty, sekundy... a tu sme zastali. Deň sme drobili trochu obskúrnym spôsobom, tak, že sme skončili pri intervale, ktorý je takmer zhodný s časom jedného úderu srdca zdravého človeka. A aj naše ostatné fyziologické procesy a najbežnejšie a najjednoduchšie činnosti trvajú len niekoľko málo násobkov tohto časového úseku. Sekunda v sebe fascinujúcim spôsobom spája astronómiu a pohyb Zeme okolo Slnka s biológiou (nielen) človeka.

- Jednotkou **vzdialenosti** je **meter**. Aj ten je nejako definovaný a aj táto definícia toho veľa neobjasní. Na rozdiel od času však priestor okolo nás nie je nijak prirodzene pravidelne rozdelený. Okolo Zeme sa síce dá obísť dookola, ale táto perióda je priveľká na akékoľvek praktické použitie.[3] A tak sme odkázaní na akési menej prirodzené definovanie jednotky vzdialenosti. To je aj dôvod, prečo je táto jednotka definovaná v rôznych sústavách rôzne, na rozdiel od sekundy. Všetky definície majú však čosi spoločné. Ľudské rozmery sú v nich malé čísla. Niektoré sú dokonca definované ako dĺžky častí tela. Je zaujímavé, že väčšina zvierat je schopná pohybovať sa rýchlosťou, ktorá je niekoľko týchto jednotiek za sekundu.

[2] V duchu knižky Jeden výdych koňa od Martina Mojžiša.

[3] Napriek tomu bol meter prvýkrát definovaný práve ako $1/10\,000\,000$ vzdialenosti od severného pólu k rovníku, meranej pozdĺž parížskeho poludníka. Ale to bolo dávno a dnes je meter definovaný inak.

- Jednotkou **hmotnosti** je **kilogram**. Veci v prírode sa menia a definovať jednotku hmotnosti tak, aby bola všade rovnaká, sa prakticky nedá. Vyriešilo sa to tak, že keď už máme zadefinovanú vzdialenosť, môžeme zadefinovať jednotku hmotnosti ako hmotnosť daného objemu niečoho, čo sa vyskytuje celkom hojne. To, že hustota vody je okrúhle číslo, teda nie je náhodou. Podobne ako pre vzdialenosti a na rozdiel od času, bez prirodzenosti vzniklo niekoľko rôznych definícií jednotky hmotnosti. Všetky majú spoločné to, že predmety, s ktorými sa bežne stretávame, majú hmotnosti niekoľko málo jednotiek. Všimnite si, že ľudia sú zväčša o dosť ťažší.

Na takejto voľbe jednotiek je zaujímavá ešte jedna vec, ktorá v sebe odhaľuje trochu psychológie a vnímania sveta. Človek vie svojimi zmyslami a schopnosťami vnímať časy, ktoré sú v sekundách od asi $10^{-2}\,s$ po $10^{7}\,s$,[4] vzdialenosti medzi $10^{-4}\,m$ a $10^{4}\,m$ a hmotnosti medzi $10^{-3}\,kg$ a $10^{3}\,kg$. Všimnite si, že jednotky vzdialenosti a hmotnosti sú vybraté v (logaritmickom) strede tohto intervalu, ale jednotka času je veľmi nesymetricky v jeho začiatku. A toto platí bez ohľadu na to, o akom systéme sa rozprávame.

Jednotky, ktoré používame, sú teda šité na mieru každodenným situáciám, s ktorými sa stretávame. To, ako sme vybrali jednotky, hovorí veľa o nás a o našom svete.

Každá fyzikálna situácia má svoje „prirodzené“ jednotky. Sekunda, meter a kilogram sú prirodzené jednotky pre ľudí. Stromy by pravdepodobne zvolili iné jednotky, pretože fungujú na iných časových a priestorových škálach[5]. Podobne častice, ktoré lietajú vysokou rýchlosťou, zažívajú úplne iné veci na úplne iných škálach a jednotky pre popis ich sveta sú opäť iné. Ukazuje sa, že náš svet ako taký má tiež svoje prirodzené jednotky. Popisujú ho tri fundamentálne teórie: špeciálna relativita, kvantová mechanika a teória gravitácie. Dá sa nahliadnuť, na akých škálach sú všetky tieto tri teórie relevantné súčasne. Tieto škály sú potom prirodzenými jednotkami nášho sveta, lebo v nich sa prejavuje vo svojej plnej kráse. Pozri príklad 1.26. A asi neprekvapuje, že v týchto jednotkách sú hodnoty našich každodenných veličín neskutočne veľké alebo neskutočne malé.

Dve krátke poznámky na záver tejto časti. Základných jednotiek je spolu sedem a tie ďalšie sú dôležité v situáciách, ktoré na svoj opis nevystačia s mechanikou. Hodnoty všetkých jednotiek sú dnes už definované tak, že sa ustanoví konkrétna hodnota niektorej zo základných fyzikálnych konštánt.

1.3.2 Fyzikálne veličiny

To, že jednotky môžeme vybrať prakticky ľubovoľne, zas hovorí veľa o samotnej fyzike. Skutočné, fyzikálne objektívne tvrdenia nemôžu od výberu týchto jednotiek závisieť. To, že je jeden objekt ťažší ako druhý, nezáleží od toho, či jeho hmotnosť meriame v kilogramoch alebo librách. Od niečoho, čo má ambíciu byť fyzikálnou veličinou, požadujeme, aby toto tvrdenie platilo ešte prísnejšie – aby pomer hodnôt nezávisel od voľby jednotiek.

Voľba jednotiek mení numerickú hodnotu veličín, napríklad rýchlosti svetla. V našich každodenných jednotkách je jej veľkosť 299 792 458 m/s. Toto číslo vyzerá ozrutne. Avšak keď ju vyjadríme v megaparsekoch za nanosekundu, už bude o čosi skromnejšie. To znamená, že hovoriť o tom, či je

[4] Je zaujímavé, že ušami dokážeme rozlišovať časy rádovo menšie ako očami. Aj za tým je samozrejme nejaká fyzika.

[5] Všimnite si, že pri cestovaní v horizontálnom smere rozprávame zväčša v kilometroch, ale vo vertikálnom smere zväčša iba v metroch. Aj za tým je samozrejme nejaká fyzika.

rýchlosť svetla veľká alebo malá, nemá skutočný význam a môžeme hovoriť iba o tom, či je veľká alebo malá v porovnaní s niečím. Ak veličina rozmer má, musíme ju s niečím, čo má rovnaký rozmer, porovnať a až potom môžeme hovoriť o veľkosti/malosti. Veľké alebo malé môžu byť iba hodnoty, ktoré nemajú rozmer. Na to si treba dávať pozor vždy, keď budeme robiť nejaké aproximácie.

1.3.3 Rozmerová analýza

Rozmerová analýza je metóda na riešenie problémov založená na fakte, že veličiny majú rozmery. V prvom rade sa pozeráme na parametre, ktoré do problému môžu vstupovať. Prirodzene predpokladáme, že odpovede nemôžu závisieť od irelevantných parametrov. A rovnako prirodzene očakávame, že odpovede majú správny rozmer. Odpoveď na otázku, koľko vážim, nemôže byť pol druhej a nemôže mať na to vplyv hrubý domáci produkt Číny.

Majme problém, ktorý je charakterizovaný nejakou sadou rozmerných parametrov x_i. Nech už je riešením problému čokoľvek, odpoveď musí byť v tvare

$$Cx_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots, \tag{1.6}$$

kde C je nejaké bezrozmerné číslo a kde mocniny p_i sú zvolené tak, aby mal výsledok správny rozmer. Takýto jednoduchý tvar vyžadujeme preto, že zložitejšia funkcia parametrov má v Taylorovom rozvoji rôzne mocniny $f(y) = \sum a_n y^n$ a ako si pamätáme z materskej škôlky, jabĺčka s hruštičkami a metre štvorcové s metrami kubickými miešať neradno.[6] Toto pravidlo však prestáva platiť v prípade, keď sa z parametrov x_i dá zložiť kombinácia ξ, ktorá nemá rozmer. Vtedy môže mať výsledok tvar

$$C\xi^p x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots, \tag{1.7}$$

a to pre ľubovoľné p. A teda, opäť na základe Taylorovho rozvoja, konštanta pred kombináciou x_i správneho rozmeru môže byť prenásobená ľubovoľnou funkciou bezrozmerného parametra, a ak ich je viac, bezrozmerných parametrov[7].

Tu je aj veľmi dobre vidieť sily a slabiny rozmerovej analýzy. Ak nie je parametrov x_i veľa a nedá sa z nich vyrobiť veľa bezrozmerných kombinácií, rozmerová analýza nám bude vedieť čosi povedať. Sila je evidentná. Ak som schopný identifikovať relevantné parametre a ich rozmery, bez akejkoľvek znalosti fyziky, ktorá problém riadi, viem čosi o správaní sa systému a výsledkoch povedať. A ukazuje sa, že svet je pekný a bezrozmerné konštanty sú zväčša rádovo 1.

Príklad 1.14. Aký je objem gule s polomerom R? □

[6] Prirodzená otázka je, prečo by sme nemohli mať čosi rozmeru e^m a podobne. V takom prípade by boli koeficienty a_n rozmerné čísla tak, aby celok mal rozumný rozmer $f(m)$. Jednotka e^m by ale znamenala jednotku $1 + m + m^2/2\ldots$, kde už čísla sú bezrozmerné a tu ozaj miešame hruštičky s jabĺčkami. V princípe by sme sa mohli pokúsiť zadefinovať sčítanie vzdialeností a objemu, ale tu by sme narazili na spomínaný problém nezávislosti fyzikálnych tvrdení od výberu jednotiek. Ako by ste porovnávali hodnoty týchto veličín? Čo by sa s tým porovnaním stalo, keby ste vzdialenosti vyjadrovali namiesto metrov v kilometroch?

[7] Toto formalizuje čosi, čomu sa hovorí Buckingham π-theorem.

Riešenie. Tento príklad je trochu triviálny, ale oplatí sa nad ním zamyslieť. Relevantný parameter je len jeden, a to R. Hľadáme objem, veličinu rozmeru m^3, a to znamená, že výsledok musí byť v tvare

$$V = CR^3 \tag{1.8}$$

pre nejaké neznáme C. ■

Zdá sa, že sme si veľmi nepomohli, ale to nie je pravda. V prvom rade sme našu nevedomosť vtesnali do jediného čísla, ktoré si pre jednu konkrétnu guľu môžeme namerať a potom už budeme vedieť objem ktorejkoľvek gule.[8] A sú situácie, keď nepotrebujeme vedieť ani to.

Príklad 1.15. Aký je pomer objemov gulí s polomerom R_1 a R_2? □

Riešenie. Už vieme, že objem gule má tvar $V = CR^3$, a preto je tento pomer $(R_1/R_2)^3$. ■

Predtým, ako sa pustíme do ďalšieho príkladu, si zaveďme trochu štandardného označenia. Rozmer veličiny budeme označovať hranatými zátvorkami a jednotky času, vzdialenosti a hmotnosti budeme označovať T, L, M, t. j. $[t] = T, [v] = LT^{-1}$. Toto označenie môže byť trochu mätúce... život je krutý. Podľa tohto označenia majú bezrozmerné veličiny, ako napríklad podiely dvoch veličín s rovnakým rozmerom alebo veci ako uhly, rozmer 1.

Poznámka o rozmeroch rôznych veličín a konštánt. V nasledujúcej úlohe celkom bez rozmýšľania napíšeme $[g] = LT^{-2}$. Tento kurz je ale určený ľuďom z nefyzikálnych odborov a táto vedomosť nemusí byť až taká triviálna. Pridávame teda niekoľko riadkov o rozmeroch základných fyzikálnych veličín a ako sa v nich trochu vyznať.

Jednotky základných veličín máme priamo. Na ostatné už čosi potrebujeme. Tu je dobré pamätať si nejaké vzťahy. Napríklad že rýchlosť je vzdialenosť delená časom a teda $[v] = LT^{-1}$. Zrýchlenie je rýchlosť delená časom, a teda $[a] = LT^{-1}T^{-1} = LT^{-2}$. Podobne sa dá spomenúť výraz pre silu $F = ma$, niektorý z množstva výrazov pre energiu $mv^2/2, mgh, Fs$ a podobne.

Môžeme sa na to ale pozrieť aj opačne. V rozmere jednotky je o nej ukrytá (takmer) všetka informácia a je ním vlastne definovaná.

Príklad 1.16. Za aký čas spadne teleso hmotnosti m z výšky H v homogénnom gravitačnom poli charakterizovanom gravitačným zrýchlením g? Akou rýchlosťou dopadne? □

Riešenie. Rozmery veličín sú $[H] = L, [g] = LT^{-2}, [m] = M$, pýtame sa na čas $[T] = T$ a rýchlosť $[v] = LT^{-1}$. Hmotnosť teda vo výsledkoch vystupovať nebude. Súčin $H^\alpha g^\beta$ má rozmer

$$[H^\alpha g^\beta] = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta} \ . \tag{1.9}$$

Bezrozmerná veličina teda neexistuje, pre veličinu rozmeru čas dostávame $\alpha_T = 1/2, \beta_T = -1/2$ a pre veličinu rozmeru rýchlosť $\alpha_V = \beta_V = 1/2$ a teda

$$T = C\sqrt{\frac{H}{g}} \ , \ V = K\sqrt{Hg} \ , \tag{1.10}$$

[8] Prvé ozaj skutočné stretnutie s fyzikou.

kde C a K sú nejaké konštanty, ktoré nezávisia od výberu jednotiek. Ak by sme ich ozaj chceli vedieť, môžeme napríklad zobrať jedno konkrétne teleso a odmerať pre dané H a g čas a rýchlosť dopadu. ■

Príklad 1.17. Teleso koná rovnomerný pohyb po kružnici. Aké sú relevantné parametre tohto pohybu? Aká veľká sila na teleso pôsobí? □

Výsledok. Pre hmotnosť telesa m, polomer kružnice R a rýchlosť obiehania v dostávame silu

$$F = C\frac{mv^2}{R} \ . \tag{1.11}$$

■

Príklad 1.18. Matematické kyvadlo je gulička hmotnosti m zavesená v tiažovom poli g na špagáte dĺžky l. Keď ho vychýlime o uhol θ_0, bude kmitať s periódou T. V akom pomere sú periódy toho istého závažia, vychýleného o ten istý uhol na špagátoch rôznej dĺžky? □

Riešenie. Parametre nášho problému sú m, g, l, θ_0 a

$$[m] = M, \quad [l] = L, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [\theta_0] = 1. \tag{1.12}$$

Pre ich všeobecnú kombináciu $m^\alpha l^\beta g^\gamma$ platí

$$[m^\alpha l^\beta g^\gamma] = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma} \ . \tag{1.13}$$

V prvom rade vidíme, že požiadavka bezrozmernosti $[m^\alpha l^\beta g^\gamma] = 1$ má iba triviálne riešenie a jediným bezrozmerným parametrom je počiatočná výchylka. V druhom rade, ak chceme dostať veličinu rozmeru času, požadujeme $[m^\alpha l^\beta g^\gamma] = T$ a dostávame

$$\gamma = -\frac{1}{2} \quad , \quad \beta = -\gamma = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha = 0 \ . \tag{1.14}$$

A teda vzťah pre periódu musí mať tvar

$$T = f(\theta_0)\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{1.15}$$

Neznámu číselnú konštantu sme zabalili do neznámej funkcie $f(\theta_0)$. Pre odpoveď na otázku zo zadania nie je nič ľahšie ako spraviť pomer $T(l_1)/T(l_2)$, ktorý je už plne daný parametrami a nie je v ňom nič neznáme. ■

Skúste zobrať dve rovnaké loptičky alebo čosi iné guľaté a zaviažte ich na dva špagáty, ktoré majú dĺžky v pomere $1 : 4$. Zaveste ich tak, aby sa vám na ne dobre pozeralo a vychýľte ich o rovnaký uhol. Keď ich pustíte, mali by ste celkom jasne vidieť, že kým loptička na dlhom závese spraví jeden kmit, tá druhá spraví dva.

Ďalšie úlohy

Príklad 1.19. Vo fyzike sa často stretávame s veľmi veľkými alebo veľmi malými hodnotami. Napríklad najväčší výbuch, aký kedy ľudstvo vytvorilo (vodíková Car bomba s energiou 50 megaton TNT, t. j. $2 \cdot 10^{17}\,J$) je voči supernove typu II (asi $10^{46}\,J$) úplne zanedbateľný: je to rovnaký pomer energií, ako dopad zrnka soli z výšky niekoľkých mikrometrov oproti výbuchu Car bomby.

Skúste nájsť alebo vymyslieť nejaký reálny objekt alebo jav tak, aby pre relevantnú veličinu aspoň približne platilo, že pomer A:B je ako B:C. Hodnoty pre zadané objekty, respektíve javy, pohľadajte samostatne.[9]

- Hmotnosť mravca : hmotnosť lietadlovej lode : ???.
- Zrnko ryže : vzdialenosť k Mesiacu : ???.
- Rýchlosť svetla : rýchlosť auta na diaľnici : ???.
- Povrch zemskej súše : povrch futbalového ihriska : ???.
- Trvanie ultrakrátkeho laserového záblesku : jeden výdych koňa : ???.
- Hmotnosť zrnka piesku : hmotnosť Zeme : ???.
- Jasnosť Slnka : jasnosť Mesiaca v splne : ???.

□

Príklad 1.20. Poznáme hustotu vody $\rho = 1000\,kg/m^3$, povrchové napätie vody $\sigma = 0.072\,J/m^2$ a jej merné skupenské teplo vyparovania $l = 2.5 \times 10^6\,J/kg$. Aká je približne veľkosť jednej molekuly? □

Príklad 1.21. Guľa polomeru R sa hýbe rýchlosťou v v médiu hustoty ρ. Aká bude odporová sila, ktorá na ňu pôsobí v prípade, že viskozita nie je dôležitá a toto sú všetky rozmerné parametre? □

Príklad 1.22. Aká je frekvencia základného tónu gitarovej struny? □

Príklad 1.23. Pri overovaní výsledku úlohy 1.18 sme sa stretli s naším prvým skutočne fyzikálnym systémom. Loptička uviazaná na šnúrke. Pre potreby predchádzajúceho experimentu sme ju modelovali matematickým kyvadlom. Aké priblíženia sme pri tomto popise robili? Aké veľké sú dôsledky týchto priblížení na presnosť nášho popisu? Relatívne medzi sebou aj absolútne. A akou asi presnosťou by sme museli merať periódu, resp. ako dlho by sme museli nechať kmitať naše dve loptičky, aby sme si tento rozdiel všimli? □

Príklad 1.24. Za aký čas dopadne na zem teleso, ktoré z výšky H vrhneme nadol rýchlosťou v? □

Návod. Nie je ťažké identifikovať veličinu rozmeru času a bezrozmernú veličinu. Zdá sa, že sa ďalej nepohneme. Avšak už čosi vieme o voľnom páde z výšky H' a ten môžeme rozdeliť na dva úseky a podarí sa nám neznámu funkciu identifikovať, opäť až na konštantu... teda vlastne konštanty dve. ■

[9] Tento príklad som bez zrnka hanby odkopíroval zo zadaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára. Vďaka.

Riešenie. Analýzu už zvládame hravo. Máme $[H] = L, [g] = LT^{-2}, [m] = M, [v] = LT^{-1}$ a pýtame sa na čas $[T] = T$. V situácii bez počiatočnej rýchlosti sme už vypočítali

$$T_0 = C\sqrt{\frac{H}{g}}\ ,\ V_0 = K\sqrt{Hg}\ . \tag{1.16}$$

Ako parameter nám ale pribudla počiatočná rýchlosť v, takže všeobecný vzťah pre fyzikálnu veličinu je

$$[H^\alpha g^\beta v^\gamma] = L^{\alpha+\beta+\gamma}T^{-\gamma-2\beta}\ . \tag{1.17}$$

Najskôr sa pustíme hľadať bezrozmerný parameter

$$-\gamma - 2\beta = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2}\gamma\ , \tag{1.18}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -\gamma - \beta = -\frac{1}{2}\gamma \tag{1.19}$$

a teda bezrozmerným parametrom je

$$\frac{v^\gamma}{g^{\frac{1}{2}\gamma}H^{\frac{1}{2}\gamma}} \tag{1.20}$$

pre ľubovoľné γ, teda ľubovoľná mocnina výrazu $\xi = v/\sqrt{gH}$.

Pre veličinu rozmeru času dostávame

$$-\gamma - 2\beta = 1 \quad \rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\ , \tag{1.21}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2} \tag{1.22}$$

a teda kombinácia

$$H^{-\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}}v^\gamma = \left(\frac{v}{\sqrt{gH}}\right)^\gamma\sqrt{\frac{H}{g}} \tag{1.23}$$

má rozmer T pre ľubovoľné γ. To znamená, že veličín rozmeru času je veľmi veľa, ale všetky sa dajú napísať ako tá pôvodná krát mocnina bezrozmerného parametra. Môžeme teda písať:

$$T = \sqrt{\frac{H}{g}}\sum_n C_n\xi^n = f(\xi)\sqrt{\frac{H}{g}} \tag{1.24}$$

pre nejakú neznámu funkciu $f(\xi)$.

Tú môžeme určiť takouto fintou. Voľný pád z výšky H z úlohy 1.16 sa dá rozdeliť na prvý úsek dĺžky xH, kde teleso padá voľne, a druhý úsek dĺžky $(1-x)H$, kde teleso padá počiatočnou rýchlosťou z konca prvého úseku. Pri označení výsledkov úloh $T_0(H,g)$ a $T(v,H,g)$ potom dostávame podmienku

$$T_0\left(H,g\right) = T_0\left(xH,g\right) + T\left(K\sqrt{xHg},(1-x)H,g\right)\ . \tag{1.25}$$

Po dosadení (1.16) a (1.24) dostaneme

$$C\sqrt{\frac{H}{g}} = C\sqrt{\frac{xH}{g}} + f\left(\frac{K\sqrt{xHg}}{\sqrt{g(1-x)H}}\right)\sqrt{\frac{(1-x)H}{g}}\ . \tag{1.26}$$

Premenovaním argumentu funkcie f dostaneme

$$C = C\frac{\frac{\xi}{K}}{\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{K}\right)^2}} + f(\xi)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{K}\right)^2}} \tag{1.27}$$

a teda

$$f(\xi) = C\left(\sqrt{1+\frac{\xi^2}{K^2}} - \frac{\xi}{K}\right) . \tag{1.28}$$

■

Príklad 1.25. V cyklistike zvyknú ľudia merať svoju rýchlosť v kilometroch za hodinu. Pri behaní zas zvyknú svoju rýchlosť merať tempom, t. j. časom, ktorý im trvá prebehnúť jeden kilometer. Aký to má význam? □

Návod. Pri tom môže pomôcť nájsť prevod medzi týmito vyjadreniami a skúsiť vypočítať, aký je rozdiel v oboch ukazovateľoch v prípade, že 10 km prejdete s 10 % rozdielom v čase behom a na bicykli (pri typických rýchlostiach). ■

Príklad 1.26. Náš svet je charakterizovaný tromi fundamentálnymi konštantami, ktoré popisujú tri základné teórie. Sú to postupne rýchlosť svetla c a teória relativity, gravitačná konštanta G a teória gravitácie, Planckova konštanta $\hbar$ a kvantová mechanika. Zostrojte z nich bezrozmernú veličinu! Aká je jej interpretácia? Zostrojte z nich veličiny rozmeru dĺžky, času a hmotnosti! Aká je ich interpretácia? □

Návod. Rozmer gravitačnej konštanty sa dá zistiť z $F = GmM/R^2$ a rozmer Planckovej konštanty je Js a joule je jednotka energie, pre ktorú napríklad $E = \frac{1}{2}mv^2$ alebo $E = Fs$. ■

1.4 Kinematika pohybu hmotného bodu

Pod kinematikou budeme rozumieť popis pohybu. Vo fyzike nás zaujíma, ako sa mení stav systému, ktorý popisujeme. V mechanike je stav systému popísaný polohou a rýchlosťou jeho častí. Pohyb, t. j. zmena polohy, je preto to, čo nás v mechanike zaujíma. Zatiaľ nás teda ale nebude zaujímať, čo a ako tento pohyb spôsobuje, iba jeho popis.

Pod hmotným bodom budeme rozumieť systém z jedného telesa, ktorého stav je plne popísaný polohou a rýchlosťou jedného jeho bodu, ktorý dopredu zvolíme a ktoré charakterizuje jeho hmotnosť m.[10] Znamená to, že nás nezaujíma, ako je teleso otočené, akú má farbu a politické presvedčenie. Upozorňujeme, že ide o zjednodušenie a niekedy sú tieto vlastnosti dôležité. Avšak v mnohých situáciách práve takýto popis postačuje alebo je aspoň dobrým odrazovým mostíkom.

Takže názov tejto kapitoly vlastne znie: popis zmeny mechanického stavu systémov úplne opísateľných stavom jedného dopredu zvoleného bodu[11].

[10] Hmotnosť bude ale dôležitá až v dynamike, pre popis stavu telesa je iba nálepkou, ktorú si so sebou nesie, ale množinu jeho možných stavov nemení.

[11] A okrem toho môže slúžiť aj ako postupné zoznamovanie sa s rôznym označením, ktoré budeme v tomto texte používať.

Náš svet je trojrozmerný, a teda **poloha** hmotného bodu je daná trojicou čísel usporiadaných do vektora $\vec{x}$. A táto poloha sa v čase mení, takže $\vec{x}(t)$. Polohu zadávame v nejakej súradnicovej sústave, ktorej sa vo fyzike hovorí vzťažná sústava. To, ako jeden a ten istý pohyb vyzerá v rôznych vzťažných sústavách, je jednou z najdôležitejších otázok fyziky a ešte veľakrát sa k nej vrátime.

V kartézskych súradniciach budeme potom písať $\vec{x} = (x, y, z)$.

Rýchlosť je potom zmena tejto polohy za veľmi krátky čas vydelená týmto časom, a teda je deriváciou polohy. Ako taká je tiež vektor

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{x}}(t) \ . \tag{1.29}$$

Keďže derivovanie podľa času sa bude vyskytovať veľmi, ale ozaj veľmi často, budeme ho označovať špeciálne, bodkou.

V kartézskych súradniciach potom máme

$$\vec{v}(t) = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big) \ . \tag{1.30}$$

Toto je ale veľmi netriviálna vlastnosť kartézskych súradníc a všeobecne to neplatí. To preto, že jednotkové vektory zložitejších súradnicových systémov sa s polohou menia a zmena vektora $\vec{x}$ nie je iba v zmene jeho komponentov, ale aj v zmene vektorov, vzhľadom na ktoré sa tieto komponenty počítajú. Trochu sa k tomu vrátime v rozprávaní o polárnych súradniciach, ale inak to v tomto texte veľkú úlohu hrať nebude.

Zrýchlenie je zas zmena rýchlosti za veľmi krátky čas vydelená týmto časom, a teda druhá derivácia polohy podľa času

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}(t) \ . \tag{1.31}$$

Je užitočné spomenúť si na definičné vzťahy prvej a druhej derivácie, ktoré dajú, že pre malé zmeny času dt môžeme písať

$$\vec{x}(t+dt) \ = \vec{x}(t) + \vec{v}(t)dt + \frac{1}{2}\vec{a}(t)dt^2 \ , \tag{1.32}$$

$$\vec{v}(t+dt) \ = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)dt \ . \tag{1.33}$$

Inverznou operáciou k derivovaniu je integrovanie, a zo známeho zrýchlenia môžeme dostať rýchlosť a zo známej rýchlosti môžeme dostať polohu. Pri rýchlosti a zrýchlení naberajú pojmy derivácia a integrál veľmi hmatateľný význam. Derivácia je priemerná rýchlosť za veľmi krátky čas, teda nám hovorí o tom, ako sa daná veličina mení v malom okolí svojej premennej. Integrál je súčtom veľkého množstva veľmi krátkych pohybov konštantnou rýchlosťou, a teda ak vieme, ako sa veličina mení lokálne, vieme z toho naskladať jej globálnu zmenu. Alebo

$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \ , \ x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{t/\Delta t} v(n\Delta t)\Delta t \ . \tag{1.34}$$

Skúste si rozmyslieť, ako by tieto dva vzťahy vyzerali vo viacerých rozmeroch.

Na začiatok si dajme jeden veľmi jednoduchý príklad.

Príklad 1.27. Teleso sa pohybuje po priamke s konštantným zrýchlením a_0 a počiatočnou rýchlosťou v_0. Ako sa bude meniť jeho poloha? □

Riešenie. Začneme so zrýchlením. To je konštantné, takže $a(t) = const = a_0$. Rýchlosť je integrálom zrýchlenia

$$v(t) = \int dt\, a(t) = a_0 \int dt = a_0 t + C \ . \tag{1.35}$$

Integračnú konštantu určíme z počiatočnej podmienky[12] $v(0) = C = v_0$. Poloha je integrálom rýchlosti

$$x(t) = \int dt\, v(t) = \int dt(a_0 t + v_0) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \ . \tag{1.36}$$

x_0 je miesto, v ktorom sme začali teleso sledovať.

Iný spôsob, ako dostať rovnaký výsledok, je použiť Newtonov vzorec pre určitý integrál

$$\int_0^t d\tau\, a(\tau) = v(t) - v(0) \ , \tag{1.37}$$

ktorý už nemá žiadnu integračnú konštantu, ale je v ňom počiatočná rýchlosť explicitne. ■

A teraz druhý, len o málo zložitejší.

Príklad 1.28. Hmotný bod sa pohybuje s konštantným vektorom zrýchlenia $\vec{a}_0$, s počiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0$ z bodu $\vec{x}_0$. Kde sa bude nachádzať v čase t? □

Riešenie. Integrovanie je v tomto prípade úplne totožné s integrovaním v predchádzajúcom príklade. Zaujímavé je to, ako to funguje v troch rozmeroch. Rozpíšeme to na rýchlosti

$$\vec{v}(t) = \int dt\, \vec{a}(t) = \left(\int dt\, a_x(t), \int dt\, a_y(t), \int dt\, a_z(t) \right) = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0 \ . \tag{1.38}$$

Podobné integrály pre polohu dávajú

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0. \tag{1.39}$$

■

Príklad 1.29. Premyslite si, že platí nasledovné. Ak je v trojrozmernom prípade komponent zrýchlenia a_i závislý iba od súradnice x_i, tri rovnice, ktoré určujú vektor $\vec{x}(t)$, sa rozviažu a pohyby v jednotlivých smeroch sú navzájom nezávislé. □

Pohyb po kružnici. Budeme venovať niekoľko príkladov technicky aj konceptuálne veľmi dôležitej myšlienke, pohybu po kružnici.

[12] Funkciu počiatočného času mohol v princípe plniť hociktorý moment, zväčša sa zvolí počiatok časovej osi presne v tomto momente.

Príklad 1.30. Teleso sa pohybuje po kružnici polomeru R rýchlosťou konštantnej veľkosti v. Ako vyzerá rozumná súradnicová sústava na popis tejto situácie? Ako v tejto sústave vyzerá poloha bodu v čase t? Aké sú zložky rýchlosti a zrýchlenia? Ukážte, že platí

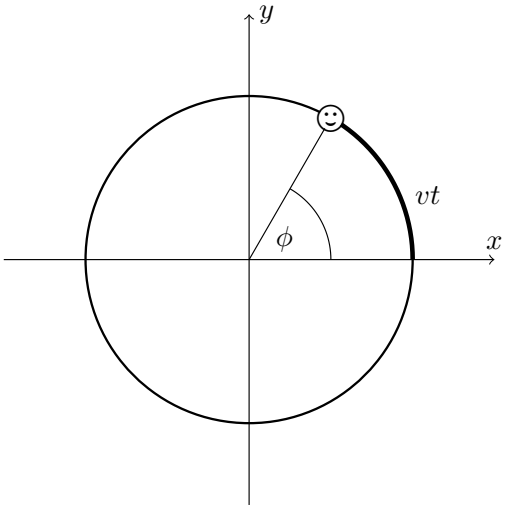
$$\vec{a}(t) + \left(\frac{v}{R}\right)^2 \vec{x}(t) = 0 \tag{1.40}$$

a tiež že

$$|\vec{a}(t)| = \frac{v^2}{R} \ . \tag{1.41}$$

□

Riešenie. Zvolíme súradnicovú sústavu tak, že jej stred bude v strede kružnice, že v čase $t = 0$ bude teleso v bode $x = R, y = 0$ a že bude obiehať proti smeru hodinových ručičiek. Za čas t prejde vzdialenosť vt a uhol, o ktorý sa teleso otočí, bude $\phi = vt/R$.



Pre súradnice bodu v čase t bude teda platiť

$$x(t) = R\cos\left(\frac{v}{R}t\right), \tag{1.42}$$

$$y(t) = R\sin\left(\frac{v}{R}t\right). \tag{1.43}$$

Jednoduchým derivovaním nájdeme zložky rýchlosti

$$\dot{x}(t) = -v\sin\left(\frac{v}{R}t\right), \tag{1.44}$$

$$\dot{y}(t) = v\cos\left(\frac{v}{R}t\right) \tag{1.45}$$

a zrýchlenia

$$\ddot{x}(t) = -\frac{v^2}{R}\cos\left(\frac{v}{R}t\right), \tag{1.46}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{v^2}{R}\sin\left(\frac{v}{R}t\right). \tag{1.47}$$

Metódou pozriem a vidím sa ľahko presvedčíme, že $a_x(t) = -\frac{v^2}{R^2}x(t)$ a $a_y(t) = -\frac{v^2}{R^2}y(t)$. Rovnako ľahko nahliadneme, že platí aj druhá rovnosť.

■

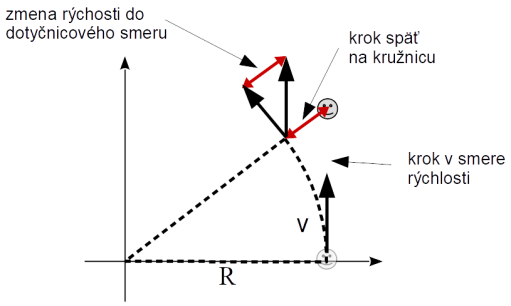
Dôležitá vec: veľmi nenápadne sme použili spomínanú netriviálnu vlastnosť kartézskych súradníc, že bázové vektory vyzerajú rovnako v každom bode, takže sme mohli písať – a prvýkrát sa stretávame s označením jednotkového vektora v danom smere strieškou –

$$\dot{\vec{x}} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} \ . \tag{1.48}$$

V zložitejších sústavách to nemusí byť pravda.

Tu sa oplatí na moment zastaviť a zamyslieť. Zistili sme, že pri rovnomernom pohybe po kružnici teleso zrýchľuje! Ako je to možné, keď sa nemení veľkosť rýchlosti? Odpoveďou je prirodzene, že sa mení smer rýchlosti.

Poďme si premyslieť, čo presne sa deje pri takomto pohybe za veľmi krátky čas. Teleso sa za veľmi krátky časový okamih dt posunie v smere svojej rýchlosti do nového bodu $\vec{x} + \vec{v}dt$. Tým sa ale dostane mimo kružnice a musí spraviť malý krok smerom späť do stredu, aby sa na kružnicu vrátilo. Ako na obrázku.



Tento príklad má v sebe ešte jedno ponaučenie. Vhodným parametrom pre popis polohy telesa bol uhol $\phi(t)$. Rovnako ako pre polohu, aj pre tento uhol môžeme zadefinovať rýchlosť ako časovú deriváciu $\omega = \dot{\phi}(t)$ a zrýchlenie ako druhú časovú deriváciu. Budeme hovoriť o uhlovej rýchlosti a uhlovom zrýchlení. Vidíme, že v tomto prípade bolo uhlové zrýchlenie nulové a pohyb je teda v tejto súradnici rovnomerný.

Medzi uhlovou a posuvnou rýchlosťou je veľmi dôležitý vzťah $v = \omega R$. Z matematického hľadiska ide jednoducho o časovú deriváciu vzťahu medzi dĺžkou kružnicového oblúka a príslušným uhlom. Vo svete je veľa príkladov, keď je tento vzťah dôležitý. S niektorými sa ešte stretneme, tu spomeňme jeden. Keď ide auto v zákrute, vnútorné koleso sa pohybuje po krivke s menším polomerom ako vonkajšie. To znamená, že pri konštantnom ω – ak nie je táto hodnota rovnaká pre všetky kusy auta, máte väčšie problémy ako tento – sa musí vonkajšie koleso pohybovať rýchlejšie ako vnútorné. Ako uvidíme čoskoro v príklade o valení bez prešmykovania, znamená to, že sa musí otáčať o čosi rýchlejšie. Zariadeniu, ktoré v autách zabezpečuje to, aby sa obe kolesá otáčali tak akurát, sa hovorí diferenciál.

Pozrime sa teraz na o čosi zložitejší prípad.

Príklad 1.31. Teleso sa pohybuje po kružnici polomeru R premennou rýchlosťou $v(t)$. Aká je poloha, rýchlosť a zrýchlenie bodu v tomto prípade? □

Riešenie. Snáď je už jasné, že $R\phi(t) = \int v(t)dt$ a $\dot{\phi}(t) = v(t)/R$. Potom derivovaním zloženej funkcie dostaneme

$$\ddot{x}(t) = -\frac{v(t)^2}{R}\cos(\phi(t)) - \dot{v}(t)\sin(\phi(t)) \tag{1.49}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{v(t)^2}{R}\sin(\phi(t)) + \dot{v}(t)\cos(\phi(t)) \tag{1.50}$$

A teda predchádzajúce vzťahy zostávajú v platnosti tak z polovice. Zrýchlenie bude mať zložku, ktorá je presne v takom tvare ako predtým. Avšak objavila sa nám zložka, kolmá na polohový vektor a v smere vektora rýchlosti, ktorá mení veľkosť rýchlosti. Všimnite si, že dostredivé zrýchlenie má vždy presne veľkosť v^2/R, aby bol pohyb po kružnici. To nie je žiadny zázrak, táto informácia bola už od začiatku vložená do tvaru, akým sme zapísali súradnice. ■

Naučili sme sa teda, že pri rovnomernom pohybe po kružnici je zrýchlenie $\vec{a} = -\vec{x}v^2/R^2$. Pri premennej rýchlosti je $-\vec{x}v^2/R^2$ dostredivá zložka zrýchlenia a k nej pribudne zložka v smere rýchlosti. Ak si teraz spomenieme na to, že z rozmerovej analýzy sme pre silu pri takomto pohybe dostali $F = mv^2/R$, začína sa nám črtať Newtonov zákon $F = ma$. Ale nepredbiehajme.

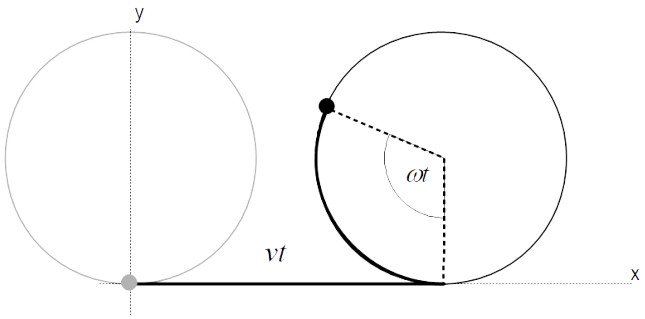
Pohyb po kružnici je dôležitý, lebo každý krivočiary pohyb sa dá pomocou neho popísať. Kľúčovým slovom je tu oskulačná kružnica a idea je tá, že každá krivka sa dá do druhého rádu aproximovať sadou takýchto kružníc, ktorých malé kúsky oblúkov dohromady vytvárajú žiadanú krivku. A pohyb po krivke je potom sadou pohybov po týchto kružniciach, s patričnými rýchlosťami a zrýchleniami. Koho to zaujíma viac, môže pozrieť príklad 1.37.

Príklad 1.32. Obruč sa bez prešmykovania valí po podložke tak, že za čas T sa otočí presne raz okolo svojej osi. Valenie bez prešmykovania okrem iného znamená, že sa stred obruče za tento čas presunie vo vodorovnom smere presne o obvod obruče.

- V akom vzťahu je posuvná rýchlosť obruče a jej uhlová rýchlosť?
- Ako vyzerá vhodná súradnicová sústava na popis tejto situácie a aké sú v nej súradnice stredu obruče?
- Na obruči zvoľme jeden bod, označme ho P. Aké sú súradnice tohto bodu v čase t?
- S akou rýchlosťou a zrýchlením sa pohybuje tento bod? Ako vyzerá jeho trajektória?
- Ktorým smerom sa pohybuje bod, ktorý je v čase t najvyššie? Akou rýchlosťou sa pohybuje bod, ktorý sa v tom istom čase dotýka zeme?
- Vypočítajte priemernú rýchlosť bodu P počas valenia obruče. Vypočítajte priemernú veľkosť rýchlosti bodu P.
- Dobre si premyslite, že tento príklad je vlastne pohyb po kružnici v sústave, ktorá sa pohybuje.

□

Riešenie. Ak sa obruč otáča uhlovou rýchlosťou ω, potom sa za čas t otočí o uhol $\theta = \omega t$. Ak sa obruč posúva dopredu posuvnou rýchlosťou v, potom sa za čas t posunie o vzdialenosť $x = vt$.



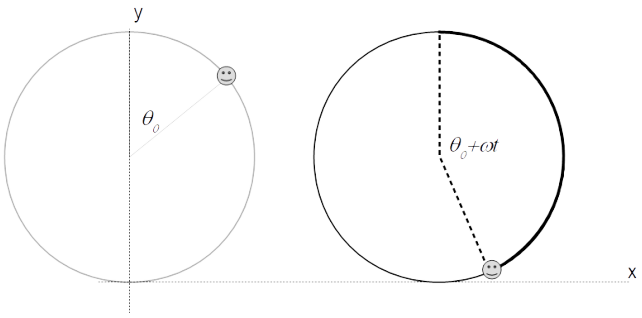
Požiadavka neprešmykovania tak, ako je formulovaná v zadaní, potom hovorí $\theta R = x$ a teda hneď dostávame

$$\omega = \frac{v}{R} \ . \tag{1.51}$$

Podobne vyzerajúci vzťah sme už mali v príklade 1.30 o pohybe po kružnici. Treba si dávať ale pozor, tu znamená niečo trochu iné. Tam to bol vzťah medzi dvomi veličinami, ktoré sú od seba závislé. Pri pohybe obruče sú v princípe rýchlosti ω a v nezávislé a tento vzťah ich viaže dohromady v konkrétnom prípade valenia bez prešmykovania. Zo zadania potom dostaneme, že $v = 2\pi R/T$.

Sústavu zvolíme tak, že stred má v čase $t = 0$ súradnice $(0, R)$ a vo zvislom smere sa nehýbe. V čase t má potom stred súradnice $\vec{x}_S = (vt, R)$.

Uhol otočenia budeme brať od zvislej osi tak, že narastá v smere pohybu hodinových ručičiek, ako na tomto obrázku:



Keď sa obruč otočí o uhol ωt, bod, ktorý bol v čase $t = 0$ v mieste θ_0, bude od stredu v smere osi x posunutý o $R\sin\theta_P$ a v smere osi y o $R\cos\theta_P$, kde $\theta_P = \theta_0 + vt/R$, jeho súradnice teda budú

$$\vec{x}_P(t) = \begin{pmatrix} vt + R\sin\left(\theta_0 + vt/R\right) \\ R + R\cos\left(\theta_0 + vt/R\right) \end{pmatrix} \ . \tag{1.52}$$

Ak nás zaujíma trajektória, ktorú kreslí jeden bod, môžeme zvoliť $\theta_0 = 0$ a tento výraz je potom jej parametrickým vyjadrením pre $t \in (0, T)$. Ide o cykloidu, ktorá je presne týmto pohybom definovaná. Je to veľmi zaujímavá krivka, ktorá je napríklad brachistochrónou aj izochrónou. Ak vás to zaujíma, isto sa rýchlo doklikáte k tomu, čo tieto slová znamenajú. Tiež je zaujímavé krivku si vykresliť, všimnúť si, že je v spodnom bode špicatá, a teda nediferencovateľná, a ako sa tento fakt vysporiada s nasledovným pekným výsledkom pre rýchlosť a zrýchlenie. A ak vás to nezaujíma, môžete smelo pokračovať ďalej bez toho.

Derivovaním predchádzajúceho vzťahu dostaneme pre rýchlosť

$$\vec{v}_P(t) = v \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

a pre zrýchlenie ďalším derivovaním to isté ako v prípade bodu na kružnici (1.46).

Pre horný bod dostávame z $\theta = 0$ rýchlosť $\vec{v} = (2v, 0)$, pre spodný $\theta = \pi$ zas $\vec{v} = (0, 0)$. Spodný bod obruče má teda nulovú okamžitú rýchlosť a horný bod má dvakrát takú veľkú okamžitú rýchlosť ako stred kolesa. Vidno to na fotografiách bicyklových kolies, kde je spodná časť ostrá a vrch veľmi

rozmazaný. Tiež to súvisí so značkami, ktoré nechávajú kolesá lietadiel na pristávacích dráhach. Na začiatku, kým sa roztočia, sa trú o dráhu a zostáva za nimi šmuha. Keď sa ale po čase roztočia na správnu rýchlosť, spodný bod vzhľadom na dráhu zastane a prestane sa trieť.

Priemerná rýchlosť bodu P za jednu otáčku je v x-ovom smere

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(1+\cos\theta)d\theta = v \tag{1.54}$$

a v y-ovom smere 0. To by sme aj očakávali, pretože presne takto sa bod za jednu otáčku posunie. Podobné netriviálne výpočty vcelku triviálnych výsledkov sú výborným spôsobom, ako overiť, že sme sa pri výpočtoch nikde nepomýlili a že naše vzorce majú šancu byť správne.

Na úplný záver dostávame pre veľkosť rýchlosti

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v\sqrt{2(1+\cos\theta)} \tag{1.55}$$

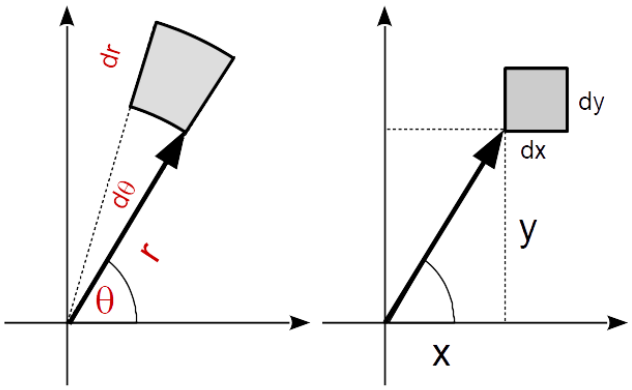
čo dá priemernú veľkosť rýchlosti

$$|\bar{v}| = \frac{\sqrt{2}v}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\sqrt{1+\cos\theta} = \frac{4v}{\pi}\ . \tag{1.56}$$

Pri jednej otáčke teda prejde bod dráhu $|\bar{v}|T = 8R$.

Na záver jedna poznámka. Na takéto pohyby sa dá pozerať tak, že teleso sa otáča okolo bodu, v ktorom sa dotýka podložky. Tak intuitívne dostávame rýchlosti bodov na obvode obruče. Toto sa však deje iba infinitezimálny čas a po kroku dt sa okamžitý bod otáčania zmení. ■

Polárne súradnice. V rovine môžeme zaviesť aj iné ako kartézske súradnice. Polárne sú v niektorých prípadoch užitočnejšie. Namiesto vzdialeností od počiatku v dvoch navzájom kolmých smeroch zadávame polohu bodu vzdialenosťou od počiatku r a uhlom vzhľadom na nejaký zvolený smer θ.



Je dobré si rozmyslieť, že tu ide iba o iné vyjadrenie vektora $\vec{x}$

$$\vec{x} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} = r\,\hat{r} \tag{1.57}$$

kde sme opäť použili označenie jednotkového vektora v danom smere strieškou[13]. Pozor, $\hat{x}, \hat{y}$ sú všade rovnaké, ale $\hat{r}, \hat{\theta}$ sú v rôznych miestach rôzne. K čomu presne to vedie, sa dozvieme v príklade 2.36,

[13] Písmeno x tu znamená tri rôzne veci podľa toho, akú má ozdobu. Skúste sa s tým zžiť.

kde budeme popisovať pohyb po kružnici v polárnych súradniciach. Pre plošné elementy, ktoré budeme potrebovať pri integrovaní neskôr počas semestra, platí

$$dS_{kart} = dx\,dy \quad , \quad dS_{pol} = r\,dr\,d\theta \ . \tag{1.58}$$

Ide o plochy útvarov, ktoré v danom mieste vzniknú, keď spravíme malé kroky v jednotlivých súradnicových smeroch. V polárnych súradniciach dostávame závislosť elementu od polohy, pretože krok $d\theta$ ďaleko od počiatku znamená posunutie o väčšiu vzdialenosť.

Ďalšie úlohy

Príklad 1.33. Nájdite polohu, rýchlosť a zrýchlenie telesa, ktorého pohyb je daný nasledovne:

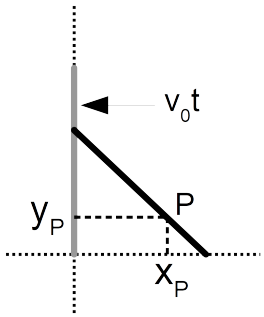
- $\vec{x} = (t^2 e^{-t}\,,\, 3t^2 + 2\,,\, 4t - 2t^3)$,
- $v = v_0(2 + 2x)$,
- $v = \frac{v_0}{2+2x}$.

□

Príklad 1.34. Popíšte pohyb telesa, ktoré sa so zrýchlením $\vec{a} = (1 + 2t, -3)$ pohybuje s počiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0 = (-2, 5)$ z bodu $\vec{x}_0 = (-1, 3)$. □

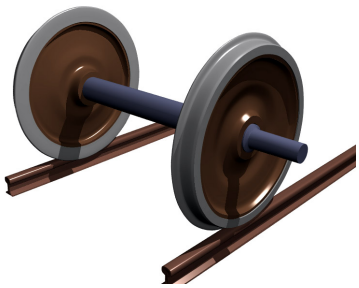
Príklad 1.35. Máme tyčku, ktorá je na začiatku vo zvislej polohe. Jej horný bod je fixovaný na zvislú priamku, jej spodný bod na vodorovnú priamku. V čase $t = 0$ sa horný bod začne pohybovať nadol s konštantnou rýchlosťou v_0.

- Nájdite súradnice spodného konca tyčky v čase t.
- Na tyčke zvoľme jeden bod, označme ho P. Napíšte vzťahy pre súradnice tohto bodu v čase t a dokážte, že bod opíše elipsu.
- Aká je rýchlosť a aké je zrýchlenie tohto bodu?
- Ako by vyzerali výsledky týchto úloh v prípade, že horný bod klesá časovo premenne $y = y(t)$?



□

Príklad 1.36. Koleso na vlaku má zvláštny tvar, ako na obrázku. Polomer časti, ktorá sa dotýka koľajnice, je r a polomer vonkajšej časti je $R > r$. Urobte podobnú analýzu pohybu bodu na obvode vonkajšej časti kolesa ako v prípade valiaceho sa kolesa z príkladu 1.32.



□

Návod. Podobne ako v prípade valiacej sa obruče, ale rôzne polomery pre rýchlosť z posuvného a otáčavého pohybu. ■

Príklad 1.37. Teleso sa v rovine $z = 0$ pohybuje po krivke zadanej rovnicou $F(x, y) = 0$ zadaným časovým predpisom $\vec{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Ukážte, že

- rýchlosť telesa je v každom momente v smere dotyčnice ku krivke v danom bode,
- zrýchlenie telesa má v každom momente zložku v smere dotyčnice ku krivke veľkosti $\left|\frac{d|\vec{v}|}{dt}\right|$,
- zrýchlenie telesa má v každom momente zložku v smere normály na krivke veľkosti

$$\frac{|\vec{v}|^2}{R},$$

kde R je polomer krivosti krivky v danom bode.

□

Príklad 1.38. Loď Aštara Šerana letí okolo stanice Death Star po priamke konštantnou rýchlosťou u. V momente, keď sa loď pohybuje kolmo na jej spojnicu so stanicou, vyštartuje zo stanice Darth Vader na rakete rýchlosťou v a začne Aštara naháňať. Nerobí to však príliš rozumne a vektor jeho rýchlosti v každom momente smeruje na loď.

- Nájdite vhodnú sústavu súradníc na popis tohto problému. (Chvíľku nad tým rozmýšľajte a snáď vás napadne, že takou sústavou je polárna sústava, v ktorej počiatku je Aštarova loď, a v ktorej sa táto loď nehýbe.)
- Napíšte vzťahy pre rýchlosť rakety a nájdite parametrické vyjadrenie trajektórie rakety v tejto sústave.
- Za akých podmienok dostihne Vader Aštara? Ako blízko sa k nemu najviac dostane v prípade, že ho nedobehne?
- Vypočítajte časový priebeh súradníc. Za aký čas raketa dobehne loď?
- Prejdite do pôvodnej sústavy a nájdite trajektóriu rakety v nej.

□

2 Dynamika jedného hmotného bodu

2.1 Úvod – história, postuláty, základy

Najskôr okomentujme slovíčko v nadpise. Dynamika sa zaoberá tým, čo a ako spôsobuje pohyb telies a zamýšľa sa nad tým, ako bude za daných podmienok vývoj mechanickej sústavy vyzerať. V kontraste s tým je kinematika iba popis všetkých možných vývojov.

A teraz poďme na vec. Základy klasickej mechaniky formuloval v druhej polovici sedemnásteho storočia Isaac Newton. Vo svojom diele *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* prezentoval tri zákony mechanických dejov. Okrem toho ale dal moderný pohľad na prírodné vedy ako také – prírodné zákony sú napísané jazykom matematiky. V zmysle rozdielu medzi kinematikou a dynamikou sa teda dá povedať, že ľudia poznali kinematiku ešte pred Newtonom, dynamiku vymyslel až on.

Možno ste počuli vyjadrenie Newtona o tom, ako stál na pleciach obrov. Pod týmito obrami sa zväčša chápu Kepler a Galilei a hrajú dôležitú historickú úlohu na ceste k zákonom mechaniky. Ak sa chcete dozvedieť o tejto histórii viac, skúste niečo z literatúry na konci skrípt.

Tri Newtonove zákony vyzerajú nejak takto:

- **prvý – zákon zotrvačnosti**: v inerciálnej vzťažnej sústave sa teleso, na ktoré nepôsobí žiadna sila, pohybuje rovnomerne priamočiaro;
- **druhý – zákon sily**: ak na teleso pôsobí sila $\vec{F}$, potom sa jeho poloha v čase mení na základe rovnice
$$\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = m\ddot{\vec{x}} \; ; \tag{2.1}$$
- **tretí – zákon akcie a reakcie**: ak teleso 1 pôsobí na teleso 2 silou, potom teleso 2 pôsobí na teleso 1 silou rovnakej veľkosti a opačného smeru.

K tretiemu zákonu sa vrátime, až keď sa budeme zaoberať situáciami s viacerými telesami.

Prvý zákon je tak trochu redundantný, lebo je špeciálnym prípadom druhého, keď $\vec{F} = 0$. Je však dôležitý z historického hľadiska a zdôrazňuje rozdiel oproti aristotelovskému pohľadu na svet, v ktorom bez sily[14] nie je pohyb. Prvý zákon zdôrazňuje zotrvačnosť telies a vedel o ňom už Galilei ešte pred Newtonom. Pre nás je dôležitá skôr časť o inerciálnych vzťažných sústavách a z formálneho hľadiska je prvý Newtonov zákon postulovaním existencie takýchto sústav. Viac o rôznych sústavách budeme písať v kapitole 4, dovtedy budeme predpokladať nejakú dopredu dobre definovanú sústavu, ktorá je inerciálna – a zatiaľ to bude znamenať len to, že v nej platia Newtonove zákony tak, ako ich vidíme vyššie.

Druhý zákon dáva interpretáciu parametra m z predchádzajúcej kapitoly. Hovorí, ako veľmi teleso "odporuje" pohybovým účinkom sily. Rovnaká sila bude mať pre hmotné body s väčším m menší efekt a bude ich rýchlosť meniť pomalšie.

Zákon sily je obyčajnou[15] diferenciálnou rovnicou druhého rádu. K jeho úplnému riešeniu teda potrebujeme dve počiatočné podmienky: polohu a rýchlosť. Presnejšie ide o jednu vektorovú rovnicu a

[14] Lepšie povedané, bez pôsobenia medzi telesami, Aristoteles slovo sila nepoužíval.

[15] Obyčajnou po matematickej stránke. Po fyzikálnej je to veľmi špeciálna diferenciálna rovnica ☺.

treba dve podmienky pre každý rozmer priestoru, takže v troch rozmeroch potrebujeme dva vektory a tým 6 počiatočných podmienok. No a zväčša to robíme tak, že nulovú hodnotu času zvolíme v momente, v ktorom máme zadané počiatočné podmienky.

Obyčajné diferenciálne rovnice vlastne hovoria, ako sa funkcia, ktorú popisujú, zmení za krátky časový okamih dt z hodnoty $f(t)$ na hodnotu $f(t+dt)$. A tento časový krok sa potom iteruje veľakrát tak, že dostaneme zmenu za makroskopický čas. Po formálnej stránke sa potom v matematike posiela časový krok dt do nuly a študuje sa, ako sa rôzne objekty správajú v tejto limite. Dá sa na to ale pozerať aj opačne, že máme konečné kroky, ale akýkoľvek makroskopický pohyb vzniká až veľmi veľkým (limitne nekonečným) počtom takýchto krokov. Alebo môžeme mať úplne fyzikálny pohľad na vec a povedať, že v kompletnej teórii kvantovej gravitácie má čas možno diskrétnu štruktúru s krokom na úrovni Planckovho času a to by bolo to prirodzené dt v našich rovniciach. (Zatiaľ je to ale len hypotéza.)

Pozrime sa, ako by riešenie takejto rovnice vyzeralo na počítači, explicitným iterovaním tohto procesu. A pre jednoduchosť majme iba jeden rozmer. Na zákon sily sa budeme pozerať ako na rovnicu pre zrýchlenie. Na začiatku máme zadanú polohu a rýchlosť, z čoho dopočítame zrýchlenie telesa. Necháme čas bežať náš krátky krok dt a pozrieme sa, čo sa s telesom stalo. Posunulo sa do nejakej novej polohy a zmenila sa jeho rýchlosť, lebo sa pohybovalo so zrýchlením. Zmenu rýchlosti dopočítame priamočiaro, na zmenu polohy však pôjdeme trochu sofistikovanejšie a pohyb budeme považovať za rovnomerne zrýchlený. Mohli by sme ho považovať aj za rovnomerný priamočiary, ale takto dostaneme presnejší výsledok[16]. V novom čase potom dopočítame nové zrýchlenie telesa na základe novej polohy a rýchlosti a ideme ďalej. V tabuľke to potom vyzerá nejak takto.

$$\begin{array}{llll} t=0, & v=v_0, & x=x_0, & a_0=\dfrac{F(x_0,v_0)}{m} \\ t=dt, & v_1=v_0+a_0\ dt, & x_1=x_0+v_0\ dt+\frac{1}{2}a_0\ dt^2=x_0+\dfrac{v_0+v_1}{2}dt, & a_1=\dfrac{F(x_1,v_1)}{m} \\ t=2dt, & v_2=v_1+a_1\ dt, & x_2=x_1+\dfrac{v_1+v_2}{2}dt, & a_2=\dfrac{F(x_2,v_2)}{m} \\ & \text{atď.} & & \end{array} \tag{2.2}$$

V Newtonových zákonoch, hlavne v zákone sily (2.1), je obsiahnutých veľmi veľa zaujímavých vecí, ktoré z nich vypadnú ako dôsledok bez toho, aby sme ich tam vložili. Rôzne symetrie, zákony zachovania a podobne. Povieme si o nich viac, keď na to príde čas.

Skôr ako sa pustíme ďalej, ešte povedzme, že klasická mechanika má dva problémy. Prvý je skôr chybička krásy – je to zle. Jednoducho náš svet sa podľa týchto zákonov nespráva. Pre veľké a pomalé veci je to dobré priblíženie, ale pre rýchle a malé veci už platia iné zákony. Stále je ale užitočná, lebo väčšina vecí, s ktorými prídete v živote do kontaktu, je veľká a pomalá. Druhý problém je v tom, že po matematickej stránke začne byť klasická mechanika veľmi rýchlo komplikovaná. Newtonove rovnice vo všeobecnosti nevieme presne pre viac ako dve telesá vyriešiť a ich riešenia majú rôzne zvláštne

[16] Všimnite si, ako tu vlastne používame priemernú rýchlosť na danom časovom intervale namiesto rýchlosti na jeho začiatku. Podobne funguje Heunova metóda, ktorá by takto spriemerovala aj zrýchlenie pri výpočte novej rýchlosti.

vlastnosti. Napríklad veľkú citlivosť na počiatočné podmienky a s tým súvisiace nestability riešení. Toto všetko je stále aktívnou súčasťou (nielen matematického) výskumu.

Newtonovými zákonmi sa výskum formulácie mechaniky ako takej neskončil a po matematickej stránke sa o tom dá povedať oveľa viac. Čosi málo sa rozpráva v druhom pokračovaní tohto predmetu. Kľúčové mená sú tu potom Lagrange, Euler a Hamilton.

V nasledujúcich kapitolách sa budeme pozerať na postupne zložitejšie a zložitejšie tvary sily $\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ a dozvedať sa nové veci o svete. Začneme jednorozmerným pohybom a potom sa pozrieme do viacerých rozmerov a budeme pridávať aj ďalšie telesá. A popri tom snáď začneme získavať trochu intuície o tom, ako tá fyzika vlastne funguje. Po matematickej stránke budú ďalšie kapitoly hlavne riešením obyčajných diferenciálnych rovníc. Ale väčšinou nebude treba žiadnu super ťažkú matematiku, rovnice budú buď separovateľné (takže to budú prezlečené integrály), alebo sa ich riešenie bude dať celkom jednoducho uhádnuť.

Príklad 2.1. V ľubovoľnom počítačovom programe, napríklad v Exceli alebo inom tabuľkovom editore, implementujte ideu numerického riešenia (2.2) pre

- konštantnú silu,
- silu úmernú $-x$,
- silu úmernú $-v$,
- akúkoľvek silu, ktorú si vymyslíte, fantázii sa medze nekladú, či čo.

Ako závisia vlastnosti riešenia, ktoré ste dostali, od voľby hodnoty parametra dt? □

Príklad 2.2. Rozmyslite si, ako by idea numerického riešenia (2.2) vyzerala vo viacerých rozmeroch. Potom skúste riešiť pohybovú rovnicu pre

- silu úmernú $-\vec{v}$ kombinovanú s konštantnou silou,
- silu úmernú $-|\vec{v}|\vec{v}$ kombinovanú s konštantnou silou,
- silu úmernú $-\vec{x}/|\vec{x}|^3$.

Skúste rôzne počiatočné podmienky a pozrite sa, ako od nich závisí výsledok.

Ako závisia vlastnosti riešenia, ktoré ste dostali, od voľby hodnoty parametra dt?

□

Na všetky tieto sily sa pozrieme v ďalších kapitolách.

2.2 Hmotný bod v jednom rozmere

Začnime jednorozmerným prípadom, keď zhodíme všetky šípky. Prípad nulovej sily rieši prvý Newtonov zákon, poďme teda na druhý prípad, konštantnú silu.

2.2.1 Konštantná sila

Konštantná sila znamená konštantné zrýchlenie, a to je situácia, ktorú sme už mali v príkladoch 1.27 a 1.28. Je ale zaujímavé zvoliť súradnice a konštantu úmernosti tak, aby pre silu platilo $F = -mg$ a teda sme dostali štandardné gravitačné pole. Dostaneme $\ddot{x} = -g$ a teda

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \ , \tag{2.3}$$

kde x_0 je počiatočná výška a v_0 je počiatočná rýchlosť.

Skôr ako sa pustíme do komplikovanejších vecí, pozrime sa na dva prípady konkrétnych počiatočných podmienok.

- **Voľný pád**, a teda situácia, keď teleso s nulovou rýchlosťou púšťame z danej výšky. To v preklade znamená $x_0 = H$ a $v_0 = 0$ a teda hneď

  $$x(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 \ , \ v(t) = -gt \ . \tag{2.4}$$

  Ak sa zaujímame o čas T, keď teleso dopadne, potrebujeme vyriešiť $x(T) = 0$. Hravo dostaneme

  $$T = \sqrt{2} \sqrt{\frac{H}{g}} \ . \tag{2.5}$$

  Podarilo sa nám teda nájsť neznámu bezrozmernú konštantu z výsledku rozmerovej analýzy (1.10).

- **Vrh nahor**, a teda situácia, keď $x_0 = 0$, kde sme už v predchádzajúcom príklade celkom prirodzene zvolili podlahu, a $v_0 > 0$, lebo hádžeme nahor. Dostaneme tak

  $$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \ , \ v(t) = v_0 - gt \ . \tag{2.6}$$

  Vidíme, že výška telesa najskôr narastá, lebo pre malé časy lineárny člen vyhrá nad kvadratickým, ale ten postupne preváži. Môžeme sa pýtať, kedy teleso dosiahne najväčšiu výšku. Maximum funkcie hľadáme ako miesto s nulovou deriváciou a teda, ak čas zastavenia označíme T, dostaneme $\dot{x}(T) = v(T) = 0$ a teda $T = v_0/g$. Nulovosť rýchlosti je veľmi intuitívna požiadavka na maximálnu výšku. Keď má teleso nejakú kladnú rýchlosť, ešte sa pohybuje smerom nahor a v ďalších momentoch bude vyššie. Ak má zápornú rýchlosť, pohybuje sa už nadol a bolo vyššie v predchádzajúcich momentoch. Výška v tomto čase je

  $$x(T) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g} \tag{2.7}$$

  a opäť rovnaký výsledok, ako dala rozmerová analýza, opäť už aj s numerickým faktorom. Späť teleso dopadne v čase, keď $x(T') = 0$, čo dá $T' = 2T$. Ak napíšeme riešenie (2.6) v posunutom čase $t' = t - T$, dostaneme rovnaký tvar riešenia ako pri voľnom páde z výšky $v_0^2/2g$. To súvisí s časovou symetriou Newtonových zákonov.

Príklad 2.3. Teleso hodíme nahor rýchlosťou v_0. Pohybuje sa v homogénnom gravitačnom poli bez odporu vzduchu. Akú časť celkového času strávi teleso v hornej tretine svojho pohybu? □

Riešenie. Potrebujeme jednoducho dopočítať časy, v ktorých platí $x(t) = \frac{v_0^2}{3g}$. Použijeme (2.6) a dostaneme

$$t_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \frac{v_0}{g} \ . \tag{2.8}$$

Ešte nejaký čas budeme zdôrazňovať, že toto je výsledok, ktorý by sme očakávali z rozmerovej analýzy. Odpoveďou na otázku zo zadania je

$$\frac{t_+ - t_-}{2T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774 \ , \tag{2.9}$$

i keď to, že je to len číslo nezávislé od v_0 aj g, nám povedala už rozmerová analýza.

Vidíme teda, že teleso v hornej časti trajektórie strávi neúmerne veľa času. To súvisí s tým, prečo sa nám pri výskokoch často zdá, akoby sa ľudia (napríklad pri basketbale) vznášali. A tiež to súvisí s tým, že pri žonglovaní je pohľad na loptičky vo vzduchu, v okolí maxima ich dráhy, oveľa dôležitejší ako pohľad dole na ruky. Náš mozog vie celkom dobre, kde máme konce rúk, ale na to, aby zistil, kde sú loptičky a ako a kam sa pohybujú, ich potrebuje vidieť čo najdlhšie. ■

2.2.2 Odporové prostredia

Ako druhú najjednoduchšiu situáciu zoberieme prípady odporového prostredia. To môže byť trochu prekvapivé, lebo na strednej škole sa táto téma zoširoka obchádza. Ako uvidíme, je to preto, že sa bez jazyka diferenciálnych rovníc nedá dobre popísať. My už ale týmto jazykom rozprávame, tak sa do toho môžeme pustiť.

Odporové prostredie je také, kde sila pôsobí proti pohybu telesa, ale na stojace teleso nepôsobí nič. Je to teda sila, ktorá závisí od rýchlosti a pôsobí proti nej.

Lineárny odpor. V najjednoduchšom prípade môžeme mať:

$$F = -\kappa v \ , \tag{2.10}$$

kde znamienko mínus zariaďuje, že pre kladné rýchlosti dostávame zápornú silu, ktorá pôsobí proti rýchlosti a teleso brzdí. A pre záporné rýchlosti naopak. Súradnice zvolíme tak, aby malo teleso v nulovom čase nulovú polohu a nejakú nenulovú rýchlosť v_0. Napíšeme pohybovú rovnicu

$$m\ddot{x} = -\kappa\dot{x} \quad \to \quad \ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}\dot{x} \tag{2.11}$$

a všimneme si kľúčovú vec: táto rovnica sa dá prepísať ako rovnica pre rýchlosť $v = \dot{x}$

$$\dot{v} = -\frac{\kappa}{m} v \ . \tag{2.12}$$

Ide teda o separovateľnú diferenciálnu rovnicu, ktorá nie je nič viac ako integrál. Prepíšeme ju do priateľskejšieho tvaru a dostaneme

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\kappa}{m} dt \quad \to \quad \int \frac{dv}{v} = -\frac{\kappa}{m} \int dt \quad \to \quad \log v = -\frac{\kappa}{m} t + K \quad \to \quad v(t) = Ce^{-\frac{\kappa}{m}t} \ . \tag{2.13}$$

Tu sa stalo niekoľko dôležitých vecí (a jedna dôležitá chyba, ku ktorej sa čoskoro dostaneme; skúste si rozmyslieť, či ju vidíte hneď). V prvom kroku sme viac-menej využili ideu, že ak sa rovnajú prírastky dvoch funkcií, tak sa musia rovnať aj tieto dve funkcie, až na konštantu, a cestou od prírastkov k samotnej funkcii je integrovanie. V druhom kroku sme si potom rozmysleli, že síce nesmieme zabudnúť na integračnú konštantu, ale stačí ju napísať na jednu stranu. Pri tom sme sa prvýkrát stretli s označením prirodzeného logaritmu log namiesto ln. Budeme to robiť v celom texte a desiatkový logaritmus nebudeme potrebovať. A na záver sme si rozmysleli, že e na konštantu je iba iná konštanta.

Ako uvidíme ešte veľakrát, tieto konštanty budeme určovať z počiatočných podmienok. Tie vyžadujú, aby $v(0) = v_0$ a tým pádom dostávame $C = v_0$. Tu sa vrátime ku chybe, ktorú sme pred chvíľou spomenuli. C je vždy kladné číslo, lebo vzniklo ako mocnina iného čísla. Môžeme mať ale aj záporné počiatočné rýchlosti. To sa dá vyriešiť dvomi spôsobmi. Prvý je, že si na začiatku natočíme súradnice tak, aby $v_0 > 0$ a tento problém nemáme. Alebo si uvedomíme, že v integráli (2.13) nám chýba absolútna hodnota, ktorej správna implementácia potom povedie na $|v(t)| = \ldots$ a teda pre záporné počiatočné rýchlosti

$$v(t) = -Ce^{-\frac{\kappa}{m}t} = -|v_0|e^{-\frac{\kappa}{m}t} = v_0 e^{-\frac{\kappa}{m}t} \ . \tag{2.14}$$

Polohu dostaneme ako integrál rýchlosti. Teraz ale nebudeme robiť neurčitý integrál, ale určitý v hraniciach od $t = 0$ po $t = t$, podobne ako v (1.37). Áno, táto posledná rovnica vyzerá divne. Preto premenujeme opäť integračnú premennú na τ a píšeme

$$x(t) = \int_0^t d\tau\, v(\tau) = -\left.\frac{mv_0}{\kappa} e^{-\frac{\kappa}{m}\tau}\right|_{\tau=0}^{t} = \frac{mv_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\frac{\kappa t}{m}}\right) \ . \tag{2.15}$$

Do tohto bola podmienka $x(0) = 0$ nadrátovaná[17]. Ak by sme mali iné x_0, jednoducho by sme ho k integrálu pripočítali.

Nad týmto výsledkom sa oplatí dobre zamyslieť:

- Podľa (2.13) bude mať teleso vždy nenulovú rýchlosť. Ale podľa (2.15) prejde konečnú vzdialenosť. Z praktického hľadiska však môžeme povedať, že teleso zastane v nejakom konečnom čase. Presnejšie povedané, jeho rýchlosť môžeme považovať za nulovú po ubehnutí niekoľkých charakteristických časov m/κ. To je dôsledok veľmi rýchleho exponenciálneho klesania rýchlosti.

- Keď sa pozrieme na vzťah pre prejdenú vzdialenosť (2.15) pre krátke časy, t. j. pre časy oveľa menšie ako m/κ, resp. keď $\kappa t/m \ll 1$, dostaneme

  $$x(t) \approx v_0 t - \frac{1}{2}\frac{\kappa v_0}{m} t^2 \tag{2.16}$$

  a teda rovnomerne spomalený pohyb so zrýchlením daným rýchlosťou v čase $t = 0$. To isté by sme naivne dostali pre malé odpory, ktoré sú charakterizované malou hodnotou κ. Tu je ale problém v tom, že toto je rozmerný parameter a malosť je bezrozmerné tvrdenie. Keď sa pozrieme, aké parametre máme v úlohe k dispozícii, vidíme, že z κ, m a v_0 nič bezrozmerné nevymyslíme.

[17] $x_0 = 0$ môžeme beztrestne zvoliť v prípade, že náš problém má translačnú symetriu.

- Pre veľké časy dostávame
$$x(t \to \infty) \to \frac{m}{\kappa} v_0 \ . \tag{2.17}$$
Ide o charakteristickú rýchlosť problému vynásobenú charakteristickým časom problému. To dáva nutne charakteristickú vzdialenosť problému a v tomto výsledku dostávajú všetky tieto slová lepší fyzikálny zmysel.

Ak ste už niekedy počuli o zmene vzťažnej sústavy, môžete sa pýtať, čo by sa stalo, keby sme sa na problém pozerali v inej sústave. Tu by bol problém v tom, že zväčša je odpor spôsobený nejakým médiom a potom by sa v novej sústave médium pohybovalo a celé by to bolo komplikovanejšie. Ak ste o ničom takom nepočuli, môžete tento odsek smelo ignorovať, text by mal dávať dobrý zmysel aj bez neho.

Kvadratický odpor. Druhý najjednoduchší prípad je odporová sila, ktorá je úmerná štvorcu veľkosti rýchlosti. Nemôžeme ale písať $F \sim -v^2$, pretože tak by sme dostali pre záporné rýchlosti zápornú silu, čo nie je odpor. Budeme teda musieť písať čosi ako

$$F = -\gamma v|v| \tag{2.18}$$

a dávať si ešte väčší pozor na znamienko rýchlosti ako v predchádzajúcej úlohe. Pohybová rovnica

$$m\ddot{x} = -\gamma \dot{x}^2 \tag{2.19}$$

sa rieši rovnakým trikom ako predtým. Separovaním a integrovaním dostávame

$$t = -\frac{m}{\gamma} \int \frac{dv}{v^2} = \frac{m}{\gamma v} + C \tag{2.20}$$

a konštantu opäť určíme z počiatočnej podmienky $v(0) = v_0$

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 \gamma}{m} t} \ . \tag{2.21}$$

Polohu opäť dostaneme integrovaním

$$x(t) = \frac{m}{\gamma} \log\left(1 + \frac{\gamma v_0}{m} t\right) \ . \tag{2.22}$$

Pre malé časy dostaneme $x(t) \approx v_0 t - \frac{v_0^2 \gamma}{2m} t^2$, s presne tou istou logikou ako v prípade lineárnej odporovej sily. Skôr, ako skončíme, si všimneme, že pre $v_0 > 0$ vždy platí $v(t) > 0$ a teda rovnica (2.19) platí pre všetky časy a nemusíme si robiť starosti so znamienkom.

Je dobré všimnúť si dôležitý rozdiel medzi výsledkami pre lineárny a kvadratický odpor. V oboch prípadoch $v(t \to \infty) \to 0$. V prípade lineárneho odporu klesá rýchlosť exponenciálne, v prípade kvadratického odporu ako $1/t$. Prejdená vzdialenosť je v prípade lineárneho odporu konečná, ale v prípade kvadratického odporu sa teleso dostane do nekonečna. Pre veľké rýchlosti je kvadratický odpor oveľa významnejší ako lineárny, pre veľmi malé rýchlosti je to ale naopak! Ak má teleso ϵ-ovú rýchlosť, spraví za malý čas ϵ-ový krok v priestore. Pri lineárnom odpore sa jeho rýchlosť zmení v rovnakom ráde, ale

pri kvadratickom odpore bude zmena o rád menšia a tým pádom oveľa menej významná. Tak teleso bude na záver svojho pohybu robiť síce ϵ-ové kroky, ale kým rýchlosť padne na nulu, spraví ich toľko, že predsa len urazí nekonečnú vzdialenosť.

Po fyzikálnej stránke je rozdiel v pôvode takýchto odporových síl. Sily úmerné v vznikajú v dôsledku trenia medzi prostredím a telesom (viskozity). Sily úmerné v^2 vznikajú v dôsledku nárazov častíc prostredia do telesa a ich urýchľovania, čo odoberá telesu energiu. Príkladmi sú pohyb vo vode a vo vzduchu.

Príklad 2.4. V lineárne odporovom prostredí pôsobí na teleso konštantná sila, pre konkrétnosť nech je to gravitačná sila $-mg$. Z podlahy ho hodíme nahor rýchlosťou v_0. Vyšetrite pohyb telesa. Do akej maximálnej výšky sa teleso dostane? Ako dlho mu to bude trvať? Za aký čas teleso dopadne naspäť na zem? □

Riešenie. Tu sa oproti situácii v rovnici (2.11) veľa nemení. Pohybová rovnica, ktorú dostávame, je

$$m\ddot{x} = -\kappa\dot{x} - mg \;\Rightarrow\; \dot{v} = -\frac{\kappa}{m}v - g \tag{2.23}$$

a jej integrovanie nám dá

$$v(t) = -\frac{mg}{\kappa} + Ce^{-\frac{\kappa}{m}t} \ . \tag{2.24}$$

Z počiatočnej podmienky potom dostaneme $C = v_0 + \frac{mg}{\kappa}$ a teda

$$v = v_0 e^{-\kappa t/m} - \frac{mg}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right) = \left(v_0 + \frac{mg}{\kappa}\right)e^{-\kappa t/m} - \frac{mg}{\kappa} \ . \tag{2.25}$$

Všimneme si, že v limite $t \to \infty$ je rýchlosť $-mg/\kappa$ a to sa dalo čakať, lebo pri takejto rýchlosti nastane rovnováha síl a platí $\ddot{x} = 0$.

Tento výsledok integrujeme, aby sme dostali polohu a po zarátaní počiatočnej podmienky máme záverečný výsledok

$$x(t) = \frac{mv_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right) - \frac{mg}{\kappa}\left(t - \frac{m}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right)\right) = \left(\frac{mv_0}{\kappa} + \frac{m^2 g}{\kappa^2}\right)\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right) - \frac{mg}{\kappa}t \ . \tag{2.26}$$

Teleso bude najvyššie v momente, keď bude mať nulovú rýchlosť, a z podmienky $v(T) = 0$ dostaneme čas T, v ktorom sa to stane

$$T = \frac{m}{\kappa}\log\left(1 + \frac{\kappa v_0}{mg}\right) \ . \tag{2.27}$$

Všimnite si, ako sa nám tu prirodzene objavil bezrozmerný parameter $\frac{\kappa v_0}{mg}$. Ale hľadaný čas T ostáva bezrozmerným násobkom $\frac{m}{\kappa}$, napriek tomu, že úloha má ďalšiu veličinu s rozmerom času, $\frac{v_0}{g}$.

Najvyššia dosiahnutá výška je

$$H = x(T) = \frac{m}{\kappa}\left[v_0 - \frac{mg}{\kappa}\log\left(1 + \frac{\kappa v_0}{mg}\right)\right] \ . \tag{2.28}$$

Keď sa pozrieme na to, ako sa tento výsledok správa pre malé hodnoty parametra $\kappa v_0/mg$, a teda pre počiatočnú odporovú silu oveľa menšiu ako tiažovú, dostaneme

$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^3\kappa}{3mg^2} + \dots \ , \tag{2.29}$$

v zhode s tým, čo by sme čakali.

Keď chceme určiť čas T', za ktorý teleso dopadne naspäť na zem, potrebujeme vyriešiť $x(T') = 0$. To je ale transcendentná rovnica, ktorej riešenie sa nedá zapísať pomocou elementárnych funkcií.[18] ■

2.2.3 Potenciálové sily

V postupnosti komplikovanejších problémov budeme študovať sily, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{2.30}$$

pre nejakú funkciu polohy $V(x)$. Takéto sily sa vyskytujú veľmi často a dobre sa s nimi pracuje. A ako uvidíme čoskoro, dôvodom je, že pri pohybe pod ich pôsobením sa zachováva energia.

Ak poznáme pôsobiacu silu, môžeme funkciu $V(x)$, ktorej sa hovorí potenciál, nájsť integrovaním

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} d\xi F(\xi) \ , \tag{2.31}$$

pričom referenčná poloha x_0 určuje, kde je hodnota potenciálu nulová. Túto polohu môžeme zvoliť ľubovoľne a dva potenciály, ktoré sa líšia len o konštantu, dávajú to isté silové pole. Pohybová rovnica, ktorú potrebujeme riešiť, je potom

$$m\ddot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = 0 \ . \tag{2.32}$$

Príklad 2.5. Ako vyzerá potenciál pre homogénne gravitačné pole, t. j. pre silu, ktorá má v každom mieste hodnotu $F(x) = -mg$? □

Riešenie. Použijeme vzťah (2.31) a dostaneme

$$V(x) = \int_{x_0}^{x} d\xi \, mg = mg(x - x_0) \ . \tag{2.33}$$

Nulový potenciál je v mieste $x = x_0$, kde sa zväčša volí počiatok súradníc, čím pre homogénne pole dostaneme $V(x) = mgx$. ■

Príklad 2.6. Ako vyzerá potenciál pre matematické kyvadlo, t. j. pre teleso viazané na kružnicu polomeru l v gravitačnom poli z príkladu 2.5? □

Návod. Toto je trochu predbiehanie, lebo ide vlastne o dvojrozmerný problém s väzbou. Ale verím, že sa z toho dajak vysomárite. ■

Zákon zachovania energie. Zatiaľ bez väčšej motivácie poďme študovať výraz

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) \ , \tag{2.34}$$

[18] Ak máte skúsenosti s poruchovými výpočtami, môžete ju skúsiť vyriešiť takto a zistiť, ako ďaleko sa dostanete. Presné riešenie sa dá zapísať pomocou takzvanej Lambertovej W funkcie.

ktorému budeme hovoriť energia a jeho prvej polovici kinetická energia. Zaujímať nás bude, ako sa táto veličina – ide o fyzikálnu veličinu[19] v zmysle časti 1 – bude meniť v čase. Počítame

$$\dot{E} = \frac{1}{2} m\, 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\left(m\ddot{x} + \frac{dV(x)}{dx}\right) = 0 \ , \tag{2.35}$$

kde sme $V(x) \equiv V(x(t))$ derivovali ako zloženú funkciu a v poslednom kroku sme využili platnosť pohybovej rovnice (2.32). Energia sa teda pri pohyboch riadených pohybovou rovnicou nemení a zostáva na hodnote $mv_0^2/2 + V(x_0)$. Mení sa však rozdelenie celého balíka energie medzi potenciálovú a kinetickú časť a keďže kinetická energia nemôže byť záporná, teleso sa nikdy nemôže nachádzať v miestach, kde je potenciál vyšší ako hodnota E.

Zo vzťahu pre potenciál (2.31) vidíme, že súčin sily a (infinitezimálnej) zmeny polohy telesa má interpretáciu úbytku potenciálnej energie, ak sila pôsobí v smere zmeny polohy, a jej prírastku, ak proti nemu. Keďže sa energia zachováva, musí sa presne o túto hodnotu zmeniť kinetická energia telesa. Súčinu Fs sa na strednej škole hovorilo **práca**. My s týmto pojmom pracovať nebudeme a budeme skôr hovoriť o zmenách energie pod vplyvom sily. Povedzme len, že rozdiel medzi týmito dvomi vecami je dôležitý pre sily, ktoré nie sú potenciálové.

Po formálnej stránke existencia zachovávajúcej sa veličiny znižuje rád rovnice, ktorú potrebujeme riešiť, lebo ide o špeciálnu podmienku, ktorú musia riešenia rovnice (2.32) spĺňať. Inak povedané, na rovnicu (2.34) sa dá pozerať ako na rovnicu pre $\dot{x}$, ktorú vieme integrovať a dostaneme

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \ \rightarrow \ dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}} \ \rightarrow \ t = \pm\int dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}} \ . \tag{2.36}$$

Logika druhého vzťahu je jednoducho $t = s/v$. Čo môže byť trochu mätúce, je znamienko $\pm$ v týchto rovniciach. Zachovanie energie nám hovorí čosi o veľkosti rýchlosti, ale nie o jej smere. Takže to, či je rýchlosť kladná alebo záporná, musíme do rovnice vložiť rukou. V druhom vzťahu to znamená toľko, že časový krok dt je vždy kladný, ale priestorový krok dx môže byť kladný alebo záporný podľa toho, ktorým smerom sa teleso hýbe. Aby sme tento rozdiel napravili, niekedy musíme vložiť na pravú stranu znamienko mínus. Tretí vzťah je potom trochu tricky, lebo v rôznych časoch môže byť toto znamienko rôzne. Treba si teda dávať pozor pri jeho používaní, najmä v situáciách, keď je šanca, že sa bude smer pohybu meniť.

Ešte môže byť trochu mätúca forma, v ktorej je posledný z výrazov uvedený. Neurčitý integrál na pravej strane v sebe skrýva konštantu, ktorú musíme nastaviť tak, aby v čase $t = 0$ bola hodnota polohy x_0. Rýchlosť v_0 je potom daná hodnotou energie E. Niekedy je rozumnejšie písať to v tvare určitého integrálu

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} d\xi \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(\xi)\right]}} \ , \tag{2.37}$$

kde sme zmenili označenie integračnej premennej, aby nedochádzalo k zmätkom, a explicitne sme naznačili časovú závislosť polohy x. Oplatí sa dobre si rozmyslieť význam tohto vzťahu a rozdiel medzi ním a (2.36). A k tomu môže pomôcť tento príklad.

[19] Rozmyslite si, že oba sčítance v (2.34) majú rovnaký rozmer.

Príklad 2.7. Za aký čas dopadne teleso voľne pustené z veľkej výšky H na planétu hmotnosti M a polomeru R v jej gravitačnom poli? □

Riešenie. Zvolíme si stred súradnicovej sústavy v strede planéty a polohu telesa označíme x. Potenciálna energia v gravitačnom poli planéty je $V(x) = -\frac{GMm}{x}$.

Na výpočet času pádu použijeme vzťah (2.37). Keďže teleso padá k planéte, jeho poloha x sa zmenšuje a rýchlosť $\dot{x}$ je záporná. Musíme preto zvoliť záporné znamienko pred odmocninou:

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}} \ . \tag{2.38}$$

Čas dopadu T získame integráciou od počiatočnej polohy $x_0 = R + H$ po konečnú polohu na povrchu $x = R$:

$$\begin{aligned} T &= \int_{R+H}^{R} \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2}{m}\left(-\frac{GMm}{R+H} - \left(-\frac{GMm}{x}\right)\right)}} = \int_{R}^{R+H} \frac{dx}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R+H}\right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{(H+R)^3}{2GM}} \int_{R/(R+H)}^{1} d\xi \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \ . \end{aligned} \tag{2.39}$$

To je výsledok v tvare súčinu charakteristického času úlohy a funkcie bezrozmerného parametra.

Tento integrál sa dá vyriešiť substitúciou $\xi = \cos^2\theta$, ktorá ho po úpravách prevedie na integrovanie goniometrických funkcií. Výsledný čas dopadu je:

$$T = \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2GM}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{H}{R+H}} + \sqrt{\frac{HR}{(R+H)^2}} \right) \ . \tag{2.40}$$

Aká časť tohto výsledku sa dala odhadnúť rozmerovou analýzou? Aké rozumné priblíženia vieme v tomto vzťahu spraviť a ako vtedy vyzerá výsledok?

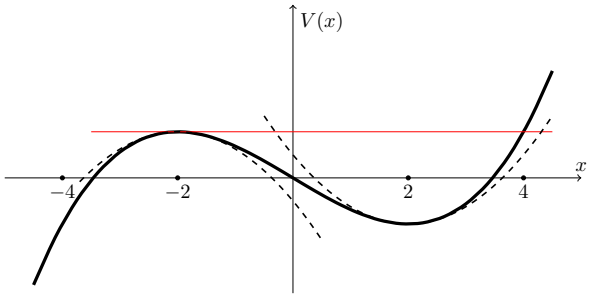
K rovnakému integrálu a výsledku sa neskôr prepracujeme aj pomocou Keplerových zákonov. ■

Fázové portréty. Predtým, ako sa pustíme do analyzovania konkrétnych potenciálov, poďme sa pozrieť na to, čo vieme povedať o pohyboch vo všeobecnom potenciáli. Nebudú nás zaujímať konkrétne detaily pohybu, ale jeho kvalitatívne charakteristiky. Zastaví sa pohyb telesa? Bude sa pohybovať periodicky, utečie do nekonečna? Kedy sa bude pohybovať rýchlo a kedy pomaly? Pre aké počiatočné podmienky budú pohyby viac-menej podobné a pre ktoré sa budú kvalitatívne odlišovať?

Začneme teda tým, že sa budeme pozerať na rôzne počiatočné podmienky v danom potenciáli. A na úplný začiatok budeme vždy brať počiatočnú rýchlosť nulovú, t. j. teleso kdesi voľne položíme a budeme sledovať, čo sa s ním deje. A pre konkrétnosť si zoberme na úvod potenciál

$$V(x) = Ax(x^2 - 12) \ , \tag{2.41}$$

s predpokladom vhodne rozmerného $A > 0$.



Obr. 1: Čierna čiara je potenciál $V(x) = Ax(x^2 - 12)$, pre ktorý $V'(x) = 3Ax^2 - 12A$, červená je hodnota potenciálu v lokálnom maxime $x = -2$ a sivé čiarkované čiary sú paraboly Taylorovho rozvoja do druhého rádu v okolí lokálnych extrémov. Význam všetkých týchto čiar sa ukáže za chvíľu.

Obrázok 1 a analógia s gravitačným poľom sú trochu mätúce. Hmotný bod sa pohybuje v jednom rozmere, takže na priamke. Žiadny druhý rozmer, a teda pohyb hore/dole, tu nie je. Najlepšie sa to dá predstaviť tak, že sa na celú situáciu pozeráme zhora a vidíme iba pohyb vo vodorovnom smere.

Položme si teraz takúto otázku. Čo sa bude diať s telesom, keď ho položíme s nulovou rýchlosťou do potenciálu ako na obrázku? Môžete nad tým skúsiť najskôr porozmýšľať samostatne. Kvalitatívne rôzne odpovede sú tieto:

- Ak zvolíme $x_0 < -2$, na teleso bude pôsobiť záporná sila a rozbehne sa smerom doľava. Pri tomto pohybe sa bude sila zväčšovať a teleso bude postupne zrýchľovať a jeho pohyb nič nezastaví.[20]

- Ak teleso položíme na miesto $x_0 = -2$, pôsobí na neho nulová sila a pri nulovej počiatočnej rýchlosti sa nebude hýbať. Ide o rovnovážnu polohu a riešením pohybových rovníc je státie.

- Ak teleso položíme na miesto $x_0 \in (-2, 2)$, pod pôsobením kladnej sily sa rozbehne doprava. S nenulovou rýchlosťou prejde cez bod 2, kde na neho pôsobí nulová sila, ale zotrvačnosťou sa bude pohybovať ďalej. Tam ho už bude spomaľovať záporná sila a postupne zastaví v bode x_1, v ktorom bude mať potenciál rovnakú hodnotu ako v bode x_0.

  Od tohto momentu sa bude pohybovať úplne rovnako ako doteraz, len bude robiť opačné kroky a v každom mieste pri danom dt spraví namiesto pôvodného kroku dx nový krok $-dx$. Pohyb z miesta x_1 do miesta x_0 bude teda vyzerať ako pohyb z x_0 do x_1, len pustený späť v čase. Až kým teleso nedosiahne zas a znovu bod x_0, keď sa celá situácia zresetuje a začne opakovať.

  V tomto prípade bude teda teleso konať periodický pohyb a periódu tohto pohybu by sme vedeli dopočítať zo vzťahu (2.36).

- Ak $x_0 = 2$, na teleso bude opäť pôsobiť nulová sila a teleso zostane stáť. O tom, čím sa táto rovnovážna poloha líši od bodu -2, si povieme nižšie.

[20] Formálne je riešením rovnice pohyb, ktorý dosiahne nekonečnú rýchlosť a nekonečnú vzdialenosť v konečnom čase. Po matematickej stránke by sme potrebovali tento pohyb pre ďalšie časy nejak rozšíriť. Po fyzikálnej stránke podobné nekonečná znamenajú, že náš matematický popis v nejakom momente prestal popisovať skutočnú fyzikálnu situáciu a v skutočnom svete by sa teleso dostalo do režimu, kde už jeho pohyb daný potenciál dobre nepopisuje.

- Pre počiatočné polohy medzi 2 a 4 sa opakuje situácia s $x_0 \in (-2, 2)$, len so začiatkom v inej fáze periodického pohybu.

- V tomto momente by sme už mohli byť dosť zruční na to, aby sme pohyby s $x_0 > 4$ zvládli ako jednohubku. Záporná sila smerom doľava bude teleso zrýchľovať až do bodu $x = 2$, odkiaľ sa bude pohybovať stále doľava, ale bude spomaľované kladnou silou. Bude však mať priveľa energie a do bodu -2 sa dostane so zápornou rýchlosťou, prejde cez tento bod a bude pokračovať v zápornom smere urýchľované zápornou silou.

- Ostáva si rozmyslieť, čo sa udeje v prípade, keď $x_0 = 4$. Až do bezprostredného okolia bodu $x = -2$ to bude vyzerať rovnako ako v predchádzajúcom bode. Ale s tým, ako sa bude teleso k -2-ke približovať, bude spomaľovať a podľa zákona zachovania energie (2.34) by malo mať presne v tomto bode nulovú rýchlosť. Príklad 2.25 to od vás bude chcieť dokázať poriadnejšie, ale aj neporiadne na prstoch sa dá uvidieť, že pohyb telesa do bodu -2 v tomto prípade potrvá nekonečný čas.

  Dôkaz pôjde sporom. Predpokladajme, že to konečný čas potrvá. Od tohto momentu bude teleso stále stáť v tomto bode podobne ako v situácii s $x_0 = -2$. Na tom je ale čosi super zvláštne. Ako môžu dva pohyby s rôznymi počiatočnými podmienkami vyzerať takto rovnako? Ak by sme sa na obrázky filmu týchto dvoch pohybov pozerali v opačnom smere – čas by sme nechali bežať opačným smerom – dlho by vyzerali rovnako, až by sa v jednom momente v jednom prípade teleso rozbehlo a druhé zostalo stáť. To je v rozpore s jednoznačnosťou riešenia diferenciálnych rovníc a tým pádom predpoklad nemôže byť správny. Teleso sa z bodu 4 do bodu -2 nemôže dostať za konečný čas.

Mohli by sme sa podobným spôsobom zamyslieť nad tým, čo sa deje s pohybmi, ktoré nemajú nulovú počiatočnú rýchlosť, ale k tomu sa dostaneme trochu inak, a oveľa elegantnejšie, o chvíľu pomocou fázového portrétu. Poďme si ale najskôr zdôrazniť intuitívny a dôležitý rozdiel medzi bodom -2 a 2.

Keď si posvietime na Taylorov rozvoj potenciálu v okolí týchto bodov, dostaneme

$$\begin{aligned} V(x) &= V(2) + \left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=2} (x-2) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=2} (x-2)^2 + \dots \\ &\approx -16A + 6A(x-2)^2 \,, \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= V(-2) + \left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=-2} (x+2) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=-2} (x+2)^2 + \dots \\ &\approx 16A - 6A(x+2)^2 \,. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Pre x blízko týchto bodov môžeme teda nahradiť potenciál parabolou, ktorá v lokálnom minime smeruje nahor a v lokálnom maxime nadol. V lokálnom minime bude teda pri vychýlení telesa z rovnovážnej polohy pôsobiť sila smerom naspäť[21] a pohyb telesa bude pre malé výchylky viazaný na okolie

[21] Pre silu dostávame $F = -V' = -12A(x-2)$, čo je záporné pre $x > 2$, t. j. sila doľava a tým pádom smerom k 2, a kladné pre $x < 2$, t. j. sila doprava a opäť smerom k 2.

tohto bodu. V lokálnom maxime pôsobí po malom vychýlení sila preč od pôvodnej polohy a teleso bude utekať preč. Týmto situáciám sa hovorí stabilná, resp. nestabilná rovnováha.

O tom, či parabola, ktorá aproximuje potenciál v okolí lokálneho extrému, smeruje nahor alebo nadol, rozhoduje druhá derivácia. Konkrétne jej znamienko.

Všetky tieto pohyby a rozdiely medzi nimi sa dajú veľmi dobre vizualizovať v rovine (x, p), kde $p = mv$ je hybnosť. Je dobrý dôvod, prečo namiesto rýchlosti uvažovať hybnosť, uvidíme ho v druhom semestri. Zatiaľ je to viac-menej jedno a jediný rozdiel je v preškálovaní hmotnosťou m. Keďže obrázky budeme kresliť iba kvalitatívne, nebude hrať toto preškálovanie žiadnu úlohu.

- Druhý z pohybov je iba státie v mieste $x = -2$, takže v našom diagrame bude reprezentovaný iba bodkou $(-2, 0)$. Rovnako bude bodkou v mieste $(2, 0)$ reprezentovaný "pohyb" s počiatočnou polohou $x_0 = 2$ a nulovou rýchlosťou.

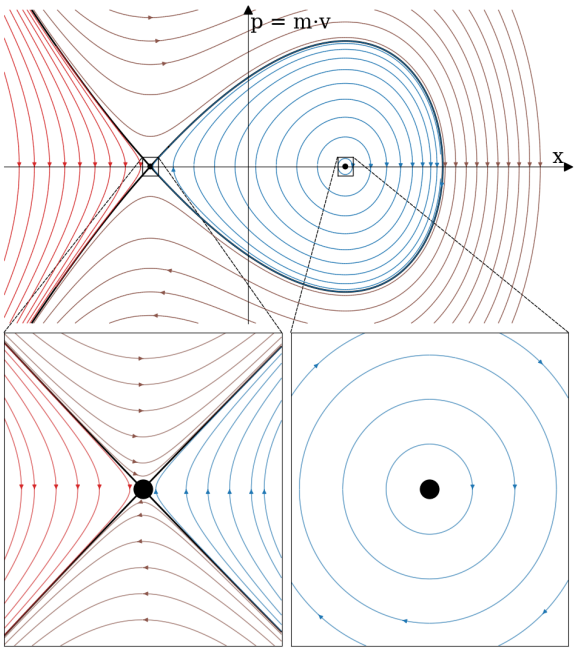
- Ako vyzerá prvý pohyb? Teleso sa z miesta $x_0 < -2$ začne pod pôsobením zápornej sily rozbiehať doľava, jeho poloha aj rýchlosť teda budú naberať čím ďalej zápornejšie hodnoty. Reprezentované to bude čiarou, ktorá štartuje v bode $(x_0, 0)$ a smeruje nadol a doľava. Rozmyslite si, že táto čiara prichádza aj so šípkami, ktoré naznačujú, akým smerom sa teleso po čiare pohybuje v čase.

- Poďme na tretí pohyb. Zo začiatočného bodu $(x_0, 0)$ teleso získava kladnú rýchlosť a jeho súradnica sa zväčšuje, čiara teda bude smerovať nahor a doprava. Pre $x = 2$ teleso dosiahne maximálnu rýchlosť, čiara sa vyrovná a aj keď sa jeho súradnica bude ďalej zväčšovať, rýchlosť už bude klesať a čiara bude smerovať nadol, až v niektorom $x < 4$ pretne x-ovú os. Teleso zastalo a od tohto momentu sa bude vracať späť zápornou rýchlosťou, čiara pôjde nadol a doľava. Opäť dosiahne v lokálnom minime potenciálu najväčšiu veľkosť rýchlosti, čiara sa opäť vyrovná a odtiaľ sa smerom nahor vráti do počiatočného bodu. Aj táto čiara si vďaka parametrizácii časom nesie štruktúru šípok, ktoré smerujú v smere hodinových ručičiek. Rozmyslite si prečo.

- Vráťme sa k prvému pohybu. Vidíme dôležitý rozdiel medzi dvomi druhmi čiar, ktoré zatiaľ máme nakreslené. Periodické pohyby sú uzavreté, zatiaľ čo prvá čiara prudko začína v počiatočnom bode. Na to samozrejme nie je žiadny dôvod a aj táto čiara má predĺženie do hornej polovice diagramu. Jedným spôsobom, ako ju získať, je nechať bežať čas v opačnom smere a pozrieť sa, čo sa s telesom, ktoré skončilo v polohe $(x_0, 0)$, dialo v minulosti. Alebo si rozmyslieť, že horná časť čiary musí byť zrkadlovým obrazom tej spodnej.

- Ako vyzerá čiara pre pohyby, ktoré začínajú v $x_0 > 4$, aj s predĺžením do záporných časov, si už skúste rozmyslieť samostatne.

- Čo ale s pohybom, ktorý začína v $x_0 = 4$? Teleso sa začne rozbiehať doľava, čiara pôjde teda nadol. Teleso bude mať najväčšiu rýchlosť, a teda čiara pohybu bude vodorovná, pre $x = 2$, odkiaľ teleso spomaľuje, až v nekonečnom čase zastaví v bode $(-2, 0)$. V šípkach, ktoré reprezentujú parametrizáciu čiary časom t, to vyzerá tak, že sa smerom k tomuto bodu zhusťujú. Ostáva nám ešte predĺžiť tento pohyb do záporných časov, čím opäť dostaneme pohyb, ktorý v zápornom



Obr. 2: Výsledný fázový portrét pre pohyb v potenciáli (2.41).

časovom nekonečne začína v bode[22] $(-2, 0)$. Všimnite si, ako čiara oddeľuje dve oblasti fázového portrétu s kvalitatívne rôznym správaním. Podobné dve čiary budú ešte do bodu $(-2, 0)$ prichádzať zľava a tým je fázový portrét kompletný.

Takto vznikne obrázok, ktorý v sebe zahŕňa všetky možné pohyby, ktoré teleso vie vykonávať. Je to teda dokonanie programu z rovnice (1.1) s explicitným vyobrazením čiar, o ktorých sme rozprávali. Predchádzajúci fázový portrét je na obrázku 2. Jednoducho si v ňom nájdeme bod (x_0, p_0), v ktorom teleso začína v čase $t = 0$, a potom ho už len necháme nasledovať čiaru konštantnej energie. Tieto čiary sa nepretínajú kvôli jednoznačnosti riešenia pohybovej rovnice. Správanie telesa v okolí rovnovážnych bodov je generické a v ľubovoľnom potenciáli to pre lokálne maximum/minimum vyzerá rovnako. Čo je rôzne, je spôsob, akým sú tieto veci pospájané v celom portréte.

O fázových portrétoch by sa dalo rozprávať ešte veľa, toto nám ale bude stačiť, máme pred sebou ešte dlhú cestu. Spomeňme už len, že existujú aj vo viacerých rozmeroch, kde sa už ale nedajú takto jednoducho nakresliť.

Príklad 2.8. Ako vyzerá fázový portrét potenciálu pre konštantnú silu? □

Príklad 2.9. Vyšetrite pohyb v jednorozmernom potenciáli[23]

$$V(x) = V_0 \left[(x/R)^4 - 4(x/R)^3 - 2(x/R)^2 + 12(x/R) - 5 \right] \ . \tag{2.44}$$

To znamená:

[22] Z fyzikálneho hľadiska je samozrejme kladné aj záporné časové nekonečno trochu hlúposť. Korektné tvrdenie by v sebe obsahovalo slová ako "pohyb, ktorý začína ľubovoľne blízko k bodu $(-2, 0)$".

[23] Ako cvičenie tiež určite rozmer všetkých vystupujúcich konštánt.

- Nájdite rovnovážne polohy a vyšetrite ich stabilitu.
- Kvalitatívne charakterizujte možné pohyby pre rôzne hodnoty počiatočnej polohy x_0 v prípade $v(0) = 0$ a načrtnite fázový portrét pre pohyb v tomto potenciáli.

□

Príklad 2.10. Ako by vyzeral všeobecný postup, ako analyzovať akýkoľvek potenciál? □

2.2.4 Harmonický oscilátor

Lineárny harmonický oscilátor (LHO). V tejto časti dôkladnejšie preštudujeme pohyb v okolí lokálneho minima, ako napríklad (2.42). Zatiaľ iba s touto motiváciou. Súradnice zvolíme tak, aby bol extrém v mieste $x = 0$, a zvolíme potenciál tak, aby bol v tomto mieste nulový. Máme teda do činenia s potenciálom

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ , \tag{2.45}$$

kde sme explicitne pridali hmotnosť m a zvyšnou voľbou parametrov sme zdôraznili, že číslo stojace pred x^2 je kladné. Sila pôsobiaca na teleso je potom

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -m\omega^2 x \tag{2.46}$$

a ako sme už raz videli, to znamená kladnú silu pre záporné výchylky a naopak, t. j. silu vracajúcu teleso späť do počiatku. Pohybová rovnica je teda

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{2.47}$$

a jej riešenie nájdeme tipovaním. Vidíme, že riešením je čosi, čo keď dvakrát poderivujeme, dostaneme späť to isté, len vynásobené konštantou. Pritom nám určite napadnú exponenciálne funkcie, a teda riešenie v tvare $x(t) = e^{At}$. Keď toto dosadíme do pohybovej rovnice, dostaneme

$$A^2 = -\omega^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pm i\omega \ . \tag{2.48}$$

Druhý dôležitý poznatok bude, že vďaka linearite rovnice môžeme tieto dve možnosti ľubovoľným spôsobom sčítať a stále dostaneme riešenie. To má teda tvar

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \ , \tag{2.49}$$

kde $C_{1,2}$ sú ľubovoľné konštanty. Týmto tvarom vieme uspokojiť dve počiatočné podmienky pre polohu a rýchlosť v čase $t = 0$, a keďže pre dané počiatočné podmienky môže existovať iba jedno riešenie, lebo fyzika je len jedna, žiadne iné riešenie existovať nemôže.

Keď sa však pozrieme na tvar riešenia (2.49), hneď v ňom vidíme veľký problém. Riešenie môže byť komplexné! A to je vo svete plnom reálnych čísel veľký problém. Ten sa dá vyriešiť dvomi spôsobmi. V prvom prístupe sa jednoducho zoberie iba reálna časť riešenia – získať reálnu časť je lineárna operácia, takže aj reálna časť je riešením požadovanej rovnice – a imaginárna časť nech si robí, čo chce. V druhom

prístupe si uvedomíme, že pre reálne počiatočné podmienky bude riešenie (2.47) tak či tak reálne pre všetky časy t.

Ten istý problém sa ukáže trochu v inom šate, keď si uvedomíme, že konštanty C_1 a C_2 sú komplexné, a teda na ich určenie potrebujeme štyri reálne čísla. Tie máme ale k dispozícii iba dve. Čo teraz? Môžeme povedať, že aj tak potrebujeme určiť iba reálnu časť riešenia a na to nám stačia dve čísla. Alebo môžeme povedať, že máme vlastne štyri reálne počiatočné podmienky, lebo vieme, že $\mathrm{Im}\ x(0) = \mathrm{Im}\ v(0) = 0$.

Vidíme, že po prejdení času $T = 2\pi/\omega$ sa výchylka x dostane späť na tú istú hodnotu. Teleso teda koná periodický pohyb s touto periódou. To znie rozumne, lebo veľká hodnota ω znamená veľké pôsobiace sily, čo znamená rýchlo sa meniaci pohyb, a teda krátku periódu.

Riešenie (2.49) sa dá prepísať aj do dvoch nasledujúcich tvarov, z ktorých už reálnosť vystupujúcich konštánt nejde skryť:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\ , \tag{2.50}$$

$$x(t) = X_0\sin(\omega t + \phi_0)\ . \tag{2.51}$$

Rôzny tvar riešenia je vhodný v rôznych situáciách. Napríklad (2.51) prezrádza, prečo sa hovorí o harmonickom oscilátore – riešením je harmonická funkcia. Rýchlosť telesa je $\dot{x} = X_0\omega\cos(\omega t + \phi_0)$ a teda opäť v maximálnej výchylke má teleso nulovú rýchlosť – s tým sme sa už stretli[24]. Kinetická energia telesa v čase t je

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2}mX_0^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi_0) \tag{2.52}$$

a potenciálna energia v čase t je

$$E_{pot} = V\left(x(t)\right) = \frac{1}{2}mX_0^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi_0)\ . \tag{2.53}$$

V súčte je teda energia

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2X_0^2\ , \tag{2.54}$$

a teda konštantná hodnota rovná potenciálnej energii v maximálnej výchylke. Môžete skúsiť overiť, že to je to isté ako kinetická energia v minime potenciálu.

Ešte si povedzme, že ak by v potenciáli (2.45) bolo záporné znamienko, a teda by sme vyšetrovali správanie okolo lokálneho maxima, riešenie by malo tvar reálnych exponenciál, a teda vo všeobecnosti neohraničené riešenie. To by ale znamenalo, že teleso sa veľmi rýchlo vzdiali od okolia tohto bodu, a tým pádom aproximácia kvadratickým potenciálom prestane byť dobrá. Z riešenia môžeme zistiť, ako dlho sa systém v okolí nestabilných rovnovážnych bodov zdrží, ale inak nemá pre veľké časy veľký praktický význam.

Príklad 2.11. Vypočítajte, akú časť periódy strávi harmonicky oscilujúce teleso viac ako polovicu amplitúdy od rovnovážnej polohy. □

[24] A stretávajú sa s tým žeriavnici/čky, ktorí to využívajú na zastavenie hompáľajúceho sa závažia, alebo artisti/tky v cirkuse pri rôznych trikoch.

Príklad 2.12. Ukážte, že pre zadanú hodnotu energie E je trajektóriou harmonického oscilátora vo fázovom portréte elipsa. □

Príklad 2.13. Vypočítajte periódu kmitov harmonického oscilátora priamo zo zákona zachovania energie. Na to si rozmyslite, že vzťah pre periódu je

$$T = 4\int_0^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(V(x_0) - V(x)\right)}} \ , \ V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \ , \tag{2.55}$$

a integrál vypočítajte. □

Príklad 2.14. Ako sa bude pohybovať harmonický oscilátor, na ktorý pôsobí konštantná sila? Pre jednoznačnosť nech je to gravitačná sila $-mg$. □

Riešenie. Mohli by sme riešiť pohybovú rovnicu

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - mg \ , \tag{2.56}$$

ale ukážeme si efektnejší postup. Potenciál takéhoto pôsobenia je

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + mgx \tag{2.57}$$

a ten sa dá doplnením na úplný štvorec prepísať na

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 (x - x_0)^2 + V_0 \ . \tag{2.58}$$

Je teda hneď jasné, že teleso bude zas kmitať a opäť s rovnakou periódou ako predtým. Jediné, čo sa zmení, je, že konštantná sila zmení polohu miesta, okolo ktorého teleso kmitá.

Minimum potenciálu sa nachádza v mieste, kde je nulová derivácia, a teda

$$-m\omega^2 x_0 - mg = 0 \ \Rightarrow \ x_0 = -\frac{g}{\omega^2} \ , \tag{2.59}$$

čo nás privádza k riešeniu

$$x(t) = -\frac{g}{\omega^2} + X_0 \sin\left(\omega t + \phi_0\right) \ . \tag{2.60}$$

■

Skôr, ako sa pustíme ďalej, si ešte povedzme, že najčastejším modelom lineárneho harmonického oscilátora je **pružina**. To je dlhý natočený drôt, ktorého malé deformácie spôsobujú, že sa drôt chce vrátiť do pôvodnej polohy a pôsobí proti deformácii silou $F = -k\Delta x$, kde k je charakteristika pružiny, ktorej sa hovorí tuhosť, a Δx je zmena dĺžky pružiny. Tak dostávame potenciál v tvare $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, a teda pre danú pružinu $\omega = \sqrt{k/m}$. To je čosi, s čím máme trochu skúsenosť – ťažšie telesá na pružinách kmitajú pomalšie a naopak, rovnaké teleso bude kmitať rýchlejšie na tuhšej pružine.

A teraz príde kľúčová veta tejto časti. To, čo sme práve spočítali, je veľmi, ale veľmi dôležité. Dôvody sú dva. V prvom rade je lineárny harmonický oscilátor jeden z mála systémov, ktoré sa dajú úplne dopočítať. Pohybová rovnica (2.47) je dosť jednoduchá na to, aby sme vedeli nájsť jej presné

riešenie. Takých vecí je vo fyzike málo a vždy, keď na nejakú takú narazíme, treba si to pamätať a vážiť si to.

Druhým dôvodom je to, že všetky systémy sú, dostatočne blízko k stabilnej rovnovážnej polohe, veľmi dobre touto rovnicou popísané. A jej riešenie pre ne teda bude, aspoň v nejakom rozumnom priblížení, relevantné. Ak máme teda teleso, ktoré sa pohybuje v malom okolí svojej rovnovážnej polohy, bude vykonávať harmonické kmity s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \ . \tag{2.61}$$

Príklad 2.15. Rozmyslite si, že matematické kyvadlo je dané potenciálom

$$V(x) = mgl\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right) \ . \tag{2.62}$$

Nájdite periódu jeho malých kmitov. □

Riešenie. Pre potenciálnu energiu len prepíšeme potenciál v homogénnom gravitačnom poli pre teleso, ktorého súradnica je viazaná na kružnicu

$$V(z) = mgz = mgl(1 - \cos\theta) = mgl\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right) \ , \tag{2.63}$$

kde x je vodorovná výchylka. Toto teraz derivujeme, minimum označíme x_0 a nájdeme ho[25]

$$\frac{dV}{dx} = \frac{mgx}{\sqrt{l^2 - x^2}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 0 \tag{2.64}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0=0} = \frac{mg}{\sqrt{l^2 - x_0^2}} + x_0^2 mg \frac{1}{(l^2 - x_0^2)^{3/2}} = \frac{mg}{l} \ , \tag{2.65}$$

z čoho a z (2.61) dostaneme pre periódu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mg/l}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{2.66}$$

Tento výsledok sme už raz dostali rozmerovou analýzou (1.15), ale bez faktora 2π. Prípadne sme sa mohli pozrieť na potenciál (2.62) a spraviť rozvoj pre malé x/l a priamo identifikovať parameter ω. ■

Tlmený harmonický oscilátor. Teraz dáme dohromady dve sily, ktoré sme zatiaľ študovali. Pozrieme sa na harmonicky oscilujúce teleso, na ktoré pôsobí odporová sila úmerná rýchlosti. Pohybová rovnica je teda

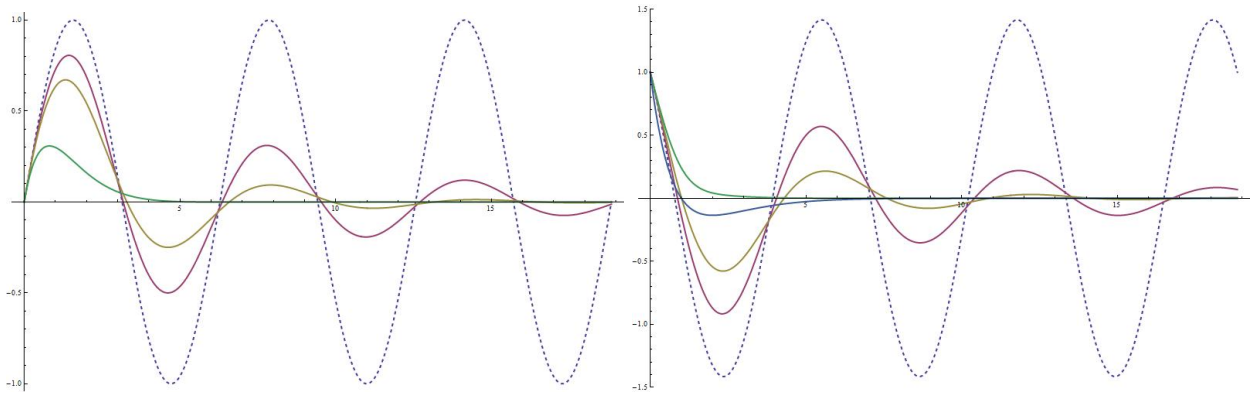
$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - \kappa\dot{x} \tag{2.67}$$

a jej riešenie budeme opäť hľadať v tvare e^{At}. Dostaneme

$$A^2 = -\omega_0^2 - \frac{\kappa}{m}A \ \rightarrow \ A = -\frac{\kappa}{2m} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\kappa}{2m}\right)^2} \ . \tag{2.68}$$

Tu máme tri kvalitatívne rôzne možnosti podľa znamienka výrazu pod odmocninou:

[25] Symbol $\stackrel{!}{=}$ čítaj „má byť rovné“.



Obr. 3: Naľavo priebeh polohy netlmeného, dvoch tlmených a pretlmeného oscilátora pre rovnaké hodnoty ω_0 s $x_0 = 0$ a rôznym v_0. Napravo priebeh polohy netlmeného, dvoch tlmených, pretlmeného a kriticky tlmeného oscilátora pre rovnaké hodnoty ω_0 s $v_0 = 0$ a $x_0 = 1$.

- Ak $\omega_0^2 > \left(\frac{\kappa}{2m}\right)^2$, tak je výraz pod odmocninou kladný a dostávame

$$x(t) = e^{-\frac{\kappa}{2m}t}\left(C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}\right) \tag{2.69}$$

  s označením $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\kappa}{2m}\right)^2}$. Teleso teda vykonáva kmitavý pohyb s o čosi menšou uhlovou frekvenciou ako bez tlmenia a exponenciálne klesajúcou amplitúdou.

- Ak $\omega_0^2 < \left(\frac{\kappa}{2m}\right)^2$, tak je odmocnina imaginárna a dostaneme

$$x(t) = e^{-\frac{\kappa}{2m}t}\left(C_1 e^{Wt} + C_2 e^{-Wt}\right) \tag{2.70}$$

  s označením $W = \sqrt{-\omega_0^2 + \left(\frac{\kappa}{2m}\right)^2}$. Toto je funkcia, ktorá nie je periodická a keďže $W < \frac{\kappa}{2m}$, exponenciálne upadá. Tomuto sa hovorí pretlmený oscilátor.

- V hraničnom prípade $\omega_0^2 = \left(\frac{\kappa}{2m}\right)^2$ nám jedno riešenie chýba. To môžeme nájsť napríklad variáciou konštánt a dostaneme, že všeobecne je riešenie v tvare

$$x(t) = e^{-\frac{\kappa}{2m}t}\left(C_1 + C_2 t\right) \ . \tag{2.71}$$

  Aj tu ide o pohyb bez kmitania, ktorý tiež exponenciálne upadne, a to pri danom ω_0 najrýchlejšie zo všetkých hodnôt tlmenia. Tomuto sa hovorí kriticky tlmený oscilátor.

Priebehy všetkých týchto funkcií pre rôzne hodnoty parametrov sú zobrazené na obrázku 3.

Užitočnosť tohto modelu si ukážeme na príklade ťuknutia do vínového pohára. Ten môžeme modelovať ako tlmený harmonický oscilátor. Ide iba o model, kde potenciálový člen reprezentuje komplikované sily v pohári, ktoré po ťuknutí a vychýlení pohára z rovnováhy spôsobujú jeho vibrovanie. Sila tlmenia modeluje sily, ktoré z tohto vibrovania odoberajú energiu a postupne ho úplne zastavia. Zo vzťahu pre Ω vidíme, že pre silnejšie tlmenie by sme mali dostať kmitanie, a teda aj zvuk, s menšou frekvenciou – hlbší tón. (Poznámka: Pri skutočnom naliatí vody do pohára sa okrem tlmenia navyše výrazne zvýši aj efektívna hmotnosť vibrujúceho systému, čo prispieva k zníženiu frekvencie tónu ešte viac). To sa ľahko

overí napríklad tak, že do pohára nalejeme trochu vody, ktorá bude efektívnejšie odoberať kmitaniu skla energiu ako vzduch. Tiež vidíme, že pre dostatočne veľké tlmenie by kmitanie malo úplne prestať a namiesto sústavného zvuku by sme z pohára mali počuť len jeden dutý zvuk. Ak nebude stačiť voda, môžete skúsiť do pohára nasypať čosi ťažšie, napríklad ryžu.

Budený harmonický oscilátor a rezonancia.

„Porozumieť rezonancii znamená porozumieť fyzike.“

Martin Mojžis

Ako naznačuje motto tejto časti, ide o dôležitú vec ☺. K rovnici tlmeného oscilátora pribudne na pravej strane vonkajšia sila, t. j. budeme riešiť pohybovú rovnicu

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - \kappa\dot{x} + F(t) \ . \tag{2.72}$$

Keďže ide o lineárnu rovnicu, ak je funkcia x_1 riešením pre silu F_1 a funkcia x_2 pre silu F_2, pre silu $F_1 + F_2$ nájdeme riešenie jednoducho ako $x_1 + x_2$. Keďže ľubovoľnú rozumne slušnú funkciu vieme zapísať ako Fourierov integrál[26] $F(t) = \int d\omega \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t}$, budeme vyšetrovať rovnicu pre vonkajšiu silu v tvare $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$. Riešenie budeme hľadať v tvare

$$x(t) = X_0 e^{i\omega t} \ . \tag{2.73}$$

Jeden z dôvodov je, že očakávame, že teleso bude pri svojom pohybe nejak nasledovať budiacu silu. Druhý je taký, že ak nájdeme nejaké riešenie, jednoznačnosť riešenia zabezpečí, že ďalej hľadať nemusíme. Isto ste si všimli, že opäť pracujeme s komplexnými veličinami tam, kde by sme očakávali reálne. S potešením môžeme ale skonštatovať, že ak členy $F_0 e^{i\omega t}$ vyskladajú reálnu silu, aj riešenie bude reálne.

Dosadíme (2.73) do pohybovej rovnice, upravujeme a dostaneme

$$X_0 = \frac{F_0}{m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\kappa\omega}{m}\right]} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\kappa\omega}{m}\right)^2}} e^{-i\phi} \ , \tag{2.74}$$

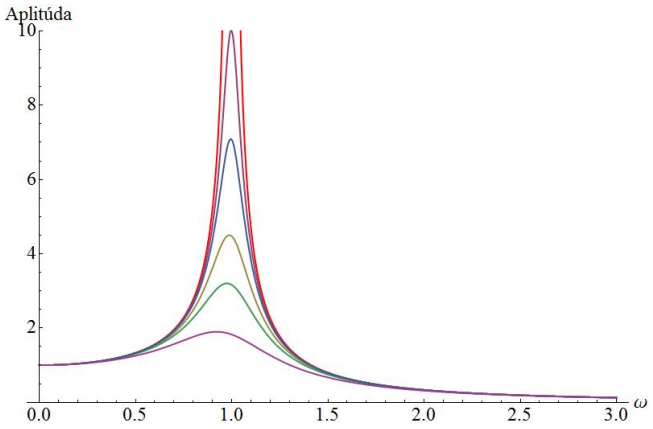
kde sme v druhom kroku prepísali komplexné číslo X_0 v tvare reálnej amplitúdy a komplexnej fázy, ktorá je

$$\tan\phi = \frac{\kappa\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} \ , \tag{2.75}$$

pričom fáza ϕ leží medzi 0 a π (pre $\omega > \omega_0$ je väčšia ako $\pi/2$). Dostali sme teda riešenie, ktoré je periodické s periódou rovnakou ako budiaca sila, ale je oproti nej fázovo posunuté. Keď sa pozrieme na maximálnu výchylku, t. j. veľkosť X_0, ako funkciu frekvencie ω, tak vidíme, že to je funkcia, ktorá má maximum v okolí $\omega \approx \omega_0$. Šírka a výška tohto maxima je daná tlmením κ a pre malé tlmenia je maximum úzke a vysoké, ako na obrázku 4.

Tomuto javu sa hovorí rezonancia. A podobne ako v prípade pohára v predchádzajúcej časti, je toto veľmi dobrý model pre mnoho systémov. Napríklad samotný vínový pohár, o ktorom ste možno

[26] Pre periodické funkcie to bude diskrétna suma, Fourierov rad. Ak toto tvrdenie nepoznáte, skúste ho zobrať ako fakt, prípadne si o ňom čosi pohľadajte.



Obr. 4: Rezonančné krivky pre rôzne hodnoty tlmenia, t. j. maximálna amplitúda z (2.74) ako funkcia ω.

počuli, že sa dá pri troche snahy rozbiť iba zvukom. Vtedy má budiaca sila podobnú frekvenciu, ako je vlastná frekvencia pohára (tak sa hovorí ω_0), a výchylka pohára presiahne medzu jeho pevnosti. Iných príkladov je vo svete ozaj veľa, tu spomeňme ešte dva. Jedným zaujímavým sú extrémne vysoké prílivy v niektorých zálivoch. Tie nastávajú vtedy, keď prirodzené kmitanie vody v zálive (podobne ako vo vani) má rovnakú periódu ako striedanie prílivov a odlivov. Druhým sú niektoré štruktúry v prstencoch Saturnu. Prstence sú tvorené z malých kúskov materiálu a obiehajú okolo planéty. Ak sa nájde mesiac, ktorý má periódu v nejakom rozumne celočíselnom pomere k perióde daného kúsku, svojím postupným gravitačným pôsobením zmení jeho dráhu. Kúsok sa dostane do iných miest, kde už ale bude obiehať s inou periódou a rezonancia sa pokazí. Takto na niektorých miestach vyčistia mesiace prázdny pás a vzniknú niektoré z charakteristických medzier.

Logika toho, čo sa deje, sa najlepšie vidí na príklade hojdačky. Hojdačka je matematické kyvadlo s danou vlastnou frekvenciou. Ak človeka, ktorý sa na hojdačke hojdá, vždy v tom istom bode trajektórie málo postrčím (teda dodám silu nielen v správnej frekvencii, ale aj v správnej fáze), dodám mu energiu a jeho hojdanie bude o čosi výraznejšie. Ak to isté zopakujem o ďalšiu periódu, hojdanie bude ešte výraznejšie. A znova a znova. Rezonancia znamená, že efekt vonkajšej sily sa počas pohybu oscilátora vhodne nasčíta a za veľa períod môže aj malá sila spôsobiť veľký efekt.

Spomínali sme čosi o jednoznačnosti riešenia. V riešení (2.73) ale nie je priestor pre žiadne počiatočné podmienky. Problém je v tom, že toto nie je najvšeobecnejšie možné riešenie – ide len o časť riešenia, ktorú spôsobuje budiaca sila. Ostáva tu stále kmitavé riešenie tlmeného oscilátora a kompletné riešenie je

$$x(t) = e^{-\frac{\kappa}{2m}t}\left(C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}\right) + \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\kappa\omega}{m}\right)^2}} e^{i(\omega t-\phi)}\ , \tag{2.76}$$

prípadne iná verzia, ak je tlmenie príliš silné. Ak ste už počuli slová ako homogénne a partikulárne riešenie, tak toto je presne ono. A týmto vieme splniť akúkoľvek počiatočnú podmienku, máme teda najvšeobecnejšie možné riešenie. A áno, toto riešenie môže byť komplexné. To ale nie je problém, lebo pre reálnu silu $F(t)$ sa komplexné časti vykladajú tak, že dostaneme reálne riešenie. V každom prípade,

nech sa deje, čo sa deje, po dostatočne dlhom čase časť riešenia s počiatočnými podmienkami upadne a ostane nám len budené riešenie.

Príklad 2.16. V prípade $\kappa = 0$ a $\omega = \omega_0$ dáva riešenie (2.76) hlúposti. Skúste sa vrátiť k jeho odvodeniu a rozmyslieť si, kde je problém a ako v takomto prípade úplné riešenie nájsť. Potom skúste nájsť riešenie pre budiacu silu $F_0 \cos(\omega_0 t)$ a počiatočnú podmienku $x(0) = 0, v(0) = v_0$. Potom skúste to isté riešenie nájsť ako limitu $\kappa \to 0$ situácie $\omega = \omega_0$ v (2.76) a pozorujte, čo sa deje. □

Návod. Situácia je tu trochu podobná ako pre kriticky tlmený harmonický oscilátor. ■

2.2.5 Zákon zachovania hybnosti a premenná hmotnosť

Skôr, ako sa pustíme ďalej, musíme ešte splatiť jeden dlh. Pravda je totiž taká, že s pohybovou rovnicou (2.1) je to trochu komplikovanejšie. Nikde v tomto texte to nebude hrať úlohu, ale pre úplnosť to treba spomenúť. Druhý Newtonov zákon presnejšie hovorí, že sila spôsobuje zmenu hybnosti, čo v jednom rozmere znamená

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \ . \tag{2.77}$$

Ak máme jeden hmotný bod s fixovanou hmotnosťou, vedie to na $F = ma$. Ak sa však hmotnosť mení, treba si dávať pozor. K tomu iba jeden príklad a pôjdeme ďalej.

Príklad 2.17. Majme guličku vody, ktorá sa vo vodorovnom smere pohybuje v hmle. Hustota vody je ρ, hustota vody v hmle ρ_0, guličká má počiatočnú rýchlosť v_0 a počiatočnú hmotnosť M. Ako sa bude pohybovať? □

Riešenie. Guličká polomeru R za čas dt prejde dráhu $v(t)dt$ a naberie vodu z objemu $\pi R^2 v(t)dt$. Z $m(t) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ a $dm = \rho_0 \pi R^2 v \, dt$ potom dostaneme

$$dm = \rho_0 \pi \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3} m^{2/3} v dt \ . \tag{2.78}$$

Z Newtonovho zákona dostávame $m\dot{v} + \dot{m}v = 0$, a teda[27]

$$m = \frac{M v_0}{v} \tag{2.79}$$

Z toho dostaneme riešenie, po započítaní počiatočných podmienok

$$m(t) = \left(\frac{4}{3} M v_0 \rho_0 \pi \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3} t + M^{4/3}\right)^{3/4} \tag{2.80}$$

a rýchlosť už priamočiaro z (2.79). Dostali sme teda, že pre veľké časy bude rýchlosť guličky úmerná $t^{-\frac{3}{4}}$. ■

[27] Čo by sme dostali aj zo zákona zachovania hybnosti, ale tieto slová ešte oficiálne nepoznáme.

O čosi komplikovanejšia, ale o to bežnejšia, je situácia, keď sa teleso zbavuje hmotnosti a tým zrýchľuje. Také čosi sa využíva pri raketovom pohone. Raketa hmotnosti M_0 nesie nejaké množstvo paliva m_0, ktoré postupne po infinitezimálnych kúskoch vyhadzuje konštantnou rýchlosťou u vzhľadom na seba. Rovnica je potom $M\dot{v} + \dot{M}u = 0$, kde M je hmotnosť rakety v čase t. Na začiatku $M = M_0 + m_0$, keď sa minie všetko palivo, $M = M_0$. Situáciu si treba trochu rozmyslieť alebo sa o nej viac dočítať kdesi na internetoch. Dôležitý výsledok je potom to, že potrebná hmotnosť paliva exponenciálne rastie s požadovanou finálnou rýchlosťou. Tomu sa dá aj celkom dobre rozumieť, pretože v každej fáze musíme okrem samotnej rakety urýchľovať aj palivo, ktoré bude použité v neskorších fázach pohybu.

Na rovnicu $m\dot{v} + \dot{m}v = 0$ sa dá pozerať ako na rovnicu $m\ddot{x} = -\dot{m}\dot{x}$, a teda na člen za zmenu hmotnosti ako na istú efektívnu silu. Sila je kladná, ak je zmena hmotnosti záporná a pri danom Δm je tým väčšia, čím väčšia je rýchlosť telesa. Ak teda čosi manévruje tým, že sa zbavuje hmotnosti, napríklad družica, je výhodné to robiť pri veľkých rýchlostiach, keď to má najväčší efekt.

Ďalšie úlohy

Príklad 2.18. Voľne padajúce teleso dopadlo na zem za 5 sekúnd. Z akej výšky padalo a akou rýchlosťou dopadlo?

Číselná hodnota tiažového zrýchlenia je približne $g = 10\,m/s^2$. □

Príklad 2.19. Dve telesá sa nachádzajú jedno nad druhým vo vzdialenosti $10\,m$. Horné teleso voľne pustíme a spodné teleso hodíme nahor rýchlosťou $15\,m/s$. Za aký čas a v akej výške sa telesá zrazia?

Číselná hodnota tiažového zrýchlenia je stále približne $g = 10\,m/s^2$. □

Príklad 2.20. Výpočtom nájdite konštanty vo výsledku úlohy 1.24. □

Výsledok.

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{2gH}} - \frac{v_0}{\sqrt{2gH}}\right) . \tag{2.81}$$

■

Príklad 2.21. Teleso vrhneme nahor rýchlosťou v_0 v konštantnom gravitačnom poli s tiažovým zrýchlením $-g$. Na teleso pôsobí odporová sila úmerná štvorcu jeho rýchlosti. Budeme vyšetrovať jeho pohyb:

- Dobre si premyslite znamienko v pohybovej rovnici

  $$m\ddot{x} = -mg - \gamma v^2.$$

  Z tejto pohybovej rovnice nájdite časový priebeh rýchlosti. Do ktorého času bude táto rovnica popisovať náš problém?

- Integrovaním predchádzajúceho výsledku nájdite časový priebeh výšky telesa. Do akej najvyššej výšky sa teleso dostane? Ako sa tento výsledok správa pre malé γ?

□

Príklad 2.22. Dokončenie predchádzajúceho príkladu.

- Napíšte pohybovú rovnicu pre pohyb smerom nadol a vyriešte ju podobným postupom ako v predchádzajúcej časti. V akom čase teleso dopadne? Akou rýchlosťou dopadne?
- Overte, že v oboch prípadoch má teleso v najvyššom bode zrýchlenie $-g$.
- Nakreslite graf funkcie $v(t)$ pre celý pohyb. Porovnajte ho s grafom pre pohyb bez odporu vzduchu.

□

Príklad 2.23. Na teleso hmotnosti m v jednom rozmere, ktoré sa nachádza v oblasti $x > 0$, pôsobí sila

$$F = -G\frac{mM}{x^2} \ . \tag{2.82}$$

Nájdite potenciál, v ktorom sa teleso pohybuje.

Ide o gravitačnú silu. Ukážte, že pre malé vzdialenosti h od zemského povrchu $x = R$ je zákon $V(h) = mgh$ dôsledkom Newtonovho gravitačného zákona. Identifikujte g ako funkciu G, M, R. Nájdite ďalšiu opravu k tomuto zákonu. V akej výške začne byť podstatná? □

Návod. Taylorov rozvoj potenciálu okolo $x = R$. ■

Príklad 2.24. Vyšetrite pohyb v jednorozmernom potenciáli

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{a}{x^6} - \frac{b}{x} \qquad x > 0 \ , \\ V(x) &= mgl\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2}\right) \qquad |x| < l \ , \\ V(x) &= V_0 \frac{x}{R} e^{-x^2/R^2}. \end{aligned}$$

To znamená:

- Nájdite rovnovážne polohy a vyšetrite ich stabilitu.
- Pre stabilné rovnovážne polohy nájdite frekvenciu malých kmitov okolo tejto polohy.
- Kvalitatívne charakterizujte možné pohyby pre rôzne hodnoty počiatočnej polohy x_0 v prípade $v(0) = 0$ a načrtnite fázový portrét pre daný potenciál.

□

Príklad 2.25. Ukážte, že v potenciáli $V(x) = Ax(x^2 - 12)$ je čas, za ktorý prejde teleso s nulovou počiatočnou rýchlosťou z bodu $x = 4$ do bodu $x = -2$, nekonečný. □

Príklad 2.26. Vyjadrite konštanty v riešení pohybových rovníc pre harmonický oscilátor

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \tag{2.83}$$

pomocou počiatočnej polohy a počiatočnej rýchlosti x_0, v_0. Napíšte toto riešenie v tvare

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{2.84}$$

a nájdite vyjadrenie pre A, B cez x_0, v_0. Vyjadrite riešenie v tvare

$$x(t) = X_0\sin(\omega t + \phi_0) \tag{2.85}$$

a nájdite vyjadrenie pre X_0, ϕ_0 cez x_0, v_0.

Ukážte, že pre reálne počiatočné podmienky je riešenie (2.83) vždy reálne. □

Príklad 2.27. Ak považujeme matematické kyvadlo za harmonický oscilátor, priblíženie $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ platí len pre malé výchylky x. Ak je x_0 maximálna výchylka v x-ovom smere, bezrozmerný parameter úlohy je $\xi = x_0/l$ a perióda kmitov má tvar

$$T = f(\xi)\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

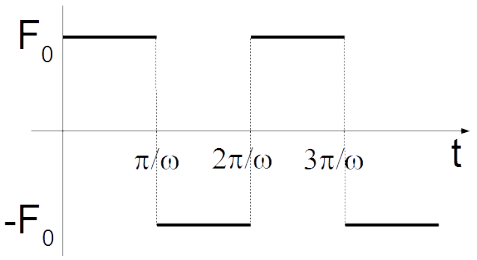
Vieme, že konštantný člen v rozvoji $f(\xi)$ je 2π. Zo vzťahu

$$T = 4\int_0^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(V(x_0) - V(x)\right)}}\ ,$$

s príslušným $V(x)$ pre matematické kyvadlo, nájdite ďalší netriviálny člen tohto rozvoja. □

Príklad 2.28. Ako sa bude pohybovať tlmený harmonický oscilátor pre budiacu silu

- $F = F_0\cos(\omega t)$,
- $F = F_0\cos(\omega t) + F_1\cos(3\omega t)$,
- $F = \begin{cases} F_0 & \text{pre } t \in \left(2k\pi/\omega, (2k+1)\pi/\omega\right) \\ -F_0 & \text{pre } t \in \left((2k+1)\pi/\omega, (2k+2)\pi/\omega\right) \end{cases}$



Tretia sila

Pre aké vlastné frekvencie oscilátora nastane v týchto prípadoch rezonancia? □

Príklad 2.29. Skúste spočítať prípad kvapky z úlohy 2.17, ktorá v hmle padá nadol v gravitačnom poli. □

2.3 Hmotný bod vo viacerých rozmeroch

Od jednorozmerných problémov teraz prejdeme k viacerým rozmerom. Keďže náš svet je trojrozmerný, budú nás zaujímať najmä takéto situácie. Podobne ako v prvej časti bude poloha telesa vektorom, ktorý budeme označovať šípkou $\vec{x}(t)$, ktorého komponenty budú (x, y, z) a budú funkciami času. Občas budeme vynechávať označenie explicitnej časovej závislosti.

Pohybová rovnica bude trojrozmernou verziou tej jednorozmernej, a teda

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \ . \tag{2.86}$$

Asi netreba veľmi vysvetľovať, v čom je to komplikovanejšia situácia ako v jednom rozmere. x-ový komponent sily môže komplikovane závisieť od y-ovej alebo z-ovej súradnice a teraz trojica rovníc bude (môže byť) previazaná. A ako uvidíme, jediné situácie, ktoré budeme vedieť ako-tak dobre popísať, budú tie, kde sa rovnice dajú rozviazať. V skutočnosti teda budeme riešiť opäť iba jednorozmerné problémy, avšak niekoľko pokope.

2.3.1 Konštantná trojrozmerná sila

Postupnosť problémov budeme mať rovnakú ako v predchádzajúcej časti a začneme situáciou s konštantnou silou. Všeobecná konštantná sila má tvar $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ a pohybové rovnice sa v tomto prípade rozpadnú na tri nezávislé rovnice, ktoré sa navzájom nerozprávajú. A teda tri nezávislé rovnomerne zrýchlené pohyby, ktoré sme študovali v príklade 1.28. Tu sa ale dá vhodnou voľbou súradníc zájsť ešte ďalej.

V hre máme tri vektory. Počiatočnú polohu $\vec{x}(0) \equiv \vec{x}_0$, počiatočnú rýchlosť $\dot{\vec{x}}(0) \equiv \vec{v}_0$ a spomínanú silu $\vec{F}$. Môžeme počiatok sústavy súradníc zvoliť tak, aby $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$ a potom môžeme natočiť súradnicové osi tak, aby mala sila iba jeden nenulový komponent, povedzme z-ový a $\vec{F} = (0, 0, F_z)$. Voľnosť, ktorá nám pri tomto výbere ostala, je v otáčaní zvyšných dvoch osí okolo z-ovej osi. Tým sa nám podarí vynulovať jednu, ale nie všeobecne obe komponenty počiatočnej rýchlosti[28].

Tak sa nám podarilo pohyb pod najvšeobecnejšou konštantnou silou výrazne zjednodušiť a zo spomínaných troch rovnomerne zrýchlených pohybov spraviť jeden rovnomerným a druhý státím. Not bad.

Mohli by ste sa spýtať, či by sme tento trik pre premenlivú silu nemohli spraviť "lokálne". To znamená v každom bode natočiť kartézske súradnice tak, aby sila vždy smerovala v smere jednej z osí a pohyb bol jednoducho rovnomerne zrýchlený. Veľa slov tomu nevenujeme, koho to zaujíma, môže si to poriadne premyslieť samostatne a prípadne o tom kdesi čosi viac nájsť. Problém je dvojaký. Naskladať lokálne rovnomerne zrýchlené pohyby do jedného globálneho pohybu je rovnako ťažké, ako vyriešiť pôvodné rovnice. Prípadne keď by sme sa od začiatku chceli pozerať na problém globálne, pohybové rovnice budú predsa len komplikovanejšie, lebo do derivácií by okrem samotnej zmeny polohového vektora vstúpila aj zmena bázových vektorov, v ktorých počítame. V prípade radiálnej sily by sme takto napríklad (znovu)objavili sférické súradnice.

2.3.2 Odporové sily v troch rozmeroch

Ďalším krokom bolo uvažovať o odporových silách. Najskôr lineárny odpor $\vec{F} = -\kappa\dot{\vec{x}}$, kde opäť záporné znamienko zariaďuje smerovanie sily proti vektoru rýchlosti.

Z pohybových rovníc sa stane

$$m\ddot{x} = -\kappa\dot{x} \quad , \quad m\ddot{y} = -\kappa\dot{y} \quad , \quad m\ddot{z} = -\kappa\dot{z} \tag{2.87}$$

[28] Ak nie je jasné, rozmyslieť. Pointa je, že dva všeobecné vektory určujú rovinu.

čo sú zas a znova tri navzájom nepreviazané rovnice, ktoré môžeme riešiť nezávisle a výsledkom sú tri pohyby (2.15). Vhodnou voľbou súradníc vieme ale docieliť, aby bola počiatočná poloha v počiatku a počiatočná rýchlosť bola v smere jednej zo súradnicových osí. Tým ale budú mať pohyby vo zvyšných dvoch smeroch riešenie v tvare státia a celé sa to zmení na jednorozmerný problém.

Ak k tomuto pridáme všeobecnú vonkajšiu silu $\vec{F}(x, y, z)$, tento trik už fungovať nebude. Opäť preto, že všeobecné vektory môžu mať rôzne smery. Ak sú ale komponenty meniacej sily nezávislé – teda x-ová zložka sily nezávisí od toho, kde sa nachádzame v smeroch y a z, rovnako pre ostatné – pohybové rovnice budú aj tak nezávislé. Ak je navyše vonkajšia sila konštantná – ako napríklad v homogénnom gravitačnom poli –, budeme vedieť opäť natočiť súradnice tak, aby mala nenulovú zložku iba v jednom smere a počiatočná rýchlosť iba v dvoch smeroch. Tretí smer teda dá ako riešenie státie, v zvyšných dvoch rozmeroch budeme mať nezávislú kombináciu pohybov z časti 2.2.2.

Zatiaľ sme mali prípady, kde bol trojrozmerný problém vlastne iba tri jednorozmerné vedľa seba a vhodnou voľbou súradníc sa dala časť z nich previesť na triviálne státie alebo rovnomerný priamočiary pohyb. Teraz príde situácia, keď to nebude až také triviálne, a potom situácia, keď sa to už nebude dať vôbec.

Pre kvadratickú odporovú silu môžeme písať $\vec{F} = -\gamma v \vec{v}$, kde sme zaviedli označenie veľkosti vektora písmenom bez šípky[29]. Dostávame teda pohybové rovnice

$$m\ddot{x} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\dot{x} \quad , \quad m\ddot{y} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\dot{y} \quad , \quad m\ddot{z} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\dot{z} \ , \tag{2.88}$$

ktoré sú už plnohodnotne previazané, lebo v rovnici pre x-ovú súradnicu vystupuje aj súradnica y a súradnica z. Or does it?! Totiž, bez iného externého vektora je jediným vektorom v zadaní počiatočná rýchlosť a môžeme natočiť naše súradnice tak, že bude mať nenulovú komponentu iba v jednom smere. Tak bude rýchlosť aj zrýchlenie v ostatných dvoch smeroch nulové a tým pádom sa teleso do týchto smerov nikdy nevyberie a pohyb ostane jednorozmerným.

Keď však ku kvadratickému odporu dáme konštantnú silu, narazíme na problém. Súradnice budeme vedieť natočiť tak, aby mala sila komponentu iba v jednom, štandardne z-ovom, smere a rovnice sú

$$m\ddot{x} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ \dot{x} \quad , \quad m\ddot{y} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ \dot{y} \quad , \quad m\ddot{z} = -mg - \gamma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ \dot{z} \ . \tag{2.89}$$

Voľnosť, ktorá nám ostala, nám už ale dovolí vynulovať iba jednu z dvoch zvyšných komponent počiatočnej rýchlosti a tým pádom bude triviálny iba jeden z x, y pohybov. Konečne sme dostali problém, ktorý je plnohodnotne dvojrozmerný. Jeho historický význam je tiež veľmi dôležitý, lebo sa nedá riešiť analyticky a keďže ide o vojensky dôležitú úlohu pohybu delostreleckých striel, numerické riešenie týchto rovníc bolo významnou motiváciou pre vznik moderných počítačov.

Príklad 2.30. Skúste sa zamyslieť nad tým, ako by pohybové rovnice pre oba prípady odporovej sily vyzerali v prípade, keď fúka vietor konštantnou rýchlosťou $\vec{u}$. Vtedy nie je odporová sila daná priamo rýchlosťou telesa $\vec{v}$, ale relatívnou rýchlosťou $\vec{v} - \vec{u}$. Ktoré z tvrdení v tejto sekcii by platili aj naďalej? □

[29] Všimnite si, že tu ide o plnohodnotné "rovná sa" a nemusíme uvažovať nad znamienkom tak, aby išlo skutočne o odporovú silu.

2.3.3 Potenciály v troch rozmeroch

Potrebujeme vzťah pre potenciálovú silu v jednom rozmere (2.30) zovšeobecniť do rozmerov troch. V prvom rade potenciál bude funkciou troch premenných x, y a z. V druhom rade budeme potrebovať ako výsledok tri komponenty sily F_x, F_y a F_z. A v treťom rade sa tam niekde musia objavovať derivácie. Prirodzeným kandidátom je teda[30]

$$F_x(\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial x}V(\vec{x}) \quad , \quad F_y(\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial y}V(\vec{x}) \quad , \quad F_z(\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial z}V(\vec{x}) \ , \tag{2.90}$$

čo sa dá kompaktnejšie zapísať nasledovne

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}V(\vec{x}), \frac{\partial}{\partial y}V(\vec{x}), \frac{\partial}{\partial z}V(\vec{x})\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V(\vec{x}) \ . \tag{2.91}$$

Štandardne sa potom zavádza označenie

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{\nabla} \tag{2.92}$$

ktoré chce naznačovať, že vektor sily vznikne zo skalárneho potenciálu pôsobením tohto vektora. Hovorí sa mu **nabla** a píšeme

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) \ . \tag{2.93}$$

Tieto vzťahy treba brať ako mnemotechniku a nebrať šípku nad ∇ príliš vážne. Nabla určite nie je elementom niektorého z vektorových priestorov, s ktorými máme do činenia.

V jednom rozmere bola potenciálovosť síl viac-menej istá a pre každú čo len trochu slušnú funkciu potenciál existoval. V troch rozmeroch to tak nebude a aj na prvý pohľad slušné sily budú mať s potenciálovosťou problém. Háčik je v tom, že trojrozmerné vektorové pole $\vec{F}(\vec{x})$ v sebe skrýva tri skalárne funkcie. Podmienka potenciálovosti (2.93) hovorí, že informácia z týchto troch skalárnych funkcií sa dá zakódovať do jednej skalárnej funkcie. A to sa prirodzene nebude dať pre hocijakú trojicu. Potenciálovosť v 3D je oveľa silnejšia podmienka ako v 1D.

Príklad 2.31. Ukážte, že k vektorovému poľu $\vec{F} = (-y, x, 0)$ nemôže existovať potenciál. □

Riešenie. Nech takáto funkcia existuje. Potom z x-ovej rovnice (2.90) dostávame

$$y = \frac{\partial V}{\partial x} \ \Rightarrow \ V = yx + f(y) \ ,$$

kde funkcia f je integračnou "konštantou", ktorú určíme z y-ovej podmienky

$$x = -\frac{\partial V}{\partial y} = -x - f'(y) \ .$$

Táto rovnica ale nemá riešenie, keďže funkcia f nemôže závisieť od x. Preto potenciál k takému silovému poľu neexistuje. ■

[30] Crash course parciálnych derivácií: ide o derivovanie funkcie viacerých premenných tak, že ostatné premenné považujeme za konštantné. Pre $f(x, y) = x^2 y$ teda $\partial f/\partial x = 2xy$ a $\partial f/\partial y = x^2$. Formálne je parciálna derivácia definovaná analógiou obyčajnej derivácie cez

$$f(x + dx, y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}dx \ .$$

Tak ako v jednom rozmere, aj v troch rozmeroch existuje pre pohyb pod pôsobením potenciálových síl zachovávajúca sa veličina. Opäť ide o energiu a jej konštantnosť overíme priamym výpočtom:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}\right) + V(\vec{x}) \ , \tag{2.94}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}\right) + \frac{d}{dt}V(\vec{x}) = \tag{2.95}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = 2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}+2\dot{z}\ddot{z} = 2\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}} \\ \frac{d}{dt}V(\vec{x}) = \frac{d}{dt}V(x(t),y(t),z(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \vec{\nabla}V\cdot\dot{\vec{x}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}m2\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}} + \vec{\nabla}V\cdot\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}\cdot\left[\underbrace{m\ddot{\vec{x}}+\vec{\nabla}V(\vec{x})}_{=0}\right] = 0 \ . \tag{2.96}$$

Teraz by sme chceli dostať trojrozmernú analógiu vzťahu (2.31). V jednom rozmere sme spočítavali prírastky $F\,dx$, čo má prirodzené zovšeobecnenie do 3D v $\vec{F}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$. Máme ale problém v tom, že z bodu $\vec{x}_1$ sa do bodu $\vec{x}_2$ viem dostať mnohými rôznymi spôsobmi. Analóg integrálu (2.31) je teda funkciou celej trajektórie, ktorú označíme $\mathcal{C}$ a počítame

$$W(\vec{x}_1\to\vec{x}_2) = \int_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\dot{\vec{x}}dt = \left[m\ddot{\vec{x}}=\vec{F}\right] =$$

$$= m\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}dt = \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}\right)dt = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}\right)\Big|_{t=t_1}^{t_2} = [E=const] =$$

$$= V(\vec{x}_1) - V(\vec{x}_2) \ . \tag{2.97}$$

Pre $V(\vec{x}_1) > V(\vec{x}_2)$ je táto veličina kladná a kinetická energia telesa sa zvýšila. A naopak pre $V(\vec{x}_1) < V(\vec{x}_2)$.

Čo je ale ešte zaujímavejšie, integrál (2.97) nakoniec pre potenciálovú silu nezávisí od trajektórie $\mathcal{C}$, ale iba od jej koncových bodov. Navyše ak obrátime smer cesty, dostaneme opačnú hodnotu integrálu, čo znamená, že integrál po ľubovoľnej uzavretej krivke $\mathcal{C}$ je nulový,

$$\oint_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{x} = 0 \ . \tag{2.98}$$

Takýmto silovým poliam hovoríme konzervatívne a práve sme teda dokázali, že každá potenciálová sila je konzervatívna. Krúžením dookola sa nedá získať ani stratiť energiu. To napríklad neplatí pre odporové sily, kde pri každom pohybe energiu strácame.

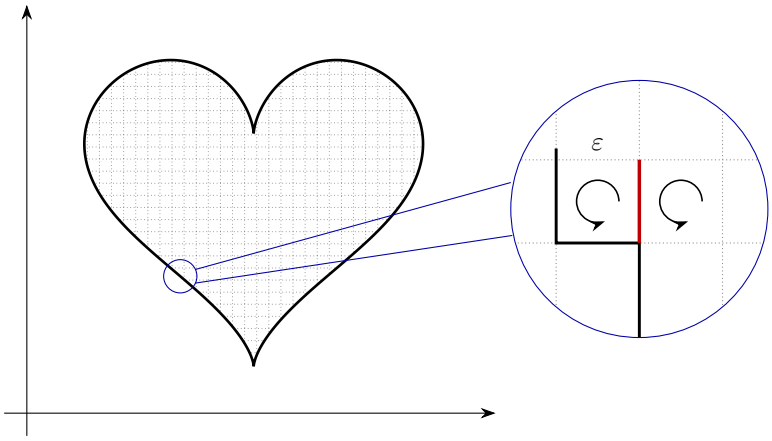
Otázka je, či toto tvrdenie platí aj naopak a či ku každej konzervatívnej sile existuje potenciál. Odpoveď sa ukáže byť kladná a máme

$$\text{sila je potenciálová} \ \Leftrightarrow \ \text{sila je konzervatívna} \ , \tag{2.99}$$

$$\exists V(\vec{x})\ \vec{F} = -\vec{\nabla}V \ \Leftrightarrow \ \forall\mathcal{C}\ \oint_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{x} = 0 \ . \tag{2.100}$$

Dôkaz je trochu technický a môžete ho preskočiť, z neho bude dôležitá hlavne nulovosť rotácie poľa $\vec{F}$ (2.109) ako kritérium potenciálovosti.

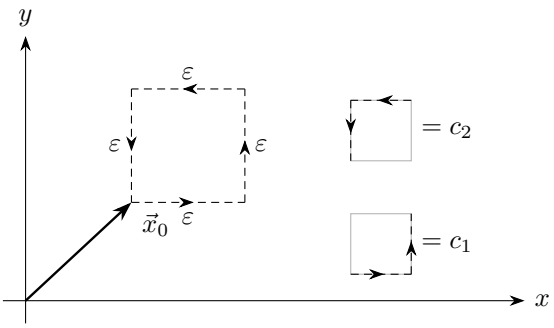
Na dôkaz tvrdenia (2.100) integrál (2.97) explicitne spočítame. Integrál po ľubovoľnej krivke $\mathcal{C}$ môžeme podeliť na integrály po veľmi malých štvorcoch. Za kúsky na hranách dostaneme integrál, kúsky vo vnútri krivky majú vždy dva príspevky v opačnom smere, ktoré sa navzájom vynulujú.



Príspevky po čierno vyznačených hranách v limite $\varepsilon \to 0$ dajú hľadaný integrál, príspevky po červeno vyznačenej hrane sa kvôli opačnej orientácii dvoch štvorcov odčítajú.

Pozrime sa teda na integrál po malom štvorčeku v rovine xy medzi bodmi

$$\vec{x}_0,\ \vec{x}_0 + \varepsilon\hat{x},\ \vec{x}_0 + \varepsilon\hat{x} + \varepsilon\hat{y},\ \vec{x}_0 + \varepsilon\hat{y}, \tag{2.101}$$



Malá štvorcová krivka.

kde opäť striešky znamenajú jednotkové vektory v danom smere. Podľa obrázka si integrál podelíme na dve časti a počítame

$$\int_{c_1} = \varepsilon\vec{F}(\vec{x}_0)\cdot\hat{x} + \varepsilon\vec{F}(\vec{x}_0 + \varepsilon\hat{x})\cdot\hat{y}\ . \tag{2.102}$$

Tu použijeme (do prvého rádu v ε)

$$\vec{F}(\vec{x}_0)\cdot\hat{x} = F_x(\vec{x}_0) \quad , \quad F_y(\vec{x}_0 + \varepsilon\hat{x}) = F_y(\vec{x}_0) + \varepsilon\frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{2.103}$$

a dostaneme

$$\int_{c_1} = \varepsilon F_x(\vec{x}_0) + \varepsilon F_y(\vec{x}_0) + \varepsilon^2\frac{\partial F_y}{\partial x}\ . \tag{2.104}$$

Podobne dostaneme pre druhú časť krivky

$$\int_{c_2} = -\varepsilon F_x(\vec{x}_0) - \varepsilon F_y(\vec{x}_0) - \varepsilon^2\frac{\partial F_x}{\partial y}\ . \tag{2.105}$$

Pre výsledný integrál teda dostávame

$$\oint_{\varepsilon} = \int_{c_1} + \int_{c_2} = \varepsilon^2\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{2.106}$$

Tu zavedieme niekoľko nových označení. Ak symbolicky vypočítame $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ dostaneme [31] pre hodnotu integrálu $\varepsilon^2(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z$. Ak navyše zavedieme vektor, ktorý je kolmý na náš štvorček a jeho veľkosť je rovná obsahu štvorca $d\vec{S} = \varepsilon^2 \hat{z}$, dostaneme

$$\oint_{\varepsilon} = d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \ . \tag{2.107}$$

Rovnaký výsledok by sme dostali, keby sme zvolili štvorec v rovine yz alebo xz. Z malých štvorčekov teraz vyskladáme požadovanú krivku $\mathcal{C}$. Ak nie je rovinná, nevadí, štvorčeky môžeme skladať do priestoru tak, že vytvoria akúsi plochu, ktorá bude na krivke $\mathcal{C}$ natiahnutá ako mydlová blana. Tým dostávame nasledujúci dôležitý vzťah, ktorému sa hovorí Stokesova veta,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \tag{2.108}$$

kde S je ľubovoľná plocha, ktorej hranicou je krivka $\mathcal{C}$. Ak je ľavý integrál nulový pre ľubovoľnú krivku, musí byť pravý integrál nulový identicky a teda musí platiť $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Takémuto pôsobeniu vektora nabla sa hovorí rotácia a niekedy sa označuje rot $\vec{F}$. Ukázali sme teda, že pole je konzervatívne práve vtedy, ak má nulovú rotáciu. Otázka je ešte, či je nulovosť rotácie postačujúcou podmienkou pre existenciu potenciálu.

Tu nám pomôže identita $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0$ pre ľubovoľnú slušnú skalárnu funkciu Φ. Tú ľahko overíme explicitným derivovaním, prípadne sa spoľahneme na mnemotechniku „vektorového súčinu vektora samého so sebou“. Tá opäť a zas hovorí, že všetky potenciálové polia majú nulovú rotáciu. A matematická veta, ktorej dôkaz je už ale skutočne mimo rámca tohto kurzu, hovorí, že až na nejaké topologické obskurity sú takéto polia jediné, pre ktoré to platí, a teda

$$\exists V(\vec{x}) \ \vec{F} = -\vec{\nabla} V \ \Leftrightarrow \ \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \ . \tag{2.109}$$

Ako sme už písali, z tejto diskusie je najdôležitejšia práve táto podmienka. Ak máme k dispozícii silové pole s nenulovou rotáciou, vieme určite, že nie je potenciálové.

Príklad 2.32. Rozmyslite si, že podmienka rot $\vec{F} = 0$ ozaj necháva len jeden komponent $\vec{F}$ nezávislý. □

Riešenie. Podmienka vedie na

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} \tag{2.110}$$

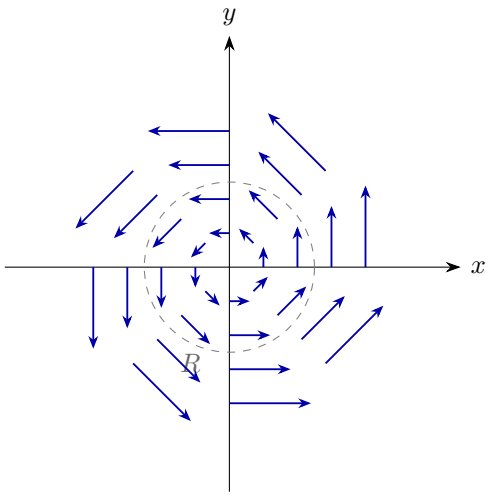
čo necháva iba jeden z komponentov úplne nezávislý. ■

Príklad 2.33. Vypočítajte rotáciu silového poľa z úlohy 2.31. V rovine xy zvoľte ako krivku kružnicu s polomerom R a stredom v počiatku a overte pre ňu platnosť vzťahu (2.108). □

[31] Pripomienka

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} \ .$$

Výsledok. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 2\hat{z}$. Ak silové pole načrtneme



vidíme, že pozdĺž spomínanej kružnice sila teleso vždy urýchľuje. ■

2.3.4 Harmonický oscilátor v troch rozmeroch

V predchádzajúcej časti sme nazvali harmonickým oscilátorom v jednom rozmere teleso, ktoré sa pohybovalo v kvadratickom potenciáli. V troch rozmeroch bude tento názov niesť tiež systém, ktorý bude mať najvšeobecnejší kvadratický potenciál a teda

$$V(x,y,z) = V_0 + \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2 + A_{xy}xy + A_{yz}yz + A_{xz}xz \ . \tag{2.111}$$

Z lineárnej algebry vieme, že toto sa dá zapísať pomocou matice A

$$V(\vec{x}) = V_0 + \frac{1}{2}\vec{x}^T A \vec{x} \ , \tag{2.112}$$

ktorú zvolíme symetrickú[32]. Pohybové rovnice pre takýto systém sú potom

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_x x - A_{xy}y - A_{xz}z \ , \\ m\ddot{y} &= -k_y y - A_{yz}z - A_{xy}x \ , \\ m\ddot{z} &= -k_z z - A_{xz}x - A_{yz}y \ . \end{aligned} \tag{2.113}$$

Ako bolo avizované, ide o sústavu previazaných rovníc a na tomto mieste k jej riešeniu veľa povedať nevieme. V špeciálnom prípade $k_x = k_y = k_z$ a $A_{xy} = A_{yz} = A_{xz} = 0$ budeme vedieť povedať viac v časti o centrálnych pohyboch 2.3.5. O všeobecnom prípade budeme rozprávať v časti o spriahnutých oscilátoroch 3.3, kde sa ukáže – spoiler alert – že sa takáto sústava dá previesť na tri nezávislé jednorozmerné problémy.

Príklad 2.34. Napíšte pohybovú rovnicu pre lineárny harmonický oscilátor v dvoch rozmeroch s potenciálom

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 \tag{2.114}$$

[32]Tu by sa hodila nejaká poznámka o kvadratických formách z algebry. Možno pridať?

a vyriešte ju. Ukážte, že v prípade $\omega_x = \omega_y$ ide o pohyb po elipse a rozmyslite si, že vo všeobecnom prípade ide o komplikovaný pohyb. □

2.3.5 Centrálne potenciály

O centrálnom potenciáli hovoríme vtedy, keď funkcia $V(\vec{x})$ závisí iba od vzdialenosti bodu od počiatku, t. j.[33]

$$V(\vec{x}) = V(r) \ , \ r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ . \tag{2.115}$$

Toto je nutným dôsledkom rotačnej symetrie, keďže r je jediná nezávislá kombinácia súradníc x, y a z, ktorá sa nemení pri rotáciách okolo počiatku. A rotačná symetria je čosi, s čím sa v prírode stretávame veľmi často.

V takomto prípade vieme dopočítať silu ako

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\frac{dV}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) \ . \tag{2.116}$$

Derivácie r vieme spočítať raz a navždy

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{r} \tag{2.117}$$

a dostávame

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec{x}}{r} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \ , \tag{2.118}$$

kde $\hat{r}$ je jednotkový vektor v radiálnom smere. Dostali sme teda, že sila je tiež rotačne symetrická a pôsobí priamo do (alebo von zo) stredu potenciálu.

Zatiaľ bez väčšej motivácie sa pozrime na časovú deriváciu veličiny $\vec{L} = m\,\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$. Počítame a nestačíme sa čudovať

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\,\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + m\,\vec{x} \times \ddot{\vec{x}} = \vec{x} \times \vec{F} = 0 \ . \tag{2.119}$$

Využili sme, že derivovanie vektorového súčinu funguje ako derivovanie iného súčinu – lebo ide len o veľa vhodne zabalených súčinov a teda len rozbalíme, derivujeme a zbalíme. Tiež sme dvakrát použili, že vektorový súčin dvoch rovnobežných vektorov je nulový, pričom raz sme si spomenuli na pohybovú rovnicu (2.86).

Pre ľubovoľný centrálny potenciál sme teda našli zachovávajúcu sa veličinu $\vec{L}$. Táto veta by si možno až zaslúžila výkričník. Tejto veličine sa hovorí moment hybnosti a jej existencia súvisí s rotačnou symetriou problému. Vo všeobecnosti platí súvislosť medzi symetriami a zákonmi zachovania, ale k tomu sa dostaneme až v ďalšom semestri.

Keďže platí $\vec{L} \cdot \vec{x} = 0$, teleso bude vždy viazané na rovinu kolmú na $\vec{L}$. Navyše tiež $\vec{L} \cdot \dot{\vec{x}} = 0$ a teda rýchlosť telesa bude tiež vždy ležať v tejto rovine a teleso nebude mať pokušenie ju opustiť. Z trojrozmerného problému sa teda pre centrálny potenciál stal dvojrozmerný problém.

[33] S trochou podvádzania pri označení, lebo prvé V a druhé V sú iné funkcie.

Keď sa povie rovina a centrálny potenciál, asi nám hneď napadnú polárne súradnice

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ , \tag{2.120}$$

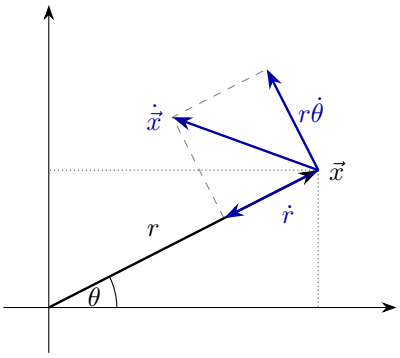
s ktorými sme sa už stretli v časti 1.4. V nich platí $\vec{x} = r\hat{r}$ a bodkovaním tohto dostaneme

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \ , \ \ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \ , \tag{2.121}$$

kde

$$\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta) \text{ a } \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{2.122}$$

sú jednotkové vektory postupne v radiálnom a v uhlovom smere.



Poloha a rýchlosť v polárnych súradniciach.

Príklad 2.35. Odvoďte vzťahy (2.121). □

Príklad 2.36. Spomeňte si na príklad 1.30, v ktorom sa kinematicky popisoval pohyb po kružnici v kartézskych súradniciach. Popíšte teraz rovnomerný a premenný pohyb po kružnici, teda nájdite jeho rýchlosť a zrýchlenie, v polárnych súradniciach. □

Pohybová rovnica (2.86) je potom priamočiaro

$$(m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2)\hat{r} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \ , \tag{2.123}$$

čo sa rozpadne po zložkách na dve skalárne rovnice

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{dV}{dr} \ , \tag{2.124}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \ . \tag{2.125}$$

Druhú rovnicu s kusom kumštu prepíšeme na

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \ . \tag{2.126}$$

Ešte sme ale neskončili. Všimneme si, že pre veľkosť vektora $\vec{L}$ dostávame $L = mr^2\dot{\theta}$, čo znamená, že táto rovnica je dôsledkom zákona zachovania (2.119). To ale použijeme v rovnici (2.124), ktorá prejde na tvar

$$m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr}\left(V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}\right) = -\frac{d}{dr}V_{eff} \ . \tag{2.127}$$

A tu sa už môžeme zastaviť a zamyslieť.

Ide o rovnicu pre pohyb telesa v jednom (!!!) rozmere. To sa ale nepohybuje iba v pôvodnom potenciáli $V(r)$, ale v efektívnom potenciáli, ktorý má okrem toho časť súvisiacu s momentom hybnosti. Vidíme, že táto časť klesá s r a teda teleso "stojí energiu" byť blízko pri počiatku. To súvisí s tým, že na zachovanie momentu hybnosti pri malej vzdialenosti od počiatku je potrebná veľká rýchlosť a preto aj veľká kinetická energia[34].

Podarilo sa nám teda problém v troch rozmeroch previesť postupne na dvoj- a potom dokonca iba na jednorozmerný problém. Pohyb (2.127) telesa v efektívnom potenciáli vieme analyzovať metódami predchádzajúcej časti. Tak v princípe vieme získať časový vývoj $r(t)$, z ktorého potom dostaneme pohyb v uhlovej súradnici $\theta(t)$ integrovaním podmienky konštantnosti L.

Príklad 2.37. Vyšetrite pohyb telesa v symetrickom trojrozmernom harmonickom potenciáli $V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$. □

Riešenie. Efektívny potenciál má v tomto prípade jedno minimum

$$r_0 = \sqrt{\frac{L}{\omega_0 m}} \tag{2.128}$$

a teda teleso bude vedieť vykonávať pohyb, pre ktorý $r(t) = const = r_0$. Nejde ale o státie, teleso sa pohybuje, pretože

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr_0^2} \;\Rightarrow\; \theta = \omega_0 t \; . \tag{2.129}$$

Okrem tohto minima sa v potenciáli nič zaujímavé nedeje. Celý efektívny potenciál je jedno veľké minimum, takže ostatné pohyby v súradnici r sú iba hojdania okolo tohto minima. Ak nás zaujíma konkrétny časový priebeh súradníc x a y, je jednoduchšie riešiť túto úlohu priamo v kartézskych súradniciach. ■

Príklad 2.38 (Voľné teleso – obľúbený triviálny prípad. I)**.** Vyriešte úlohu pohybu voľného telesa $V(r) = 0$ ako pohyb v centrálnom potenciáli. □

Návod. Pomôže zvoliť súradnice tak, aby teleso neprechádzalo počiatkom, a natočiť ich tak, aby v čase $t = 0$ bolo k počiatku najbližšie. ■

Riešenie. V tomto prípade nemá efektívny potenciál žiadne extrémy. Ak zvolíme súradnice tak, že v čase $t = 0$ je teleso najbližšie k počiatku, znamená to, že $\dot{r} = 0$ a v efektívnom potenciáli teleso len položíme na počiatočné miesto r_0. Z neho potom teleso postupne zrýchľuje a jeho vzdialenosť od počiatku sa zväčšuje.

Ak sa teleso pohybuje rýchlosťou v_0 a má celkový moment hybnosti veľkosti L, musí platiť $L = mr_0v_0$. Pohybovú rovnicu

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left[\frac{L^2}{2mr^2}\right] = \frac{L^2}{mr^3} \; , \tag{2.130}$$

[34] Veľká uhlová rýchlosť ešte nutne neznamená veľkú kinetickú energiu, lebo do hry vstupuje aj vzdialenosť od počiatku, ktorá je v tomto prípade malá. Keď si to ale premyslíte poriadne, zistíte, že vskutku dostaneme zo zákona zachovania momentu hybnosti veľkú kinetickú energiu.

prepíšeme ako rovnicu pre funkciu $f = r^2$. Motiváciou môže byť to, že odmocnina je čosi, čo po dvoch deriváciách dá $1/(\sqrt{\ })^3$. To dá

$$2f\ddot{f} - \dot{f}^2 = \frac{4L^2}{m^2} \ , \tag{2.131}$$

čo sa zas núka hľadať v tvare kvadratického polynómu $At^2 + Bt + C$. To potom vedie na podmienku

$$4AC - B^2 = \frac{4L^2}{m^2} \ . \tag{2.132}$$

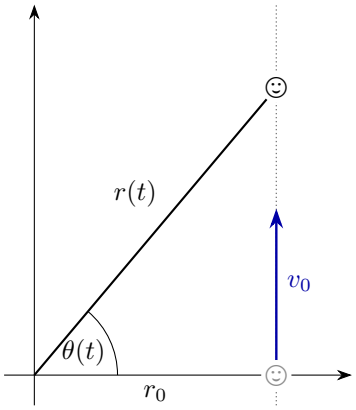
Ostali nám teda dve nezávislé konštanty, ktoré zafixujeme z počiatočných podmienok. Máme $r(0) = \sqrt{C}$ a $\dot{r}(0) = B/(2r_0)$, z čoho dostaneme

$$r(t) = \sqrt{\left(\frac{L}{mv_0}\right)^2 + (tv_0)^2} \ . \tag{2.133}$$

Ak trochu prižmúrime oči, uvidíme priamku so súradnicami $x = r_0$ a $y = tv_0$, presne ako by sme čakali. Keď sa pozrieme na priebeh uhlovej súradnice

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m\left[\left(\frac{L}{mv_0}\right)^2 + (tv_0)^2\right]} \ \Rightarrow \ \theta = \arctan\left(\frac{mv_0^2}{L}t\right) \tag{2.134}$$

a pozrieme sa na tento obrázok



priamka sa už nedá nevidieť. ■

Z predchádzajúcej úlohy plynie ešte jedno poučenie. Pre pohyby, ktoré začínajú v nekonečne rýchlosťou v_0, máme $L = mbv_0$, kde b je vzdialenosť, v ktorej by okolo počiatku prešlo teleso, ak by na neho nepôsobila žiadna sila. A to v prípade ľubovoľnej interakcie. Oplatí sa rozmyslieť si trochu geometriu tejto úvahy, idea je v tom, že vo vektorovom súčine v definícii $\vec{L}$ ide veľkosť vektora $\vec{x}$ do nekonečna, ale uhol medzi vektormi $\vec{x}$ a $\dot{\vec{x}}$ do nuly. Zachovanie L a jeho hodnota v čase najväčšieho priblíženia k počiatku garantuje, že tento súčin je konečný.

2.3.6 Keplerov problém

V tejto kapitole budeme študovať pohyb jedného hmotného bodu pod vplyvom sily, ktorá je úmerná $1/r^2$. Takýto tvar sily je dôležitý, lebo ním je popísaná gravitačná sila. Tá riadi (okrem iného) pohyb planét okolo Slnka, ktorý ľudia študovali už pred tisíckami rokov. Mali teda o nej veľa empirických informácií a ako-tak rozumeli jej pôsobeniu ďaleko predtým, ako ju začali matematicky popisovať.

Predtým, ako sa na pohyb pozrieme ťažkou artilériou z predchádzajúcej časti a odvodíme si presne možné dráhy telesa, pristavme sa najskôr pri troche histórie, ktorá je v tomto prípade obzvlášť zaujímavá, a pri niekoľkých jednoduchších úlohách, ktoré nám pomôžu vniknúť do deja.

Trocha histórie a Keplerove zákony. Ľudia sa od nepamäti dívali na hviezdy. Každá čo len trošku rozvinutá civilizácia si všimla, že medzi obrovským množstvom bodiek, ktoré sa vzhľadom na seba nehýbu, sa nachádza niekoľko takých, ktoré svoju polohu menia. Dnes ich nazývame planéty z gréckeho slova pútnik. Tu vidíme, aká prirodzená je potreba človeka sledovať svet okolo seba a hľadať vo svojich pozorovaniach nejaký význam.

Pohyb planét okolo Slnka riadi gravitačný zákon a teda ľudia tisícročia zbierali informácie o tom, ako táto sila funguje. Vysvetliť sa im to s rôznou mierou neúspechu nedarilo až do sedemnásteho storočia, keď na základe veľmi presných meraní dánskeho astronóma Tycha Braheho nemecký matematik a fyzik Johannes Kepler sformuloval tri zákony pohybu planét okolo Slnka, ktoré dokonale vysvetľovali tieto merania (a celkom prirodzene dokonale predpovedali ďalšie merania). Predtým, ako ich napíšeme, zdôraznime Keplerovu genialitu, keď dokázal na niečo takéto prísť z obrovskej a neprehľadnej (excelovej) tabuľky dátumov a uhlov, pod ktorými vidno planétu. Zákony sú:

- Planéty obiehajú po eliptických dráhach, pričom všetky majú v ohnisku Slnko.
- Časti tejto elipsy, ktoré planéta vykreslí za rovnaké časové úseky, majú rovnakú plochu.
- Veľkosť hlavnej polosi elipsy a perióda obehu pre každú z planét sú také, že pomer a^3/T^2 je rovnaký pre každú planétu.

Prvý zákon bol prelomový preto, lebo dovtedy sa považovalo za absolútne prirodzené, že planéty obiehajú po kružniciach. Druhý z týchto zákonov je vlastne prezlečený zákon zachovania momentu hybnosti. Znamená to, že keď je planéta bližšie k Slnku, musí sa pohybovať rýchlejšie (a keď sa to neskôr presne vyráta, uvidíme, že práve tak rýchlejšie, aby rv_θ bolo konštantné, kde v_θ je uhlová zložka rýchlosti). Tretí zákon je potom priamočiarym dôsledkom prvých dvoch.

Avšak ako bolo sľúbené, predtým, než si tieto zákony odvodíme zo zákona sily a tvaru gravitačnej sily, pozrime sa na vec iba kvalitatívne v jednoduchších úlohách.

Jednoduchší pohľad (na jednoduchšie úlohy). V tejto časti budeme uvažovať gravitačné pôsobenie nehybného telesa hmotnosti M, ktoré sa nachádza v počiatku. Vzťah pre silu je teda

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\ , \tag{2.135}$$

z čoho sme v úlohe 2.23 našli potenciál

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \ . \tag{2.136}$$

Spomeňme si, že pohyb telesa bude v rovine vďaka zákonu zachovania momentu hybnosti, ktorý v polárnych súradniciach vyzerá nasledovne

$$L = mr^2\dot{\theta} \ . \tag{2.137}$$

K dispozícii máme ešte zákon zachovania energie

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \ . \tag{2.138}$$

Konštanty E a L môžeme získať tak, že dosadíme r, $\dot{r}$ a $\dot{\theta}$ v ľubovoľnom čase. Pre každý iný čas musí vyjsť tá istá hodnota. Pomocou týchto dvoch zákonov budeme vedieť vypočítať veľa úloh, ktoré nám pomôžu zorientovať sa v tom, čo to vlastne tá gravitačná sila je a ako funguje.

Najskôr sa budeme zaujímať o to, za akých podmienok teleso opustí planétu.

Príklad 2.39. Máme planétu polomeru R, na povrchu ktorej je teleso hmotnosti m. Akú rýchlosť mu máme udeliť, aby opustilo jej gravitačné pôsobenie? Preštudujte závislosť tejto rýchlosti od jej smeru vzhľadom na povrch planéty. Čo keď teleso neštartuje z povrchu, ale z výšky H nad planétou? □

Riešenie. Ak pošleme teleso v radiálnom smere, $\dot{\theta} = 0$ a $|\dot{\vec{x}}| = \dot{r}$. Pre energiu dostaneme

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{R} \ . \tag{2.139}$$

Teleso bude mať šancu dostať sa do nekonečna, ak bude jeho energia aspoň taká, ako potenciál v nekonečne, a teda minimálna rýchlosť je daná podmienkou $E = 0$.[35] Z toho dostaneme

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \ . \tag{2.140}$$

Hraničnú rýchlosť sme označili dvojkou, o tom, prečo bude reč o pár riadkov nižšie.

Tu sa oplatí pozrieť, ako vyzerá situácia v reči potenciálov. Keďže $L = 0$, skutočný potenciál je aj efektívny a teleso sa jednoducho nachádza v mieste $r = R$ a má rýchlosť v kladnom smere. A táto rýchlosť je taká, že celková energia je presne nula.

Ak pošleme teleso v uhlovom smere, $\dot{r} = 0$ a $|\dot{\vec{x}}| = r\dot{\theta}$, pre energiu dostaneme

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{R} \tag{2.141}$$

a to dá rovnakú hraničnú rýchlosť (2.140). Rýchlosť, ktorú telesu musíme dať, teda nezávisí od smeru, ktorým teleso pošleme.[36] To preto, že do energie nijak nevstupuje smer rýchlosti, ale iba jej veľkosť.

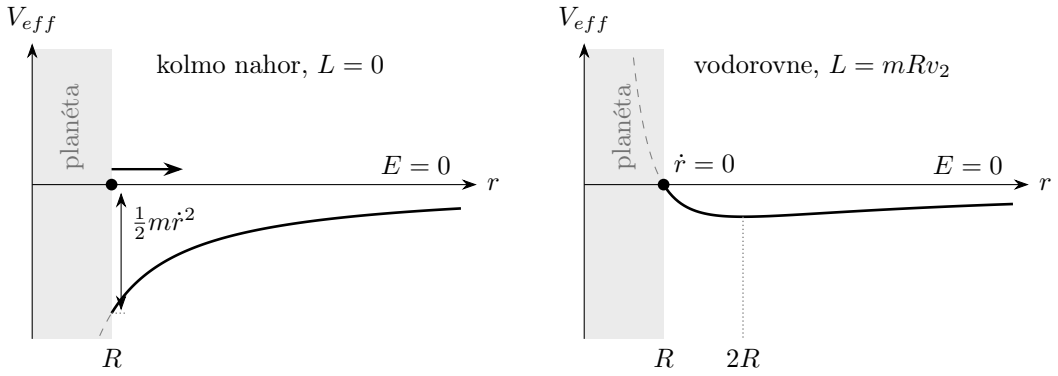
[35] Bude si treba zvyknúť na také čosi ako záporná energia. Nebude to ľahké, lebo sme zvyknutí na kladné energie (napríklad údaje na horalke). Toto je spojené s tým, ako sme zvolili nulový potenciál a že sú miesta, kde je potenciál(na energia) menší(a) ako nula.

[36] Pravda je samozrejme, že sme overili iba dva extrémne smery. Nie je ale ťažké ukázať, že to tak je i v prípade, keď sú $\dot{r}$ aj $\dot{\theta}$ nenulové.

Avšak v druhom prípade bude situácia v reči efektívneho potenciálu vyzerať trochu inak. Keďže $\dot{r} = 0$, teleso do potenciálu iba voľne vkladáme. Musí teda platiť $V_{eff}(R) = 0$. Tiež musí platiť $L = mRv_2$, dostávame teda

$$\frac{(mRv_2)^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} = 0 \ , \tag{2.142}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \ . \tag{2.143}$$



Efektívny potenciál pri výstrele druhou kozmickou rýchlosťou kolmo nahor (vľavo) a vodorovne (vpravo). V oboch prípadoch je $E = 0$. Vľavo je celý rozdiel $E - V_{eff}(R)$ kinetická energia radiálneho pohybu, vpravo je teleso na začiatku v efektívnom potenciáli v pokoji.

Je dobré premyslieť si rozdiel medzi situáciami na obrázkoch. A samozrejme to, že R bol polomer planéty, nehralo žiadnu úlohu a tento vzťah platí v ľubovoľnej vzdialenosti od stredu. ■

Ak má teleso rýchlosť menšiu ako táto, vždy zostane v gravitačnom pôsobení planéty. Zaujímať nás bude, za akých podmienok na ňu nedopadne, ale bude okolo nej krúžiť.

Príklad 2.40. Máme planétu polomeru R, na povrchu ktorej je teleso hmotnosti m. Akú rýchlosť mu máme udeliť v smere rovnobežnom s povrchom planéty, aby obiehalo okolo planéty po kružnici? Čo ak sme vo výške H nad planétou? □

Riešenie. Na úvod si spomeňme na kruhový pohyb z časti 1.4, kde sme zistili, čomu sa musí rovnať sila v takomto prípade. Teraz máme vzťah pre silu, takže môžeme hneď písať

$$\frac{mv_1^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \ \Rightarrow \ v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \ . \tag{2.144}$$

Tiež už ale vieme, že kruhové pohyby sú možné v minime efektívneho potenciálu. Hľadáme teda také L, aby minimum efektívneho potenciálu bolo presne v R. Keďže $L = mRv_1$, dostaneme

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{(mRv_1)^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}\right)\bigg|_{r=R} = -\frac{mv_1^2}{R} + \frac{GMm}{R^2} = 0 \ \Rightarrow \ v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \ . \tag{2.145}$$

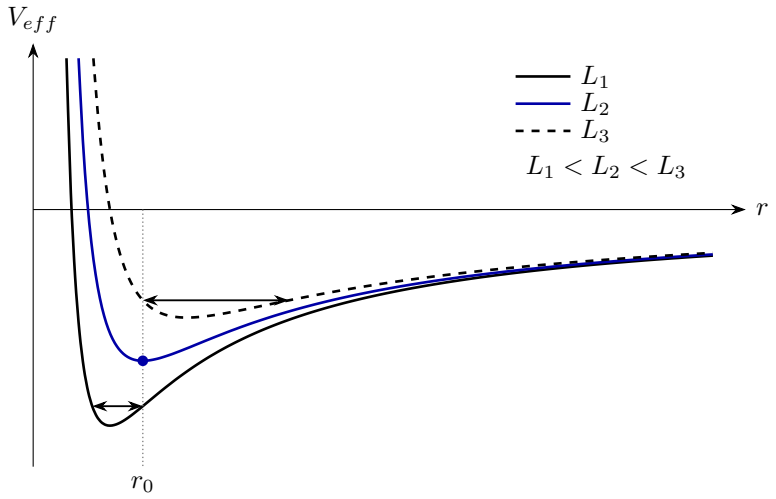
Porozmýšľajte, prečo sme dostali dvakrát tú istú rovnicu (a nie len výsledok). ■

Našli sme podmienku pre kruhovú trajektóriu. Poďme sa pozrieť, čo sa stane, keď bude mať teleso stále iba uhlový smer rýchlosti, ale o čosi viac ako v_1. Potom bude L o čosi väčšie a teda efektívny potenciál o čosi viac zdvihnutý. To znamená, že jeho minimum sa posunie doprava (bude väčšie).[37] Teleso sa ale nachádza v pôvodnom mieste $r = R$ a rozbehne sa teda smerom do minima a teda do väčších polomerov. Od planéty sa vzdiali. Po nejakom čase sa prestane vzďaľovať a vráti sa naspäť.

Podobnou úvahou prídeme na to, že pri počiatočnej rýchlosti menšej ako v_1 sa teleso najskôr priblíži ku stredu. Všetky situácie vidno na obrázku a trajektórie sú naznačené na druhom obrázku.

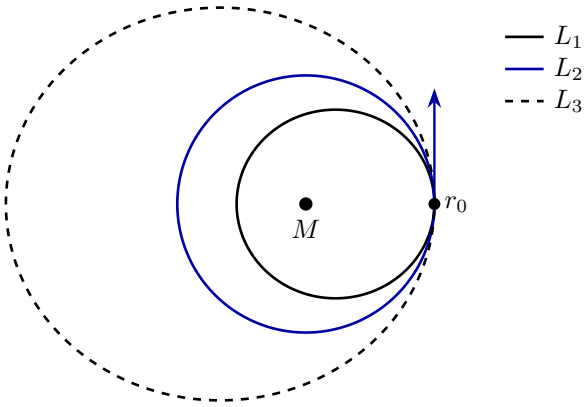
Poslednou otázkou zostáva, čo sa stane, keď teleso bude mať aj nejakú radiálnu rýchlosť $\dot{r} > 0$. Efektívny potenciál sa nezmení a teleso bude v jeho minime. Avšak bude mať nejakú nenulovú rýchlosť a teda sa od minima vzdiali. Pri svojom pohybe späť prejde cez minimum potenciálu a bude pokračovať ďalej a k planéte sa dostane bližšie, ako bolo pôvodne. Skúste si nakresliť, ako bude táto trajektória vyzerať.

Ešte si povedzme, že rýchlosť v_1 sa zvykne nazývať prvou kozmickou a rýchlosť v_2 druhou kozmickou. Preto aj označenie.



Graf troch efektívnych potenciálov pre rôzne hodnoty L, s vyznačeným minimom pre prostrednú hodnotu a trajektóriami s počiatočnou polohou v tomto minime. Na x-ovej osi súradnica r a na y-ovej osi hodnota efektívneho potenciálu.

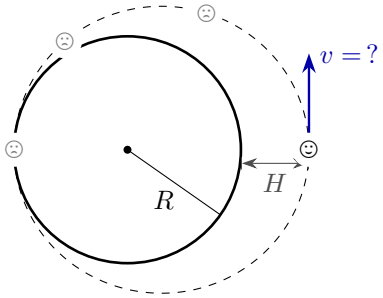
[37] To sa samozrejme dá poriadne dorátať a dostať čierne na bielom, je však dobré vidieť, že stačí aj takáto kvalitatívna predstava.



Tri dráhy pre tri rôzne hodnoty L. Kruhová a veľká elipsa pre väčšie a malá elipsa pre menšie L.

Čo ale, keď teleso nemá dostatok energie a na planétu dopadne?

Príklad 2.41. Z výšky H nad povrchom planéty s polomerom R chceme trafiť bod presne na opačnej strane planéty. Akú rýchlosť máme vodorovne udeliť telesu, ktorým triafame?



□

Riešenie. Úlohu vyriešime hneď tromi spôsobmi.

Najskôr si napíšeme zákony zachovania. Rozmyslíme si, že rýchlosť pri dopade musí byť kolmá na polohový vektor, jej veľkosť nech je u, a potom dostávame zákon zachovania energie v tvare

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+H} = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{R} \tag{2.146}$$

a zákon zachovania momentu hybnosti v tvare

$$mv(R+H) = muR\ . \tag{2.147}$$

Sústavu rovníc hravo vyriešime a dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{GM}{H+R}}\sqrt{\frac{2R}{H+2R}}\ . \tag{2.148}$$

Vidíme, že toto je menšie ako kruhová rýchlosť (2.144), keďže $H > 0$. A to znie rozumne.

V druhom spôsobe sa budeme pozerať iba na efektívny potenciál a pohyb v ňom, t. j. v radiálnom smere. Keďže na začiatku aj na konci pohybu $\dot{r} = 0$, zákon zachovania energie v r hovorí, že $V_{eff}(R+H) = V_{eff}(R)$. Toto je podmienka pre hodnotu L, z ktorej už ľahko dostaneme v. Skúste si

rozmyslieť, ako tento postup kombinuje dva zákony zachovania z predchádzajúceho priamo do jednej podmienky.

Tretí spôsob využíva vedomosť, ktorú ešte nemáme ☺. Konkrétne pre veľkosť hlavnej polosi elipsy, po ktorej sa teleso bude pohybovať (2.178). My chceme, aby platilo $a = R + H/2$. To je rovnica pre celkovú energiu telesa, čo je zas podmienka na v. ■

Príklad 2.42. Za aký čas padne teleso z výšky H na planétu polomeru R a hmotnosti M, ak ho voľne pustíme? □

Riešenie. Zákon zachovania energie nám dá

$$-\frac{GmM}{R+H} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GmM}{r} \ , \tag{2.149}$$

čo prepíšeme na

$$dt = \frac{dr}{-\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{R+H}\right)}} \ . \tag{2.150}$$

Znamienko $-$ sme zvolili preto, že teleso sa približuje k planéte a teda $\dot{r} < 0$, o čom ale zákon zachovania nevie. Rovnicu preintegrujeme od $r = H + R$ po $r = R$, čo dá hľadaný čas

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2GM}}\int_{R+H}^{R} dr \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{H+R}}} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\int_1^{1+\frac{H}{R}} dx \sqrt{\frac{x}{1 - x/\left(1+\frac{H}{R}\right)}} \ . \tag{2.151}$$

Vidíme, že máme výsledok v tvare $T = f(R/H)\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$, ktorý sa dal uhádnuť rozmerovou analýzou. Počítame integrál

$$\int_1^a dx\sqrt{\frac{x}{1-\frac{x}{a}}} = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{1-x/a} \\ du = \dots \end{array}\right] = 2a^{3/2}\int_0^{\sqrt{1-1/a}} du\sqrt{1-u^2} = a^{3/2}\left[\sqrt{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)} + \arcsin\sqrt{1-\frac{1}{a}}\right] \tag{2.152}$$

čo nám dáva výsledok

$$T = \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2GM}}\left[\sqrt{\frac{HR}{(H+R)^2}} + \arcsin\sqrt{\frac{H}{R+H}}\right] \ . \tag{2.153}$$

Keď v tomto spravíme rozvoj pre malé H/R, dostaneme

$$T = \sqrt{\frac{2R^2H}{GM}} + \dots \ , \tag{2.154}$$

čo, keď v kombinácii GM/R^2 spoznáme g, dá výsledok v homogénnom poli (2.5).

Ak naopak spravíme limitu $R \to 0$, dostaneme odpoveď na pálčivú otázku "Za aký čas by spadla Zem do Slnka, ak by zrazu zastala?"

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{H^3}{GM}} \ . \tag{2.155}$$

Na tento výsledok sa dá prísť z tretieho Keplerovho zákona pre veľmi, veľmi úzku elipsu s hlavnou polosou $a = H/2$. Len je potrebné vedieť konštantu v zákone, ktorú ale nie je až také ťažké dopočítať, keď už viete, že pomer a^3/T^2 je konštantný. ■

Príklad 2.43. Do akej výšky vyletí teleso, ak ho z povrchu planéty s polomerom R a hmotnosťou M vyhodíme kolmo nahor prvou kozmickou rýchlosťou? □

Riešenie. Zákon zachovania energie nám vcelku priamočiaro dá výsledok:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{R}}\right)^2 - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{R+H} \,, \tag{2.156}$$

$$H = R \,. \tag{2.157}$$

To je taký milý fyzikálny faktoid, ktorý sa možno oplatí pamätať pre prípad, že od vás bude na party niekto chcieť vedieť niečo zaujímavé[38].

Pre všeobecnú rýchlosť by sme dostali

$$H = \frac{2GM}{\frac{2GM}{R} - v^2} - R \,, \tag{2.158}$$

čo pre $v \ll v_2$ dá

$$H = \frac{1}{2}\frac{R^2}{GM}v^2 \,, \tag{2.159}$$

tak ako má. ■

Príklad 2.44. Ako sa zmení odpoveď na predchádzajúcu otázku, ak sa planéta otáča uhlovou rýchlosťou ω? □

Riešenie. Treba si rozmyslieť, kde je rozdiel oproti minulému prípadu. Okrem radiálnej rýchlosti bude mať teleso aj uhlovú zložku $v_\theta = \omega R$, pretože sa otáča spolu s planétou. A okrem zákona zachovania energie bude v hre aj zákon zachovania momentu hybnosti, takže ak označíme uhlovú zložku rýchlosti telesa v najvyššom bode trajektórie u, dostaneme

$$L = mv_\theta R = m\omega R^2 = mu(H+R) \,, \tag{2.160}$$

$$E = \frac{1}{2}m(v^2 + v_\theta^2) - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{GmM}{H+R} \,. \tag{2.161}$$

Z prvej rovnice vyjadríme u, dosadíme do druhej a dopočítame výsledok pre prvú kozmickú rýchlosť

$$H = \frac{\omega^2 R^4 + \sqrt{G^2M^2R^2 - GM\omega^2R^5 + \omega^4R^8}}{GM - \omega^2R^3} \,. \tag{2.162}$$

To je viac ako R, ako by sme očakávali[39].

Je zaujímavé pozrieť sa na to, ako tento výpočet vyzerá cez efektívny potenciál. Tu je k dispozícii iba zákon zachovania efektívnej energie

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E \,. \tag{2.163}$$

[38] A vy sa budete chcieť toho človeka zbaviť.

[39] Teleso pri svojej ceste nahor kvôli zákonu zachovania momentu hybnosti spomaľuje v uhlovom smere. Stráca teda kinetickú energiu, tá sa ale nemôže stratiť a jediné, na čo sa môže premeniť je potenciálna energia.

Túto rovnicu napíšeme vo výškach R a $R+H$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} + \frac{m^2\omega^2R^4}{2mR^2} = -\frac{GmM}{R+H} + \frac{m^2\omega^2R^4}{2m(R+H)^2} \ . \tag{2.164}$$

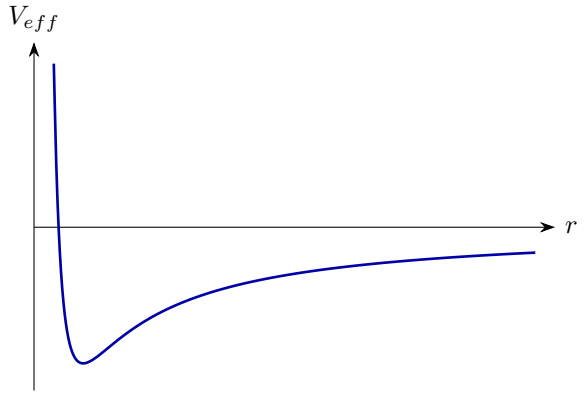
Je zaujímavé sledovať, ako je toto úplne rovnaká rovnica ako zákon zachovania energie (2.161) po dosadení u. ■

Úplné riešenie Keplerovho problému. Potom, ako sme sa zoznámili so základnými vlastnosťami a charakteristikami pohybu v gravitačnom potenciáli, poďme sa pozrieť na poriadne riešenie pohybových rovníc. A na odvodenie Keplerových zákonov z Newtonových.

Pre potenciál gravitačnej sily (2.136) dostávame efektívny potenciál

$$V_{eff} = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \ . \tag{2.165}$$

Pre malé r je podstatný druhý člen, pre veľké r prvý. Funkcia teda nejak interpoluje medzi režimom $1/r^2$ a $-1/r$ a bude mať práve jedno minimum. Kompletne to bude vyzerať nejak takto



Efektívny potenciál (2.165) pre gravitačnú silu.

Pri pohľade na potenciál vieme povedať, že budú existovať pohyby štyroch rôznych druhov. Kruhová trajektória v minime potenciálu, ohraničené trajektórie s $E<0$, pri ktorých bude r oscilovať medzi dvomi extrémnymi hodnotami, neohraničená trajektória s $E=0$, pri ktorej sa teleso síce dostane do nekonečna, ale zastane tam, a neohraničené trajektórie s $E>0$, pri ktorých sa teleso dostane do nekonečna s nenulovou rýchlosťou.

Príklad 2.45. Nakreslite fázový portrét pre pohyb v potenciáli (2.165). □

Hneď na úvod vybalíme hlavnú fintu večera. Motivovaní kružnicovou inverziou sa pozrieme na problém v súradnici $u=1/r$. Tiež sa nebudeme zaujímať o presný časový priebeh súradníc, ale o tvar trajektórie, ktorú teleso kreslí, t. j. o závislosť $r(\theta)$, resp. $u(\theta)$.

S trochou snahy a dobrej vôle dostávame

$$\frac{d}{dr} = \frac{du}{dr}\frac{d}{du} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{du} = -u^2\frac{d}{du} \ , \tag{2.166}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = u^2\frac{L}{m}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta} \ , \tag{2.167}$$

$$\ddot{r} = \ldots = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \ . \tag{2.168}$$

Toto dosadíme do pohybovej rovnice, masírujeme a dostaneme

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{L^2} \ . \tag{2.169}$$

Výsledkom je teda rovnica podobného tvaru ako rovnica pre harmonický oscilátor, s jednotkovou hmotnosťou a uhlovou frekvenciou. Avšak s konštantnou silou na pravej strane. Ale pozor! Oscilátor sa nevyvíja v čase, ale v uhlovej súradnici θ. Keďže $\omega^2 = 1$, pre "periódu" dostávame $T = 2\pi/\omega = 2\pi$. To hovorí, že u bude rovnaká po prejdení uhla 2π, takže po jednej otočke. To zas hovorí, že trajektória je uzavretá.

Riešením rovnice je jednoducho

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2} + A\cos\left(\theta - \theta_0\right) \ , \tag{2.170}$$

kde θ_0 určuje natočenie trajektórie. Ak zvolíme $\theta_0 = 0$, znamená to, že sme natočili súradnice tak, aby bolo teleso najbližšie pri uhle $\theta = 0$.

Riešenie prepíšeme do tvaru

$$r(\theta) = \frac{L^2/(GMm^2)}{1 + \frac{AL^2}{GMm^2}\cos\theta} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon\cos\theta} \ . \tag{2.171}$$

O tom, o aký druh trajektórie ide, bude rozhodovať hodnota parametra ε. Budeme predpokladať, že $\varepsilon > 0$. Z prípadnej zápornej hodnoty by sme vedeli spraviť kladnú posunutím uhla θ.

- Ak $\varepsilon < 1$, potom je menovateľ vždy kladný a naše riešenie dáva zmysel pre všetky hodnoty uhla θ. V tomto prípade $r \in [r_0/(1+\varepsilon), r_0/(1-\varepsilon)]$ a ľahko sa presvedčíme, že ide o elipsu

$$\begin{aligned} r &= r_0 - \varepsilon r\cos\theta \ , \\ x^2 + y^2 &= (r_0 - \varepsilon x)^2 \ , \\ \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \ , \end{aligned} \tag{2.172}$$

  kde

$$x_0 = -\varepsilon a \ , \ a^2 = \frac{r_0^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \ , \ b^2 = \frac{r_0^2}{1-\varepsilon^2} \ . \tag{2.173}$$

  Elipsa ale nemá stred v strede potenciálu, tam je ohnisko, ako vidno z toho, že $|x_0| = \varepsilon a$.

- Ak $\varepsilon > 1$, potom je menovateľ pre niektoré uhly záporný a pre tieto uhly naše riešenie nebude dávať zmysel – teleso ujde do nekonečna skôr. Ak vyriešime rovnicu $\cos\theta_0 = 1/\varepsilon$, potom riešenie nebude existovať pre uhly $\theta \in (\pi - \theta_0, \pi + \theta_0)$. Podobné úpravy ako v prípade elipsy vedú na rovnicu v kartézskych súradniciach

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \tag{2.174}$$

kde

$$x_0 = \varepsilon a \ , \ a^2 = \frac{r_0^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \ , \ b^2 = \frac{r_0^2}{\varepsilon^2 - 1} \ . \tag{2.175}$$

- Prípad $\varepsilon = 1$ je špeciálny, dostaneme rovnicu paraboly

$$y^2 = r_0^2 - 2r_0 x \ . \tag{2.176}$$

Máme teda $r(\theta)$ a z $\dot{\theta} = L/(mr^2)$ vieme v princípe určiť $\theta(t)$, čo zas dá $r(t)$. Explicitne sa to ale nedá a ak chceme vedieť presný časový priebeh dráhy telesa, neostáva nám nič iné ako dopočítať ho numericky alebo približne.

Dosadením riešenia (2.171) do vzťahu pre efektívny potenciál dostaneme hodnotu pre celkovú energiu v závislosti od ε

$$E = \frac{m^3(GM)^2}{2L^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right) \ . \tag{2.177}$$

Vidíme teda, že dostávame zápornú energiu pre elipsu, nulovú pre parabolu a kladnú pre hyperbolu. A to sú tri prípady, o ktorých sme hovorili, keď sme kvalitatívne analyzovali možné trajektórie pre potenciál (2.165).

Príklad 2.46. Odvoďte nasledovné vzťahy pre parametre eliptických dráh

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3(GM)^2}} \ , \ a = -\frac{GMm}{2E} \ , \ r_{min} = a(1 - \varepsilon) \ , \ r_{max} = a(1 + \varepsilon) \ . \tag{2.178}$$

□

Keď už máme toto, vcelku priamočiaro z toho vieme dostať Keplerove zákony.

- Planéty obiehajú po elipsách. To by sme mali.

- Ako sme povedali, toto je dôsledkom zákona zachovania momentu hybnosti

$$\frac{L}{m} = const = r^2\frac{d\theta}{dt} = r\frac{r d\theta}{dt} = 2\frac{dS}{dt} \ , \tag{2.179}$$

kde sme v $r\,(r\,d\theta)$ spoznali dvojnásobok plochy trojuholníka, ktorá sa od plochy, ktorú opíše sprievodič, líši až v druhom d-čkovom ráde. Narastanie plochy je teda konštantné a dokonca sme dostali aj jeho rýchlosť.

- Pre plochu elipsy platí $S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Perióda obehu je $T = S/(L/2m)$. Použijeme vlastnosti elíps (2.178) a dostaneme s veľkou slávou

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \ . \tag{2.180}$$

Tu ešte raz pripomeňme dôležitú históriu. Kepler tieto zákony uhádol z presných astronomických pozorovaní. Newton potom napísal svoje pohybové zákony a zistil, že z nich dostane Keplerove zákony ako dôsledok. To malo dva dôležité dôsledky. V prvom rade na základe toho Newton mohol o čosi silnejšie dôverovať svojim zákonom. V druhom rade tak ukázal, že mechanické deje na Zemi a pohyb planét okolo Slnka riadia tie isté prírodné zákony – zjednotil nebeskú a pozemskú mechaniku. A to bolo prvé veľké zjednotenie vo fyzike.

Keď zoberieme iba jedno teleso, ktoré sa pohybuje v keplerovskom potenciáli, toto je všetko, čo sa môže diať. Pre planétu obiehajúcu okolo Slnka je elipsa ozaj jediný pohyb, ktorý môže vykonávať. A teda všimol si to Kepler. Avšak ako sa postupne merania spresňovali, zistilo sa, že planéty neobiehajú po elipsách, ale ich pohyb je komplikovanejší. Zo začiatku namerané odlišnosti dostatočne vysvetľovalo pôsobenie ostatných planét[40] – o chvíľu o tom ešte budeme písať viac – ale po čase nestačilo už ani to. Anomálie v pohybe Uránu triumfálne vyriešilo predpovedanie novej planéty. Po dopočítaní trajektórie planéty, ktorá by tieto rozdiely vysvetľovala, bola na predpovedanom mieste objavená hneď v prvú (!!!) noc pozorovaní. Dostala meno Neptún. Okrem Uránu robí divné veci aj Merkúr – má neeliptickú dráhu. Bolo teda prirodzené skúsiť vysvetliť tento rozdiel nad pôsobenie ostatných planét existenciou doteraz neobjavenej planéty medzi Slnkom a Merkúrom. Dostala meno Vulkán a napriek množstvu viac či menej planých poplachov sa ju nepodarilo nájsť. Dnes vieme, že medzi Merkúrom a Slnkom nie je žiadne teleso s priemerom väčším ako 6 kilometrov a vysvetlenie záhadného rozdielu bolo triumfom inej teórie, všeobecnej relativity – aj o tomto budeme písať o pár odsekov nižšie.

Ešte spomeňme, že aj Pluto bolo objavené na základe predpovedí z nepravidelností pohybu Uránu a Neptúna. Bola predpovedaná nová Planéta X a dlho sa po nej pátralo. A nakoniec bolo nájdené Pluto. Najskôr z toho bol tiež veľký triumf, ale ako sa postupne spresňovali merania, Pluto sa ukázalo byť príliš malé na to, aby vysvetlilo tieto rozdiely. Rozuzlenie prišlo, až keď sonda Voyager 2 odmerala presnejšie hmotnosť Neptúna a zistilo sa, že polpercentný rozdiel zrazu zaradil dráhu Uránu a Neptúna naspäť do normálu. Pluto teda bolo objavené náhodou a je otázne, ako dlho by na svoj objav čakalo, keby sme hmotnosť Neptúna vedeli presne od začiatku.

Pre uzavretosť eliptických dráh bolo kľúčové, že pri u v rovnici (2.169) stála jednotka. Ak by však potenciál obsahoval člen úmerný r^{-2}, toto by sa zmenilo a ak by v rovnici bol namiesto jednotky koeficient $(1 + A)$, tak sa súradnica u nevráti na pôvodnú hodnotu po uhle 2π, ale po uhle $2\pi/\sqrt{1 + A}$. To znamená, že orbita sa za jednu otočku okolo stredu potenciálu otočí o uhol

$$\delta\phi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 + A}} - 1 \right) \approx -\pi A \ . \tag{2.181}$$

Ako sme písali vyššie, efekt ostatných planét na planétu Merkúr sa dá zhruba modelovať takouto poruchou potenciálu a vedie na proces, ktorému sa hovorí precesia perihélia. Miesto, kde sa Merkúr nachádza k Slnku najbližšie, sa pomaly otáča – predstaviť sa to dá tak, že Merkúr okolo Slnka kreslí elipsu, ktorá ale leží na pomaly sa otáčajúcej gramofónovej platni. Pre Merkúr je to približne 532 uhlových sekúnd za storočie.

Z historického hľadiska je zaujímavé, že k skutočne pozorovanej hodnote 574 uhlových sekúnd za storočie ešte čosi chýba. Dnes vieme, že je za tým najmä všeobecná teória relativity. Gravitačná sila

[40] Ktoré sa dá zhruba modelovať poruchou potenciálu v tvare $1/r^2$.

totiž nie je úplne dokonale popísaná potenciálom (2.136) a má malé relativistické korekcie. Tie vedú na príspevok k potenciálu úmerný r^{-3}. To už je problém, ktorý sa nedá dopočítať analyticky, ale keďže tento člen je veľmi malý v porovnaní s ostatnými, dá sa vcelku priamočiaro zahrnúť poruchovo a takmer dokonale vysvetľuje chýbajúce uhlové sekundy. Perihéliá ostatných planét sa stáčajú tiež, napríklad pri Zemi približne o 1160 a pri Marse o 1600 uhlových sekúnd za storočie, takmer všetko je to však vplyv ostatných planét. Relativistický príspevok je najväčší práve pri Merkúre, ktorý je k Slnku najbližšie. Pri Venuši je to už len asi 9 a pri Zemi asi 4 uhlové sekundy za storočie. Ak vás výpočet zaujíma, pozrite si príklad 2.62.

Dá sa ukázať, napríklad v úlohe 2.58, že v potenciáli $-km/r$ sa zachováva nasledujúca veličina

$$\vec{R} = \frac{1}{mk}\dot{\vec{x}} \times \vec{L} - \frac{\vec{x}}{r} \ . \tag{2.182}$$

Hovorí sa jej Laplace-Runge-Lenzov vektor, asi preto, že ho objavili Hermann a Bernoulli. Okrem energie a momentu hybnosti má teda problém ďalšiu vektorovú zachovávajúcu sa veličinu. To ale znie ako problém, pretože to dohromady dáva $1 + 3 + 3 = 7$ zachovávajúcich sa skalárov. My máme ale k dispozícii iba 6 počiatočných podmienok a zdá sa, že celá situácia je preurčená. Keď sa však pozrieme na veľkosť $\vec{R}$, zistíme, že sa dá vyjadriť skrz E a L a teda nie je nezávislá. Navyše $\vec{R}$ leží v rovine dráhy, takže $\vec{R} \cdot \vec{L} = 0$. Nezávislých zákonov zachovania máme teda 5, o jeden menej ako počiatočných podmienok. A viac ich ani byť nemôže: keby sa nemenilo šesť nezávislých veličín, ktoré závisia iba od polohy a rýchlosti, nemohla by sa meniť ani poloha a rýchlosť. Šiesta počiatočná podmienka hovorí, kedy je teleso kde, napríklad v akom čase prechádza perihéliom. Systémom s takýmto najväčším možným počtom zákonov zachovania sa hovorí maximálne superintegrovateľné. Znamená to, že na nájdenie tvaru dráhy nemusíme riešiť žiadnu diferenciálnu rovnicu a zákony zachovania sú sústava algebraických rovníc, ktorá ho úplne určuje. Na časový priebeh pohybu po tejto dráhe treba ešte jeden integrál, ktorý vedie na takzvanú Keplerovu rovnicu. Ako sme už raz písali, zákony zachovania súvisia so symetriami a $\vec{R}$ nie je výnimkou. Ide však o komplikovanejšiu symetriu, ktorá funguje v hybnostnom priestore a ak vás to zaujíma viac, internet vám isto rád ponúkne veľa materiálu pri zadaní čohosi ako "hidden symmetry of kepler problem".

Kruhová dráha existuje pre potenciál $-1/r^n$ v každom extréme efektívneho potenciálu, ale len pre minimá je stabilná. Na to dostaneme v úlohe 2.59 podmienku $n < 2$. V úlohe 2.60 zas dostaneme, že gravitačný potenciál má v d-rozmernom priestore tvar $-1/r^{(d-2)}$. Čo znamená, že v štvor- a viacrozmernom priestore by boli kruhové orbity v gravitačnom poli nestabilné.

Ako poslednú zaujímavosť si povedzme, že všetky ohraničené orbity sú pre ľubovoľnú hodnotu momentu hybnosti L uzavreté iba pre potenciály $1/r$ a r^2. Tomuto sa hovorí Bertrand theorem.

2.3.7 Rozptyl a odpudivé sily

Je zaujímavé pozrieť sa na situáciu s odpudivou gravitačnou silou, t. j. s potenciálom

$$V(r) = +\frac{km}{r} \ . \tag{2.183}$$

Samozrejme žiadna takáto gravitačná interakcia neexistuje, ale podľa podobného potenciálu sa správa elektrostatická interakcia medzi dvomi rovnako nabitými časticami. Namiesto (2.171) dostaneme v

tomto prípade

$$r(\theta) = \frac{-L^2/(km^2)}{1 - \frac{AL^2}{km^2}\cos\theta} = \frac{r_0}{\varepsilon\cos\theta - 1} \ . \tag{2.184}$$

To je hyperbola pre všetky hodnoty parametrov, ktorá je definovaná – ako sme už raz písali – iba pre uhly v intervale

$$\theta \in (-\theta_0, \theta_0) \ , \ \cos\theta_0 = \frac{1}{\varepsilon} \ . \tag{2.185}$$

Z praktického hľadiska je zaujímavé pozrieť sa na prípad, keď sa ľahká častica rozptyľuje na ťažkej častici, ktorý sa teda dá popísať takouto hyperbolou. Ak by častica bez interakcie preletela vo vzdialenosti b od stredu potenciálu, od svojho pôvodného smeru sa odchýli o uhol

$$\delta\theta = \pi - 2\theta_0 \ , \tag{2.186}$$

pričom teraz

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2 v^4}{k^2}} \ . \tag{2.187}$$

Na tom je zaujímavé to, že z praktického hľadiska je tento uhol vcelku priamočiare merať a tak sa vďaka nemu vieme veľa dozvedieť o charaktere interakčného potenciálu.

Ďalšie úlohy

Príklad 2.47. Rozmyslite si, že v prípade hmotného bodu pod pôsobením konštantnej sily $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ v troch rozmeroch sa na jeho pohyb dá pozerať ako na kombináciu troch nezávislých rovnomerne zrýchlených pohybov v jednotlivých rozmeroch.

Ak sa pôsobiaca sila mení, t. j. $F_x = F_x(x, y, z)$ a podobne pre F_y, F_z, za akých podmienok platí tvrdenie, že pohyby v jednotlivých smeroch sú nezávislé? □

Príklad 2.48. Majme vodorovný vietor s rýchlosťou $\vec{w} = (w, 0, 0)$. V ňom sa pohybuje teleso tak, že odporová sila je daná relatívnou rýchlosťou telesa vzhľadom na vzduch $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$. Napíšte pohybové rovnice v prípade lineárneho aj kvadratického odporu v prípade bez akéhokoľvek iného pôsobenia a s konštantnou gravitačnou silou $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Do akého najjednoduchšieho tvaru sa dajú rovnice upraviť zmenou vzťažnej sústavy pre všeobecné počiatočné podmienky? □

Príklad 2.49. Teleso vrhneme rýchlosťou v_0 šikmo pod uhlom α a teda $\vec{x}(0) = (0, 0, 0), \vec{v}(0) = (v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha, 0)$. Teleso sa bude pohybovať v gravitačnom poli $\vec{F} = (0, -mg, 0)$.

1. Zapíšte a vyriešte pohybové rovnice v tomto prípade. Vyjadrite dráhu telesa ako $y(x)$ a ukážte, že ide o parabolu.

2. Za aký čas teleso dopadne? Ako ďaleko dopadne? Do akej maximálnej výšky sa teleso dostane? Pre aké hodnoty uhla α sú tieto výsledky najväčšie?

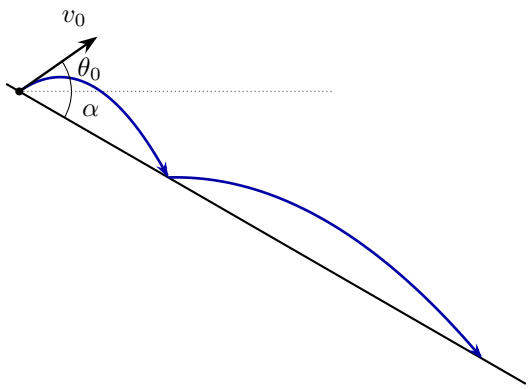
3. Teleso hádžeme rovnako ako predtým, ale pred nami sa nachádza kopec so sklonom $\beta < \alpha$. Do akej vzdialenosti hore kopcom teleso doletí?

4. Ako najďalej pozdĺž kopca vieme teleso vyhodiť? Pre aké α to bude?

□

Príklad 2.50. Na zjazdovke so sklonom α držíme loptu, ktorú hodíme dolu svahom rýchlosťou v_0 pod uhlom θ_0 vzhľadom na vodorovnú rovinu. V celom príklade budeme zanedbávať rozmery lopty, jej odraz od zjazdovky budeme považovať za dokonale pružný a počas celého pohybu budeme predpokladať, že jediná relevantná sila pôsobiaca na loptu je sila tiažová.

- Do akej vzdialenosti od miesta, z ktorého sme ju hodili, dopadne lopta prvýkrát?
- Do akej vzdialenosti od miesta, z ktorého sme ju hodili, dopadne lopta druhýkrát?
- V akej vzdialenosti od miesta, z ktorého sme loptu hodili, bude jej n-tý odraz od zeme?
- V akej najvyššej výške nad zjazdovkou sa bude lopta nachádzať počas n-tého odrazu od zeme?



□

Príklad 2.51. Nájdite množinu všetkých bodov v priestore, ktoré vieme trafiť kameňom, ktorý hádžeme v homogénnom gravitačnom poli zo zadaného miesta fixovanou veľkosťou rýchlosti v_0. □

Príklad 2.52 (Voľné teleso – obľúbený triviálny prípad II)**.** Prechodom k premennej $u = 1/r$ preštudujte pohyb voľného telesa z úlohy 2.38. □

Riešenie. Pohybová rovnica aj s riešením je

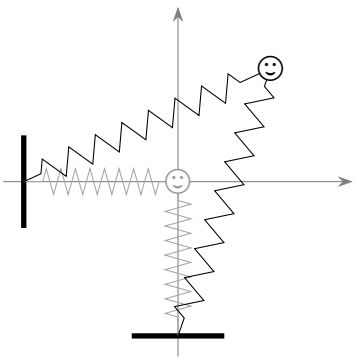
$$u'' + u = 0 \;\Rightarrow\; u = u_0 \sin(\theta + \theta_0) \;\Rightarrow\; r \sin(\theta + \theta_0) = const\ , \tag{2.188}$$

čo je rovnica priamky (pre $\theta_0 = 0$ je to priamka $y = r \sin\theta = const$). ■

Príklad 2.53 (Harmonický oscilátor – obľúbený netriviálny prípad)**.** Prechodom k premennej $u = 1/r$ preštudujte pohyb lineárneho harmonického oscilátora z úlohy 2.37. □

Návod. Pozor, elipsa bude mať v počiatku sústavy súradníc stred a nie ohnisko. ■

Príklad 2.54. Majme jedno teleso na dvoch rovnakých pružinách ako na obrázku



tak, že ich pokojová dĺžka je presne pri polohe telesa v počiatku súradníc.

Ako vyzerá potenciál, v ktorom sa teleso pohybuje? Ide o jednoduchý harmonický oscilátor?

Spravte v tomto potenciáli priblíženie malých výchyliek a popíšte, ako sa bude teleso pohybovať. Ako by to celé vyzeralo, keby boli pružiny rôzne? □

Príklad 2.55. Družica sa pohybuje po kruhovej dráhe okolo planéty hmotnosti M vo vzdialenosti H od jej stredu.

1. Aký čas trvá družici jeden obeh okolo planéty?

2. Zistite, v akej výške nad Zemou je tento čas rovný jednému dňu. Premyslite si, že to znamená, že družica bude stále nad tým istým miestom na Zemi, ak obieha nad rovníkom v smere otáčania Zeme.[41]

□

Príklad 2.56. V tomto príklade bude úlohou dopočítať niekoľko vecí, ktoré sa použili na prednáške.

1. Z vyjadrenia
$$r(\theta) = \frac{L^2/(km^2)}{1 + \varepsilon \cos\theta} \tag{2.189}$$
nájdite vzťah pre $\dot{r}$. Nezabudnite, že viete $\dot{\theta} = L/mr^2$. Ukážte, že pre $\theta = 0$ dostaneme $\dot{r} = 0$. To sa dalo očakávať, keďže sme na prednáške zistili, že toto je miesto, v ktorom sa teleso nachádza najbližšie k stredu.

   Dosaďte r pre $\theta = 0$ do vzťahu pre celkovú energiu (alebo do vzťahu pre efektívny potenciál) a ukážte, že pre energiu telesa platí
$$E = \frac{k^2 m^3}{2L^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right) \ . \tag{2.190}$$

2. Ukážte, že z vyjadrenia pre kartézske súradnice $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ dostaneme
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{2.191}$$
   Nájdite hodnoty parametrov x_0, a, b.

[41] Číselné hodnoty gravitačnej konštanty a hmotnosti Zeme rada prezradí Wikipedia.

3. Ukážte, že pre hlavnú polos elipsy a platí

$$a = -\frac{km}{2E} \ . \tag{2.192}$$

□

Príklad 2.57. Kam dopadne teleso, ak ho hodíme rýchlosťou menšou, ako nám vyšlo v príklade 2.41? □

Riešenie. Tu na riešenie potrebujeme vedieť rovnicu (2.171) pre trajektóriu

$$r(\theta) = a(1-\varepsilon^2)/(1-\varepsilon\cos\theta) \ . \tag{2.193}$$

Uhol θ tu meriame od miesta výstrelu, kde je teleso od stredu najďalej, preto je v menovateli znamienko mínus. Tiež máme vzťahy (2.178) pre ε a a pre dané E a L. Dosadíme a dopočítame

$$\cos\theta = \frac{GM - v^2\frac{(R+H)^2}{R}}{GM - v^2(R+H)} \ . \tag{2.194}$$

Toto je menej ako 1, čo je fajn. Tiež to pre $v = 0$ dá miesto priamo pod telesom, čo je tiež fajn. A pre výsledok úlohy 2.41 to vráti -1 a pre väčšie rýchlosti to dá hlúposť, lebo teleso nespadne. Samé dobré správy. ■

Príklad 2.58. Ukážte, že v potenciáli $V(r) = -mk/r$ je nasledujúci vektor konštantný.

$$\vec{R} = \frac{1}{mk}\dot{\vec{x}} \times \vec{L} - \frac{\vec{x}}{r}.$$

Tomuto vektoru sa hovorí Laplace-Runge-Lenzov vektor a je špeciálnou zachovávajúcou sa veličinou pre $1/r$ potenciál. Premyslite si, kam smeruje tento vektor. □

Príklad 2.59 (Stabilita kruhových orbít)**.** Majme potenciál v tvare $V(r) = -km/r^n$.

- Napíšte vzťah pre efektívny potenciál a nájdite podmienku pre jeho extrém.
- Vypočítajte druhú deriváciu efektívneho potenciálu v tomto bode a zistite, za akých podmienok je tento extrém minimom. Interpretujte tento výsledok ako podmienku pre stabilitu kruhovej orbity.

□

Príklad 2.60 (Gravitácia v d rozmeroch)**.** Z akéhosi dôvodu, o ktorom budeme rozprávať v druhom pokračovaní tohto predmetu, je všeobecnejšia podmienka pre tvar gravitačnej sily daná plošným integrálom

$$\int_{\partial\Omega} d\vec{S}\cdot\vec{f} = -4\pi GM \ , \tag{2.195}$$

pre ľubovoľnú oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, kde $\vec{f}$ je intenzita gravitačného poľa daná vzťahom $\vec{f} = \vec{F}/m$, M je celková hmotnosť vnútri Ω a kde $\partial\Omega$ označuje hranicu objemu Ω.

Rozmyslite si, že ak použijeme za objem Ω guľu s polomerom r, dostaneme Newtonov gravitačný zákon. Na akú závislosť F od r to vedie v d rozmeroch? □

Príklad 2.61. Budeme študovať pohyb telesa v gravitačnom poli Slnka s potenciálom $-GMm/r$ s malou poruchou $-A/r^2$.

- Aká sila pôsobí na teleso v takomto prípade?
- Akú rovnicu spĺňa premenná $u(\theta) = 1/r(\theta)$? Aké má riešenia?
- Z bodu $r = r_0, \theta = 0$ vypustíme rýchlosťou v_0 teleso v smere kolmom na polohový vektor. Za akých podmienok bude pohyb telesa ohraničený?
- Za akých podmienok sa teleso bude nachádzať opäť vo vzdialenosti r_0? Interpretujte tento výsledok pre malé A ako stáčanie orbity.

□

Výsledok. Teleso sa dostane naspäť do tej istej vzdialenosti po otočení o uhol

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{2A}{mv_0^2 r_0^2}}} \,. \tag{2.196}$$

■

Príklad 2.62 (Anomálna precesia perihélia)**.** Budeme robiť čosi podobné ako v predchádzajúcom príklade, ale v prípade korekcie od všeobecnej relativity. Dá sa ukázať, že tá vedie na člen v potenciáli v tvare

$$-\frac{G(M+m)L^2}{c^2 m r^3} \,. \tag{2.197}$$

Ukážte, že pre $L < 2\sqrt{3}GMm/c$ nemá efektívny potenciál žiadne minimum a neexistujú žiadne kruhové orbity. Rozmyslite si prečo. Ukážte, že pre väčšie hodnoty existuje jedna stabilná a jedna nestabilná kruhová orbita.

Majme teraz stabilnú kruhovú orbitu, ktorej polomer označme r_0. Keď ju málo porušíme, teleso bude vykonávať malé kmity okolo minima efektívneho potenciálu. Aká je frekvencia týchto kmitov? Po prejdení akého uhla sa teleso dostane späť do tej istej vzdialenosti od stredu? Čo to znamená pre otočenie elipsy, po ktorej obieha? □

Výsledok. Uhol, o ktorý sa za jednu periódu otočí elipsa, je

$$\delta\phi = \frac{6\pi G(M+m)}{c^2 a(1-\varepsilon^2)} \,, \tag{2.198}$$

kde ε je excentricita eliptickej trajektórie $\sqrt{1 - b^2/a^2}$. Pre Merkúr je toto číslo už spomínaných 43 uhlových sekúnd za storočie. ■

Príklad 2.63. Odvoďte vzťahy (2.186) a (2.187). □

Príklad 2.64. Teleso vrháme v homogénnom gravitačnom poli rýchlosťou s danou veľkosťou v. Ak sa teleso pohybuje s odporom vzduchu $\vec{F} \sim -\vec{v}$, dopočítať uhol, pod ktorým treba teleso hodiť, aby doletelo najďalej je ťažké. Dá sa však dokázať nasledujúce tvrdenie:

Nech α je uhol, pod ktorým treba vrhnúť teleso, aby pri danej rýchlosti doletelo najďalej a nech β je uhol, pod ktorým teleso dopadne na zem (t. j. uhol, ktorý zviera v momente dopadu rýchlosť s podložkou). Potom $\alpha + \beta = \pi/2$. □

3 Dynamika sústav hmotných bodov

Vo svete sa nachádza viac ako jedno teleso[Citation needed.]. A aj keď sme toho vedeli len s jedným telesom popísať celkom veľa, budeme sa musieť pohnúť ďalej. Kľúčovou vecou tu bude tretí Newtonov pohybový zákon, ktorý hovorí o tom, ako môže, resp. musí, vyzerať interakcia dvoch telies.

- **Zákon akcie a reakcie** – ak jedno teleso pôsobí silou na druhé, potom musí nutne druhé teleso pôsobiť na prvé a táto sila je rovnako veľká a opačného smeru.

V nasledujúcich častiach bude index i číslovať hmotné body od 1 po N, kde N je počet telies, s ktorými máme do činenia. Silu, ktorá na i-te teleso pôsobí v dôsledku prítomnosti j-teho telesa, označíme $\vec{F}_{ij}$. Tretí Newtonov zákon potom hovorí, že $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Hmotné body charakterizuje ich hmotnosť a tú budeme označovať m_i. Okrem zákona akcie a reakcie teda budeme mať štandardnú pohybovú rovnicu pre každé teleso

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{\mathrm{EXT}} \ , \ i = 1, 2, \ldots, N \ , \tag{3.1}$$

kde sme vonkajšiu silu pôsobiacu na i-te teleso označili $\vec{F}_i^{\mathrm{EXT}}$.

3.1 Dva hmotné body

Na začiatok majme dve telesá s hmotnosťami m_1 a m_2, ktoré medzi sebou nejak interagujú. Sčítaním ich pohybových rovníc dostaneme

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_1^{\mathrm{EXT}} + \vec{F}_2^{\mathrm{EXT}} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \ . \tag{3.2}$$

Posledné dva členy sa odčítajú vďaka zákonu akcie a reakcie. Ak na telesá zvonku nič nepôsobí, dostaneme

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = 0 \ , \tag{3.3}$$

a teda vývoj polohy bodu so súradnicou

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \tag{3.4}$$

bude jednoducho rovnomerný priamočiary pohyb s rýchlosťou

$$\vec{w} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \ . \tag{3.5}$$

Tomuto bodu sa hovorí ťažisko a možno v ňom spoznávate vážený priemer polôh jednotlivých telies.

Teraz (3.3) prepíšeme do tvaru

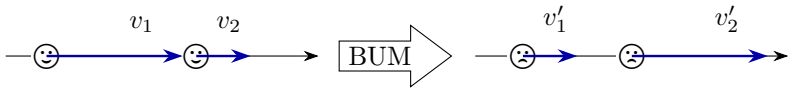
$$\frac{d}{dt} \left(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \right) = 0 \ \Rightarrow \ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = const \ . \tag{3.6}$$

To je zákon zachovania hybnosti. Konkrétne rozdelenie tejto veličiny medzi $m_1 \vec{v}_1$ a $m_2 \vec{v}_2$ sa môže meniť, ale súčet zostáva počas časového vývoja rovnaký.

3.1.1 Pružné zrážky dvoch telies

Majme dve telesá, ktoré nemajú žiadnu interakciu na diaľku – ako je napríklad gravitačná interakcia – ale pôsobia na seba, iba keď sa dotýkajú. Ak teda $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, pohybujú sa rovnomerne priamočiaro rýchlosťami $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Pri dotyku telies medzi nimi dochádza k nejakej interakcii, ktorú nebudeme presne špecifikovať. Dôležité pre nás bude, čo sa bude diať po zrážke, teda keď sa telesá rozpoja a zmenenými rýchlosťami sa budú opäť pohybovať rovnomerne priamočiaro.

Na to, aby sa niekedy zrazili, sa musia v nejakej sústave pohybovať po tej istej priamke[42]. V tejto sústave je teda náš problém jednorozmerný a môžeme vynechať všetky šípky. Ak zavedieme označenie rýchlostí pred zrážkou v_1, v_2 a po zrážke v_1', v_2', situácia vyzerá nejak takto



Vo všeobecnosti interakcia nemusí zachovávať (mechanickú) energiu a časť pôvodnej (kinetickej) energie telies sa môže stratiť – napríklad premeniť na teplo alebo na deformačnú energiu. Hybnosť sa musí zachovávať vždy. Pozrime sa najskôr na jednoduchší prípad, keď sa energia zachováva. V laboratórnej sústave[43] potom dostávame

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \ , \tag{3.7a}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \ . \tag{3.7b}$$

To je sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych (čiarkovaných rýchlostiach), ktorú vieme priamo vyriešiť. Ukážeme si ale jednoduchšiu a hlavne fyzikálnejšiu cestu.

Na zrážku sa pozrieme v ťažiskovej sústave, t. j. takej, kde ťažisko stojí. Ak rýchlosti v nej označíme písmenom u, dostávame

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \ , \ u_1 = v_1 - w \ , \ u_2 = v_2 - w \ , \tag{3.8}$$

a tiež, že hybnosť v ťažiskovej sústave je nulová

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 (v_1 - w) + m_2 (v_2 - w) = 0 \ . \tag{3.9}$$

Keďže aj v tejto sústave musia platiť rovnaké zákony, hybnosť a energia sa musia zachovávať. Mohli by sme napísať rovnice a riešiť, ale je zrejmé, že riešením bude

$$u_1' = -u_1 \ , \ u_2' = -u_2 \ . \tag{3.10}$$

Toto evidentne oba zákony spĺňa a okrem triviálneho riešenia $u_{1,2}' = u_{1,2}$, keď k žiadnej zrážke nedošlo, sústava lineárnej a kvadratickej rovnice viac riešení mať nemôže.

[42] O zmene vzťažných sústav sme zatiaľ nehovorili, budeme o nej hovoriť až v časti 4. Zatiaľ nám bude stačiť to, že v inej sústave – t. j. z pohľadu pozorovateľa, ktorý sa vzhľadom na tú pôvodnú pohybuje rýchlosťou $\vec{v}$ – treba od všetkých rýchlostí odčítať tento vektor.

[43] Tak nazývame nejakú dobre definovanú sústavu, v ktorej rýchlosti telies meriame.

Príklad 3.1. Prečo sme nemohli spraviť trik $v'_{1,2} = -v_{1,2}$ v laboratórnej sústave, ale museli sme prechádzať do ťažiskovej? □

Prechodom späť do laboratórnej sústavy dostaneme

$$v'_1 = u'_1 + w = -u_1 + w = -v_1 + 2w \ , \tag{3.11}$$

$$v'_2 = u'_2 + w = -v_2 + 2w \ , \tag{3.12}$$

čo po dosadení (3.8) dá

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \ , \tag{3.13a}$$

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \ . \tag{3.13b}$$

Príklad 3.2. Dosadením overte, že rýchlosti (3.13) spĺňajú zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania energie (3.7). □

V rovniciach (3.13) sa skrýva niekoľko zaujímavých špeciálnych prípadov.

- V prípade $m_1 = m_2$ si hmotné body vymenia rýchlosti. To dáva zmysel, pretože pre dva rovnaké hmotné body výmena rýchlostí a prechod jedného cez druhý dajú v konečnom dôsledku tú istú situáciu ako žiadna zrážka – ak by sme v momente zrážky vymenili označenia $1 \leftrightarrow 2$, nikto si nič nevšimne. Špeciálne ak druhé teleso stálo, $v_2 = 0$, dostaneme $v'_1 = 0$ a $v'_2 = v_1$. Toto sa dá overiť na minciach na stole alebo na Newtonovej kolíske.

- Limita $m_1 \to \infty$ alebo $m_2 \to 0$, teda zrážka veľmi ťažkého a/alebo veľmi ľahkého telesa[44], dá $v'_1 = v_1, v'_2 = -v_2 + 2v_1$. Veľké teleso si teda zrážku ani nevšimne – to dáva zmysel – a malé teleso sa odrazí a k tomu si odnesie dvojnásobok rýchlosti veľkého telesa. Toto sa dá vidieť napríklad na pingpongovej a basketbalovej lopte, hrá kľúčovú úlohu pri raketových športoch a je základom manévru zvaného gravitačná katapultáž (pozri úlohu 3.17).

- Od vzťahov (3.13) by sme očakávali, že budú mať symetriu $m_1 \leftrightarrow m_2$, $v_1 \to -v_2$, $v_2 \to -v_1$ (a rovnako pre čiarkované rýchlosti). To preto, že to zodpovedá pohľadu na situáciu z opačnej strany. Ľahko overíme, že tomu tak ozaj je.

Príklad 3.3 (Biliard)**.** Majme dve gule rovnakej hmotnosti m a rovnakého polomeru R, ktoré sa pružne zrazia.

- Ako vyzerá rozumná sústava na popis tejto situácie?

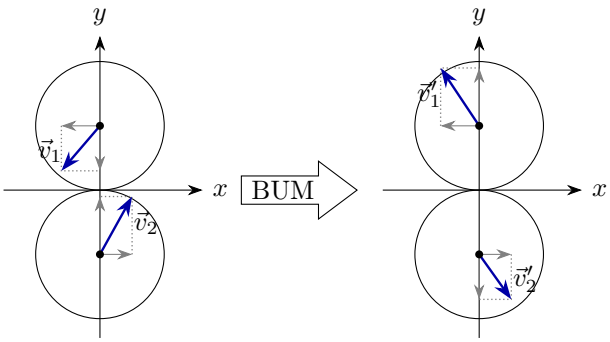
- Aké sú rýchlosti gulí po zrážke a ako to celé vyzerá vo vami zvolenej sústave?

- Ako vyzerá situácia, keď jedna z gulí pred zrážkou stojí?

□

[44] Úplne korektne by sme mali písať $m_2/m_1 \to 0$.

Riešenie. Budeme predpokladať, že gule môžu meniť svoju rýchlosť, len keď sa dotýkajú, a len v smere spojnice svojich stredov v tomto momente. Zmena rýchlosti v smere kolmom na spojnicu by musela byť spôsobená nejakým trením alebo čímsi podobným, čo v tomto zjednodušenom prípade nebudeme uvažovať. Je rozumné zvoliť súradnice tak, že počiatok bude v bode dotyku v čase zrážky, jedna os bude v smere spojnice stredov a druhá v kolmom smere.



Pre rýchlosti platí $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}), \vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$ a keďže gule sú rovnaké, pre rýchlosť ťažiska máme jednoducho

$$\vec{w} = \left(\frac{1}{2}\left(v_{1x} + v_{2x}\right), \frac{1}{2}\left(v_{1y} + v_{2y}\right) \right) \ . \tag{3.14}$$

Ak predpokladáme zákon zachovania energie a hybnosti, v ťažiskovej sústave máme do činenia s dvomi doterajšími prípadmi – v x-ovom smere gule nijak neinteragujú a tým pádom sú ich rýchlosti v tomto smere pred a po zrážke rovnaké, v y-ovom smere zmenia gule svoju rýchlosť na opačnú,

$$u_{1y} \to u'_{1y} = -u_{1y} \ , \ u_{2y} \to u'_{2y} = -u_{2y} \tag{3.15}$$

a teda

$$\vec{v}'_1 = \vec{u}'_1 + \vec{w} = (v_{1x}, v_{2y}) \ , \ \vec{v}'_2 = \vec{u}'_2 + \vec{w} = (v_{2x}, v_{1y}) \ . \tag{3.16}$$

Ak jedna z gulí, nech je to tá horná, pred zrážkou stojí, potom dostaneme

$$\vec{v}'_1 = (0, v_{2y}) \ , \ \vec{v}'_2 = (v_{2x}, 0) \tag{3.17}$$

a vidíme, že stojaca guľa odletí po spojnici stredov v momente dotyku a pôvodne pohybujúca sa guľa poputuje kolmo na tento smer. Takto sa dá mieriť v biliarde a tak sa dá poslať guľa pozdĺž mantinelu do diery. A tiež to vedie na problémy, ak je farebná guľa niekde na Thálesovej kružnici nad kratšou hranou stola – vtedy býva komplikované poslať farebnú guľu do diery bez toho, aby spadla aj biela. Ak poznáte, viete. Ak nepoznáte, máte výhovorku ísť si to celé kamsi vyskúšať.

Alternatívne sa dá kolmosť výsledných rýchlostí po zrážke dokázať nasledovne. Nech je rýchlosť prvej gule pred zrážkou $\vec{v}_0$, po zrážke majú gule rýchlosť $\vec{v}'_1$ a $\vec{v}'_2$. Pre rovnaké gule majú zákony zachovania hybnosti a energie tvar

$$\vec{v}_0 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \ , \ \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \cdot \vec{v}'_2 \ . \tag{3.18}$$

Keď vynásobíme prvú rovnicu skalárne samú so sebou, dostaneme

$$v_0^2 = (v'_1)^2 + (v'_2)^2 + 2\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 \ , \tag{3.19}$$

z čoho použitím tej druhej dostaneme kolmosť výsledných rýchlostí. ■

3.1.2 Nepružné zrážky telies

Ako sme povedali, vzájomná interakcia telies energiu zachovávať nemusí. Presnejšie povedané, nemusí zachovávať mechanickú energiu a nejaká časť pôvodnej kinetickej energie sa môže premeniť na iné formy energie, napríklad na teplo alebo energiu deformácie. Hybnosť ale musí zostať zachovaná tak či tak. Namiesto (3.7) teda píšeme

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \ , \tag{3.20a}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \Delta E \ , \tag{3.20b}$$

kde ΔE je spomínaná stratená časť energie. Otázkou teraz je, koľko to môže byť. Nemôže sa stratiť úplne všetka energia, pretože to by znamenalo nulové rýchlosti a tým pádom nulovú hybnosť. To by ale bolo v rozpore so zákonom zachovania hybnosti. Táto úvaha ale naznačuje aj riešenie – všetka energia sa môže stratiť v sústave, kde je celková hybnosť nulová. Tam môžu telesá zastať, a teda sa celá kinetická energia môže premeniť na iné formy energie. Pre energiu v ťažiskovej sústave dostávame

$$E_T = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - w)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - w)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \tag{3.21}$$

a teda maximum energie, ktoré sa môže stratiť, je

$$\Delta E_{max} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \ . \tag{3.22}$$

Ľahko sa potom overí, že zvyšná energia v laboratórnej sústave po zrážke je

$$E'_{lab} = E_{lab} - \Delta E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) w^2 \ , \tag{3.23}$$

presne ako by sme očakávali. Takejto zrážke, po ktorej sa telesá pohybujú spolu rýchlosťou ťažiska w, sa hovorí dokonale nepružná.

3.1.3 Problém dvoch telies

Pozrime sa teraz na situáciu, kde na dve telesá pôsobia potenciálové vonkajšie sily a aj ich vzájomná interakcia sa dá popísať potenciálom. Máme teda do činenia s potenciálom v tvare

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V_1(\vec{x}_1) + V_2(\vec{x}_2) + U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \tag{3.24}$$

a silu pôsobiacu na telesá dostaneme derivovaním tejto funkcie podľa zodpovedajúcich súradníc. Rozmyslíme si, aký tvar môže mať potenciál vzájomnej interakcie U. Ak ide skutočne o dvojčasticovú interakciu, tá by nemala závisieť od úplne ničoho iného, ako je vzájomná konfigurácia našich dvoch hmotných bodov. Ak predpokladáme, že priestor je homogénny a izotropný – to znamená, že v ňom neexistuje preferované miesto ani preferovaný smer – funkcia U by mala závisieť iba od relatívnej polohy častíc a teda byť iba funkciou $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Tiež by nemala závisieť od smeru tohto vektora, takže bude iba funkciou jeho veľkosti r, pretože to je jediná nezávislá rotačne a translačne invariantná veličina, ktorú z dvoch vektorov vieme vyrobiť. Máme teda $U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U(r)$.

Ak označíme celkovú hmotnosť $M = m_1 + m_2$, dostaneme pre pohyb ťažiska

$$M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = -\vec{\nabla}_1 V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) - \vec{\nabla}_2 V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\vec{\nabla}_1 V_1 - \vec{\nabla}_2 V_2 - (\vec{\nabla}_1 U + \vec{\nabla}_2 U) \ , \quad (3.25)$$

kde sme označili $\vec{\nabla}_i = (\partial_{x_i}, \partial_{y_i}, \partial_{z_i})$. Z tvaru funkcie U dostávame, že zátvorka v predchádzajúcom vzťahu je nutne nulová – čo je vlastne aj dôsledok zákona akcie a reakcie – a zrýchlenie ťažiska teda určujú len vonkajšie sily pôsobiace na hmotné body.

To je veľmi dôležité a ospravedlňuje to fakt, že sme sa pohybu hmotného bodu venovali skoro pol semestra, aj keď ide iba o zjednodušený model. Lebo[45] keď akúkoľvek sústavu zavrieme do škatule a pozeráme sa iba na jej celkový pohyb, ten bude daný pohybom ťažiska ako hmotného bodu pod vplyvom súčtu vonkajších síl. Vnútorné sily tento pohyb nijak priamo neovplyvňujú a ani ho nekomplikujú.

Čo so situáciami, keď je výslednica vonkajších síl nenulová, uvidíme v časti o neinerciálnych vzťažných sústavách. Zatiaľ sa poďme pozrieť na prípad, keď je nulová a ťažisko sa hýbe rovnomerne priamočiaro $\vec{R} = \vec{w}t + \vec{R}_0$. Vieme teda, ako sa bude v čase vyvíjať vážený súčet vektorov $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$, ostáva nám určiť vývoj ich rozdielu. Okrem toho je, čisto z tvaru funkcie U, rozumné pozerať sa na vývoj $\vec{r}$. Počítame

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\vec{F}_{12} = -\frac{1}{\mu}\frac{dU}{dr}\hat{r} \ , \quad (3.26)$$

kde sme zaviedli takzvanú redukovanú hmotnosť

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.27)$$

a využili sme

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_1 U = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{r} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} \ . \quad (3.28)$$

Pri tomto výpočte sme predpokladali, že vonkajšie sily nepôsobia. Nulová výslednica na to nestačí, vo všeobecnosti by na pravej strane pribudol rozdiel zrýchlení, ktoré telesám udeľujú vonkajšie sily, $-\frac{1}{m_1}\vec{\nabla}_1 V_1 + \frac{1}{m_2}\vec{\nabla}_2 V_2$.[46] Dostali sme teda pohybovú rovnicu, ktorá vyzerá ako rovnica pre pohyb jedného telesa s hmotnosťou μ v centrálnom potenciáli rovnakého tvaru, ako je potenciál pre interakciu dvoch telies. Problém dvoch interagujúcich telies sa nám teda podarilo rozviazať na problém dvoch nezávislých telies – jedno ťažisko a jedno fiktívne[47] teleso, ktoré určuje relatívny vektor skutočných telies. Pohyb jedného telesa sme sa už naučili riešiť celkom dobre. Keď tieto dva pohyby máme, vieme z vyjadrenia

$$\vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \ , \ \vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \ , \quad (3.29)$$

dostať hľadaný časový priebeh $\vec{x}_1(t)$ a $\vec{x}_2(t)$.

[45] Ako uvidíme čoskoro aj vo všeobecnom prípade N hmotných bodov.

[46] Napríklad pre dva opačné náboje v homogénnom elektrickom poli je výslednica nulová, ale pole dvojicu naťahuje a natáča. Naopak, tento člen je nulový aj vtedy, keď vonkajšie sily udeľujú obom telesám rovnaké zrýchlenie, ako v homogénnom tiažovom poli. Ťažisko vtedy padá po parabole, ale relatívny pohyb je rovnaký, ako keby pole nebolo. Ak pole homogénne nie je, z tohto člena ostanú slapové sily. S takou situáciou, Zem a Mesiac obiehajúce okolo Slnka, sa stretneme v úlohe o slapových silách v časti 4.

[47] Respektíve ešte fiktívnejšie.

Príklad 3.4. Dosadením (3.29) ukážte, že celková energia a celkový moment hybnosti dvoch telies sa rozdelia na časť patriacu ťažisku a časť patriacu fiktívnemu telesu,

$$E = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r) \ , \tag{3.30}$$

$$\vec{L} = M\,\vec{R}\times\dot{\vec{R}} + \mu\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}} \ . \tag{3.31}$$

V ťažiskovej sústave teda ostanú len druhé časti, ktoré sú presne energiou a momentom hybnosti telesa s hmotnosťou μ v potenciáli $U(r)$. Práve tie budeme v nasledujúcich príkladoch dosádzať do vzťahov pre pohyb jedného telesa. □

Príklad 3.5 (Dvojhviezda)**.** Majme dve rovnako veľké hviezdy hmotnosti m, ktoré okolo seba obiehajú po kružnici rýchlosťou v.

- Kde je ťažisko tejto sústavy?
- Ako vyzerá táto úloha z pohľadu Newtonovho zákona pre jednu hviezdu? Aký je polomer kružnice, po ktorej hviezdy obiehajú?
- Aká je redukovaná hmotnosť sústavy? Aký je jej celkový moment hybnosti a celková energia?
- Napíšte zodpovedajúcu pohybovú rovnicu pre fiktívne teleso z prednášky a vyriešte ju. Z toho nájdite polohové vektory každej z hviezd a overte, že dostanete rovnaký polomer kružnice, po ktorej obiehajú, ako z Newtonovho zákona.

□

Riešenie.

- Ťažisko je presne medzi hviezdami. Ukáže to výpočet, ale rýchlejšie to dostaneme zo symetrie úlohy – ak situáciu zozrkadlíme vzhľadom na rovinu ich symetrie, situácia sa nezmení, a teda ťažisko musí ležať v tejto rovine. Plus musí ležať na ich spojnici.
- Na každú hviezdu pôsobí gravitačná sila veľkosti

  $$F = \frac{Gm^2}{(2R)^2} \ , \tag{3.32}$$

  kde R je polomer kružnice, po ktorej hviezdy obiehajú. Táto sila musí byť dostredivou pre patričný pohyb po kružnici, a teda

  $$\frac{Gm^2}{4R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{Gm}{4v^2} \ . \tag{3.33}$$

- Redukovaná hmotnosť je jednoducho $\mu = m^2/2m = m/2$. Fiktívne teleso sa pohybuje v potenciáli

  $$U(r) = V(r) = -\frac{Gm^2}{r} = -\frac{2Gm\mu}{r} \ . \tag{3.34}$$

  Vidíme teda, že všade tam, kde sme predtým písali GM, budeme teraz musieť písať $2Gm$.

Celkový moment hybnosti je

$$L = mvR + mvR = 2mvR = 4\mu vR \ , \tag{3.35}$$

kde sme si v záverečnom kroku pripravili výraz tak, aby sa nám ľahko aplikoval na teleso hmotnosti μ. Podobne je celková energia

$$E = 2\,\frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm^2}{2R} = 2\mu v^2 - \frac{2Gm\mu}{2R} \ . \tag{3.36}$$

Rozmyslite si, prečo sme energiu zapísali v takomto tvare.

- Zo vzťahu pre energiu (2.177) dostaneme

$$E = \frac{\mu^3(2Gm)^2}{2L^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right) \ . \tag{3.37}$$

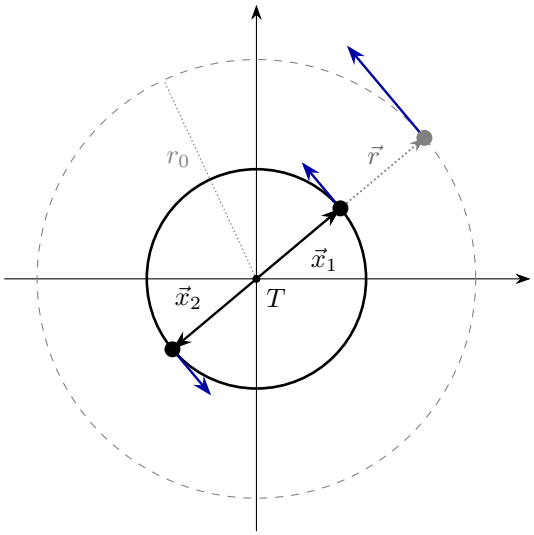
Podmienka kruhovej trajektórie $\varepsilon = 0$ s použitím (3.36) dá, neprekvapivo, (3.33). Alternatívne by sme mohli požadovať, aby parameter trajektórie r_0 vyšiel presne $2R$, t. j.

$$\frac{L^2}{2Gm\mu^2} = 2R \ \Rightarrow \ R = \frac{Gm}{4v^2} \ . \tag{3.38}$$

Oplatí sa pozrieť presne na to, ako dostaneme pohyb skutočných hviezd z pohybu fiktívnej hviezdy. Z vyjadrenia pre polohové vektory (3.29) máme

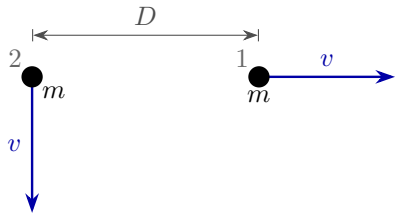
$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2}\vec{r} \ , \ \vec{x}_2 = -\frac{1}{2}\vec{r} \tag{3.39}$$

a z toho tento obrázok



■

Príklad 3.6. Majme dve telesá hmotnosti m. Jednému telesu udelíme rýchlosť v kolmo na ich spojnicu, druhému udelíme rýchlosť v v smere priamo preč od prvého telesa.



Telesá sa priťahujú podľa Newtonovho gravitačného zákona, inak na ne nič nepôsobí.

- Aká je redukovaná hmotnosť μ pre tento systém? Nájdite rýchlosť ťažiska tejto sústavy a nájdite rýchlosti telies v ťažiskovej sústave.
- Aká je celková energia a celkový moment hybnosti systému v ťažiskovej sústave?
- Akú podmienku musí spĺňať v, aby sa telesá nevzdialili do nekonečna ale obiehali po elipse okolo spoločného ťažiska?
- Z vyjadrenia E a L nájdite parametre dráhy a, ε fiktívneho telesa, ktorého pohyb určuje pohyb týchto dvoch telies.
- Aká je minimálna a maximálna vzdialenosť, do ktorej sa od seba telesá dostanú?
- Aké je explicitné vyjadrenie pre $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ v pôvodnej sústave?

□

Riešenie.

- Tu opäť $\mu = m/2$. Pre rýchlosť ťažiska

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}_1 + \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}_2 = \frac{1}{2}(v, 0) + \frac{1}{2}(0, -v) = \frac{1}{2}(v, -v) \ . \tag{3.40}$$

Ťažisko sa bude pohybovať rovnomerne priamočiaro, a teda $\vec{R}(t) = \vec{w}t$. Rýchlosti v ťažiskovej sústave dostaneme odpočítaním $\vec{w}$, a teda

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{2}(v, v) \ , \ \vec{u}_2 = -\frac{1}{2}(v, v) \ . \tag{3.41}$$

- Potenciál pre fiktívne teleso je

$$U(r) = V(r) = -\frac{Gm^2}{r} = -\frac{2Gm\mu}{r} \tag{3.42}$$

a opäť bude úlohu GM hrať $2Gm$. Pre moment hybnosti máme

$$L = m\frac{1}{2}D\frac{1}{2}v \times 2 = \mu D v \tag{3.43}$$

a pre energiu

$$E = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{2} \times 2 - \frac{Gm^2}{D} = \frac{1}{2}2\mu v^2 - \frac{2Gm\mu}{D} \ . \tag{3.44}$$

- Energia fiktívneho telesa musí byť záporná, a teda

$$\frac{1}{2}mv^2 < \frac{Gm^2}{D} \;\Rightarrow\; v < \sqrt{\frac{2Gm}{D}}\ . \tag{3.45}$$

Tu si treba dať pozor, že ide o energiu v ťažiskovej sústave. Keby sme počítali s energiou v pôvodnej sústave, dostali by sme iný a nesprávny výsledok. Problém je v tom, že nejaká časť energie sa nedokáže premeniť na gravitačnú energiu pri vzďaľovaní, lebo si ju drží pohyb ťažiska.

- Na ďalšie dva body treba podosadzovať do vzťahov (2.178) a nezabudnúť namiesto GM písať $2Gm$ a namiesto m písať μ.

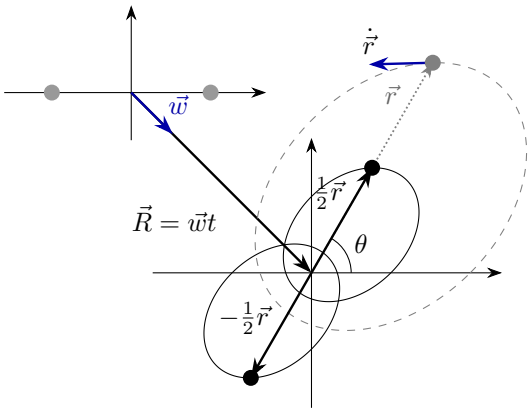
- Tak si to napíšme poriadne.

$$\vec{x}_1 = \vec{w}t + \frac{1}{2}\vec{r}\ ,\ \vec{x}_2 = \vec{w}t - \frac{1}{2}\vec{r} \tag{3.46}$$

kde vektor $\vec{r}$ je v polárnych súradniciach so stredom v $\vec{R}$ daný nasledovne

$$r = \frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}\ ,\ \dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}\ . \tag{3.47}$$

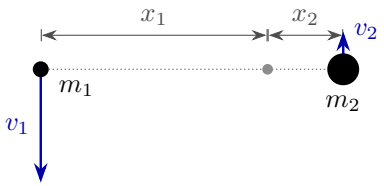
Na obrázku celá táto situácia vyzerá takto



■

Príklad 3.7. Do akej najmenšej vzdialenosti od Slnka sa dostane kométa, ktorá má v najvzdialenejšom bode svojej trajektórie rýchlosť v a je vtedy vo vzdialenosti D od Slnka? □

Riešenie. Na situáciu sa pozrime v ťažiskovej sústave. Ak označíme hmotnosti kométy a Slnka ako m_1 a m_2 a ich vzdialenosti od ťažiska, ktoré musí byť na ich spojnici, ako x_1 a x_2, potom



$$m_1x_1 = m_2x_2\ ,\ x_1 + x_2 = D\ , \tag{3.48a}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = D\frac{m_2}{m_1+m_2}\quad ,\quad x_2 = D\frac{m_1}{m_1+m_2}\ . \tag{3.48b}$$

Rýchlosti kométy aj Slnka v najvzdialenejšom bode musia byť kolmé na ich spojnicu, potom pri označení týchto rýchlostí v_1 a v_2 máme

$$v_1 m_1 = v_2 m_2 \ . \tag{3.49}$$

Rýchlosť v zo zadania budeme chápať ako rýchlosť kométy v ťažiskovej sústave, $v_1 = v$. Pre $m_1 \ll m_2$ je prakticky rovnaká ako rýchlosť kométy voči Slnku, $v_1 + v_2 = (1 + m_1/m_2)v$. Pre celkový moment hybnosti sústavy dostávame

$$L = m_1 v_1 x_1 + m_2 v_2 x_2 = m_1 v D \tag{3.50}$$

a pre celkovú energiu

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{D} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) m_1 v^2 - \frac{G m_1 m_2}{D} \ . \tag{3.51}$$

Naše fiktívne teleso bude obiehať po elipse s hlavnou polosou a excentricitou

$$a = -\frac{G m_1 m_2}{2E} \ , \ \varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu (G m_1 m_2)^2} \ . \tag{3.52}$$

Overíme, že $a(1 + \varepsilon) = D$ (prečo?) a pozrieme sa, čomu sa rovná $a(1 - \varepsilon)$, z čoho dostaneme

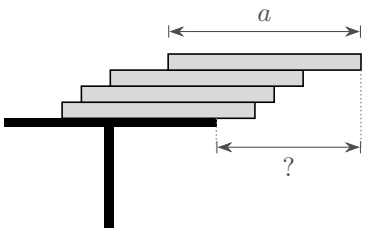
$$d = D \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v^2}{\frac{G m_2}{D} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v^2} \ . \tag{3.53}$$

Okrem správnej rozmernosti tohto výrazu si všimnime, že v limite $m_1 \to 0$ dostávame konečný výsledok, rovnaký ako pre kométu obiehajúcu okolo nehybného Slnka, ale v limite $m_2 \to \infty$ dostávame nulu. Je to teda príklad výsledku, kde poslať hmotnosť jedného z telies do nuly dá iný výsledok ako druhého do nekonečna. Dôvod je v tom, že m_2 tu hrá dve úlohy. Pomer m_1/m_2 určuje, ako veľmi sa pod vplyvom kométy pohne Slnko, a Gm_2 určuje, ako silno Slnko kométu priťahuje. Limita $m_1 \to 0$ mení len prvé. Limita $m_2 \to \infty$ mení aj druhé, a keď pri nekonečne silnej príťažlivosti držíme rýchlosť v pevnú, kométa spadne do Slnka. Pohybu okolo nehybného Slnka teda zodpovedá limita $m_1/m_2 \to 0$ pri pevnom Gm_2. ■

Príklad 3.8. Majme dve telesá s rovnakou hmotnosťou na koncoch pružiny tuhosti k, ktorá má v nenatiahnutom stave dĺžku D a na sústavu zvonku nič nepôsobí. Čo sa bude diať, keď udelíme telesám nejaké rýchlosti? Všeobecné, rôznej veľkosti a rôzneho smeru. Pre špeciálny prípad $D = 0$ nájdite aj explicitné riešenie pre polohy telies. □

Ďalšie úlohy

Príklad 3.9 (Ťažisko)**.** Majme N hracích kariet/zápalkových škatuliek/krabíc od pizze/niečoho podobného s najdlhšou hranou a. Ako ďaleko za hranu stola môže najviac presahovať okraj najvyššej z nich, ak ich ukladáme na seba?



□

Príklad 3.10 (2D zrážka)**.** Majme dva hmotné body s hmotnosťou m. Jeden stojí, druhý do neho narazí a po zrážke sa nepohybujú po pôvodnej priamke, ale pohybujú sa v rovine. Aký môže byť maximálny uhol medzi smermi ich pohybu? □

Príklad 3.11 (Balistické kyvadlo)**.** Bedníčka s pieskom hmotnosti M visí na špagáte. Rýchlosťou v do nej vletí náboj hmotnosti m a uviazne v nej. Ako výsledok bedníčka vystúpi do výšky h. Aká bola rýchlosť náboja? □

Príklad 3.12 (Približovanie ako nepružná zrážka)**.** Majme dve telesá s hmotnosťami m_1 a m_2, ktoré sa odpudzujú silou, ktorá má podobný tvar ako gravitačná (napríklad dva elektróny).

- Ako vyzerá jej potenciál?
- Ak na začiatku jedno teleso stálo a druhé naň letelo z veľkej vzdialenosti rýchlosťou v, do akej najmenšej vzdialenosti sa telesá priblížili?

□

Príklad 3.13. Majme dve telesá s hmotnosťami m_1 a m_2 na pružine tuhosti k a pružina je vo svojej pokojovej dĺžke. Jednému z telies udelíme rýchlosť v v smere ich spojnice. Aká bude najmenšia a najväčšia vzdialenosť telies počas pohybu? Môžete predpokladať, že rýchlosť nie je príliš veľká a pružina sa nikdy úplne celá nestlačí. □

Návod. Ak je pokojová dĺžka pružiny l, potom je energia potrebná na dosiahnutie vzdialenosti x medzi jej koncami rovná $k(x-l)^2/2$. ■

Príklad 3.14 (Fyzikálna olympiáda, krajské kolo, kategória D I)**.** Na okraji stola výšky H stojí guľa hmotnosti M. Vletí do nej náboj s hmotnosťou m, preletí cez ňu a obe telesá spadnú na zem. Ak sa náboj na začiatku pohyboval rýchlosťou v a po zrážke dopadol do vzdialenosti d od stola, do akej vzdialenosti od stola dopadla guľa? Aká energia sa spotrebovala na prerazenie gule? □

Príklad 3.15 (Fyzikálna olympiáda, krajské kolo, kategória D II)**.** Z jedného bodu visia na špagátoch dĺžky l dva kusy plastelíny s hmotnosťami m_1 a m_2. Kus s hmotnosťou m_1 vychýlime do vodorovnej polohy, uvoľníme a dôjde k dokonale nepružnej zrážke. Do akej výšky vystúpi výsledný kus plastelíny po zrážke? □

Príklad 3.16 (Koeficient reštitúcie)**.** Medzi pružnou a dokonale nepružnou zrážkou je celá škála zrážok, pri ktorých sa stratí len časť energie. Jednoduchý model takej zrážky dostaneme, ak budeme predpokladať, že v ťažiskovej sústave sa rýchlosti telies pri zrážke otočia a zmenšia v rovnakom pomere, $u'_{1,2} = -e\,u_{1,2}$, kde $0 \leq e \leq 1$ je takzvaný koeficient reštitúcie.

- Overte, že sa pri takejto zrážke zachováva hybnosť. Aké sú rýchlosti telies po zrážke v laboratórnej sústave? Čo dostaneme pre $e = 1$ a pre $e = 0$?
- Koľko energie sa pri zrážke stratí?
- Loptička pustená z výšky h na tvrdú podlahu vyskočí do výšky h_1. Aký je koeficient reštitúcie zrážky loptičky s podlahou? Do akej výšky loptička vyskočí po n-tom odraze a ako dlho bude trvať, kým skákanie skončí?

□

Príklad 3.17 (Gravitačná katapultáž)**.** Sonda letí rýchlosťou u oproti planéte, ktorá sa pohybuje rýchlosťou V. Obe rýchlosti meriame v sústave Slnka, planéta je oveľa ťažšia ako sonda a pôsobenie Slnka počas preletu okolo planéty zanedbáme.

- Akú veľkú rýchlosť má sonda v sústave planéty ďaleko pred preletom a akú ďaleko po ňom?
- Akou rýchlosťou sa bude sonda pohybovať v sústave Slnka, ak ju planéta otočí o 180°? Porovnajte výsledok s pružnou zrážkou veľmi ťažkého a veľmi ľahkého telesa.
- Akú rýchlosť bude mať sonda v sústave Slnka, ak ju planéta otočí o uhol α?
- Odkiaľ sa berie energia, ktorú sonda získala?

□

Príklad 3.18 (Dvojhviezda reloaded)**.** Majme dve rovnako veľké hviezdy hmotnosti m, ktoré sa na začiatku nachádzajú vo vzdialenosti $2R$ a majú rovnako veľké rýchlosti v kolmé na ich spojnicu a opačného smeru. Táto rýchlosť je ale menšia ako rýchlosť potrebná na pohyb po tej istej kružnici z úlohy 3.5.

- Aký je celkový moment hybnosti a celková energia systému?
- Ako vyzerá potenciál, v ktorom sa pohybuje fiktívne teleso, ktorého pohyb popisuje pohyb dvoch hviezd? Ako vyzerá konštanta v potenciáli vyjadrená pomocou redukovanej hmotnosti μ? Ako vyzerá celková energia a celkový moment hybnosti?
- Nájdite pohyb fiktívneho telesa a z neho pohyby oboch hviezd.

□

Príklad 3.19 (Zem a Mesiac)**.** Majme dve telesá hmotnosti M a m, ktoré sú od seba vo vzdialenosti D. Aké rýchlosti musia mať, aby sa pohybovali po kružniciach? Aké budú polomery týchto kružníc?

Na úlohu sa dá pozrieť bez ťažkej mašinérie centrálnych potenciálov len cez Newtonovu pohybovú rovnicu. Alebo aj s ňou. Urobte oboje. □

Príklad 3.20. Máme dve telesá hmotnosti m, ktoré sú veľmi ďaleko od seba a majú rýchlosť v a smer oproti sebe. Ak by medzi nimi nebola žiadna interakcia, prešli by okolo seba v najmenšej vzdialenosti b. Do akej najmenšej vzdialenosti sa k sebe priblížia, ak sa navzájom gravitačne priťahujú? Ako sa zmení smer ich rýchlostí, keď sa po vzájomnom priblížení od seba dostatočne vzdialia? □

3.2 Interakcia N hmotných bodov

V tejto časti spravíme len trochu všeobecnej gymnastiky a uvidíme, kam sa vieme dostať. Majme teda N interagujúcich hmotných bodov, veličiny zodpovedajúce i-temu bodu budeme označovať indexom i.

Silu pôsobiacu na i-ty bod rozdelíme na vonkajšiu časť, ktorá závisí iba od jeho polohy a nie od polôh ostatných bodov, a na interakciu s ostatnými bodmi. Ďalej budeme predpokladať, že sily sú párové (tak to chodí vo svete), a teda že sila od ostatných bodov sa dá vyjadriť ako súčet cez dvojice bodov

$$\vec{F}_i(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = \vec{F}_i^{\mathrm{EXT}}(\vec{x}_i) + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{\mathrm{INT}}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \ . \tag{3.54}$$

Tretí Newtonov zákon hovorí, že ak existuje nenulové $\vec{F}_{ij}^{\mathrm{INT}}$, musí existovať aj nenulové $\vec{F}_{ji}^{\mathrm{INT}}$, a dokonca že $\vec{F}_{ji}^{\mathrm{INT}} = -\vec{F}_{ij}^{\mathrm{INT}}$.

Sčítame teda pohybové rovnice pre všetky telesá a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\mathrm{EXT}}(\vec{x}_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{\mathrm{INT}}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \ . \tag{3.55}$$

Druhý člen je nulový, lebo sa v ňom vnútorné sily vyrušia po dvojiciach. Keď zadefinujeme celkovú hmotnosť $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$, polohu ťažiska

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \tag{3.56}$$

a výslednicu vonkajších síl $\vec{F}^{\mathrm{EXT}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\mathrm{EXT}}$, dostaneme

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\mathrm{EXT}} \ . \tag{3.57}$$

Ťažisko sústavy sa teda hýbe ako hmotný bod, na ktorý pôsobí súčet všetkých vonkajších síl. Vnútorná dynamika systému môže byť komplikovaná a je daná interakciou, ale celkový pohyb je daný iba vonkajšími silami a interakcia medzi telesami ho priamo neovplyvňuje[48].

Ak je súčet vonkajších síl nulový – čo ale nemusí znamenať nulovú silu na každé teleso –, ťažisko sa bude pohybovať rovnomerne priamočiaro a sústava spojená s ním bude inerciálna. Tam je potom

[48] Ovplyvňuje ho nepriamo, cez pohyb jednotlivých telies vo vnútri systému, ak vonkajšia sila nie je konštantná. Ak sa ale vonkajšia sila pri pohybe telies mení iba veľmi málo, nemusí hrať veľkú úlohu ani to.

riešenie pohybových rovníc priamočiare, i keď nie nutne jednoduché. Ak sa však ťažisková sústava pohybuje so zrýchlením, pôsobia v nej neinerciálne sily a situácia môže byť zložitejšia. Ak ste ešte o (ne)inerciálnych sústavách nepočuli, tento odsek bude dávať asi lepší zmysel po prečítaní časti 4. Tam sa pozrieme aj na nejaké príklady.

Hybnosť sústavy. Ľavá strana rovnice pre ťažisko je časovou deriváciou celkovej hybnosti sústavy

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}_i = M\dot{\vec{R}} \,, \tag{3.58}$$

takže ju môžeme zapísať aj ako $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\mathrm{EXT}}$. Ak je výslednica vonkajších síl nulová, celková hybnosť sa zachováva. To je zákon zachovania hybnosti z časti o dvoch telesách, teraz pre ľubovoľný počet telies. Jednotlivé telesá si hybnosť môžu vymieňať, ako chcú, ale jej súčet sa nemení.

Moment hybnosti sústavy. Podobne sa môžeme pozrieť na celkový moment hybnosti

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i \,. \tag{3.59}$$

Rovnako ako pri jednom telese v (2.119) pri derivovaní vypadne člen s $\dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i$ a v druhom člene použijeme pohybové rovnice

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{x}_i \times \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{\mathrm{EXT}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{x}_i \times \vec{F}_{ij}^{\mathrm{INT}} \,. \tag{3.60}$$

V poslednom súčte sa každá dvojica bodov vyskytuje dvakrát a spolu dá

$$\vec{x}_i \times \vec{F}_{ij}^{\mathrm{INT}} + \vec{x}_j \times \vec{F}_{ji}^{\mathrm{INT}} = (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\mathrm{INT}} \,. \tag{3.61}$$

Tu už samotný tretí Newtonov zákon nestačí. Hovorí, že sily sú rovnako veľké a opačného smeru, ale nie to, že ležia na spojnici bodov. Ak na nej ležia, ako pri interakcii s potenciálom $U(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$ z časti 3.1.3, je tento vektorový súčin nulový a ostane

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{\mathrm{EXT}} \,. \tag{3.62}$$

Veličine $\vec{x} \times \vec{F}$ sa hovorí moment sily. Celkový moment hybnosti sústavy teda menia len momenty vonkajších síl, a ak je ich súčet nulový, moment hybnosti sa zachováva. Na rozdiel od hybnosti tu záleží na tom, kam umiestnime počiatok súradníc, lebo od neho meriame polohové vektory $\vec{x}_i$. Tento vzťah bude kľúčový pri tuhom telese.

Pohyb ťažiska a pohyb okolo neho. Polohy bodov môžeme merať od ťažiska, $\vec{x}_i = \vec{R} + \vec{x}'_i$. Z definície ťažiska potom platí $\sum_i m_i \vec{x}'_i = 0$ a po derivovaní aj $\sum_i m_i \dot{\vec{x}}'_i = 0$. Pre kinetickú energiu sústavy dostaneme

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{x}}'_i\right)^2 = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}'_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\vec{x}}'_i\right)^2 = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + T' \ , \tag{3.63}$$

kde T' je kinetická energia pohybu okolo ťažiska, teda kinetická energia v ťažiskovej sústave. Prostredný člen vypadol, lebo v ťažiskovej sústave ťažisko stojí. Z rovnakého dôvodu vypadnú oba zmiešané členy v momente hybnosti a dostaneme

$$\vec{L} = M\,\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{x}'_i \times \dot{\vec{x}}'_i = M\,\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{L}' \ . \tag{3.64}$$

Kinetická energia aj moment hybnosti sústavy sa teda rozdelia na príspevok ťažiska, ako keby v ňom bola sústredená celá hmotnosť, a na príspevok pohybu okolo ťažiska. Pre dve telesá je to úloha 3.4, kde $T' = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$ a $\vec{L}' = \mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$. Tento rozklad sme využili už pri nepružnej zrážke: vnútorné sily môžu premeniť na iné formy energie celé T', ale $\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2$ ostane. Pri tuhom telese budú T' a $\vec{L}'$ energiou a momentom hybnosti otáčania.

Príklad 3.21. Majme sústavu N rovnakých telies s hmotnosťou m, ktoré sa každé s každým priťahujú interakciou danou rovnakým potenciálom $V(r) = kr^2/2$, kde r je vzdialenosť dvojice bodov. Čo viete o pohybe povedať pre ľubovoľné počiatočné podmienky? Čo v jednoduchšom prípade, keď majú na začiatku všetky telesá nulovú rýchlosť? □

3.3 Spriahnuté oscilátory

> „Physics is the subset of human experience which can be reduced to coupled harmonic oscillators.“
>
> Michael Peskin

3.3.1 Dve telesá na pružinke v jednom rozmere

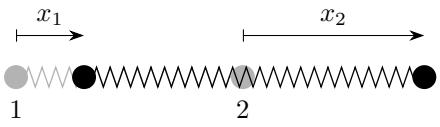
Najskôr sa pozrieme na najjednoduchšiu situáciu, dve telesá s rovnakou hmotnosťou m na jednej pružine tuhosti k a pokojovej dĺžky L – ktorá nebude až taká dôležitá – viazané na priamku. Z časti 3.1.3 o probléme dvoch telies vieme, že pohyb tejto dvojice bude daný pohybom fiktívneho telesa v potenciáli

$$U(r) = \frac{1}{2}k(r - L)^2 \tag{3.65}$$

a z časti 2.2.4 o harmonickom oscilátore vieme, že takéto teleso bude konať kmity s frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \ . \tag{3.66}$$

Pozrime sa však na situáciu priamo cez polohy pôvodných dvoch telies.



Označme výchylku z rovnovážnej polohy každého z telies x_1, x_2. Potom je sila, ktorou pružina pôsobí na telesá, $k(x_2 - x_1)$. Na teleso 1 s plusom, lebo natiahnutá pružina sa sťahuje a ťahá teleso smerom doprava, z rovnakého dôvodu s mínusom na teleso 2. Takto dostávame

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + kx_2 \ , \tag{3.67a}$$

$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - kx_2 \ . \tag{3.67b}$$

Rovnaké rovnice dostaneme derivovaním potenciálnej energie v tvare

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \ . \tag{3.68}$$

Označme $\omega_0^2 = k/m$ a poďme sa pozrieť na pohyb telies (zatiaľ) v ťažiskovej sústave, kde bude platiť $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$. Ťaháme na bránu a veľa sa nepýtame. Očakávame akýsi kmitavý pohyb, a teda skúsime riešenie v tvare $x_{1,2} = A_{1,2}e^{i\omega t}$. Dostaneme

$$-\omega^2 A_1 e^{i\omega t} = -\omega_0^2(A_1 - A_2)e^{i\omega t} \ , \tag{3.69a}$$

$$-\omega^2 A_2 e^{i\omega t} = -\omega_0^2(-A_1 + A_2)e^{i\omega t} \ , \tag{3.69b}$$

a z podmienky, aby tieto rovnice platili súčasne a pre všetky časy, dostaneme

$$\omega^2 A_1 = \omega_0^2(A_1 - A_2) \ , \tag{3.70a}$$

$$\omega^2 A_2 = \omega_0^2(-A_1 + A_2) \ . \tag{3.70b}$$

Máme teda štyri rovnice (dve komplexné) pre päť neznámych (dve komplexné a jednu reálnu), čo by sa mohlo zdať primálo. Uvidíme však, že to bude stačiť.

Sčítaním a odčítaním (3.70a) a (3.70b) dostaneme

$$\omega^2(A_1 + A_2) = 0 \ , \tag{3.71a}$$

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)(A_1 - A_2) = 0 \ . \tag{3.71b}$$

Táto sústava má dva druhy riešení. Prvým je státie $\omega^2 = 0, A_1 = A_2$ a druhým kmitanie proti sebe $\omega^2 = 2\omega_0^2, A_1 = -A_2$. Frekvenciu sme teda dostali takú istú ako v (3.66).

Trik so sčítaním a odčítaním sme mohli spraviť už na úrovni pohybových rovníc. Z (3.67) dostaneme

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 0 \ , \tag{3.72a}$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -2k(x_1 - x_2) \ . \tag{3.72b}$$

Ak zavedieme nové súradnice $\xi_1 = x_1 + x_2, \xi_2 = x_1 - x_2$, rovnice sa rozviažu

$$m\ddot{\xi}_1 = 0 \ , \tag{3.73a}$$

$$m\ddot{\xi}_2 = -2k\xi_2 \ . \tag{3.73b}$$

Vyriešiť ich je hračka a prejsť späť k pôvodným súradniciam nie je o nič ťažšie.

Príklad 3.22. Vyriešte rovnice (3.73), nájdite prechod od súradníc $\xi_{1,2}$ k súradniciam $x_{1,2}$ a vyjadrite všeobecné riešenie. □

Príklad 3.23. Ako by predchádzajúce úvahy vyzerali pre prípad telies s rôznou hmotnosťou? □

Výsledok. Výsledná frekvencia kmitavého pohybu bude

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}} \ . \tag{3.74}$$

■

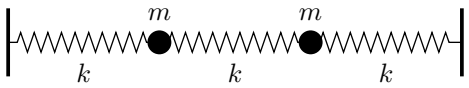
Na ten istý problém sa dá pozrieť ešte tretím spôsobom, ktorý sa ukáže ako najužitočnejší. Rovnice prepíšeme do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ . \tag{3.75}$$

Otázka rozviazania rovníc je teraz otázkou na vlastné vektory tejto matice. V báze vlastných vektorov bude mať matica diagonálny tvar, a teda rovnice pre patričné súradnice spolu nebudú komunikovať. Navyše vlastné hodnoty na diagonále nám budú hovoriť čosi o frekvenciách harmonického pohybu v týchto súradniciach.

Príklad 3.24. Diagonalizujte maticu z rovnice (3.75) a ukážte, že súradnice $\xi_{1,2}$ v (3.73) sú (až na násobok) komponenty vektora $\vec{x} = (x_1, x_2)$ v báze vlastných vektorov tejto matice. □

Na postup v maticovom jazyku sa teraz poriadne pozrieme v trochu komplikovanejšej situácii. Pôjde stále o dve telesá na pružine, ale pribudnú ešte dve ďalšie pružiny, ktoré budú jednotlivé telesá držať tak, ako na obrázku. Všetky tri pružiny majú tuhosť k.



Rovnovážna poloha pre dve telesá na troch pružinách.

S rovnakým označením x_1, x_2 ako predtým pre výchylky z rovnovážnej polohy je sila, ktorá pôsobí na teleso 1 od prvej pružinky $-kx_1$ – keď je x_1 kladné, sila ťahá naspäť a teda v zápornom smere – a sila, ktorá pôsobí na teleso 1 od spájajúcej pružinky je $+k(x_2 - x_1)$ – keď $x_2 - x_1 > 0$, pružinka je roztiahnutá, jej konce sa chcú stiahnuť, a teda pôsobí na teleso 1 v kladnom smere. Na základe podobných úvah je sila, ktorá pôsobí na teleso 2, rovná $-k(x_2 - x_1) - kx_2$, pohybové rovnice sú teda[49]

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \ , \tag{3.76a}$$

$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 \ . \tag{3.76b}$$

[49] Ako cvičenie môžete skúsiť túto sústavu vyriešiť hľadaním riešení v tvare $e^{i\omega t}$ podobne ako v predchádzajúcom prípade.

Tak ako predtým sme mohli dostať pravé strany tejto sústavy derivovaním potenciálnej energie

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \tag{3.77}$$

podľa x_1, resp. x_2.

V maticovom tvare tieto rovnice vyzerajú nasledovne

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \tag{3.78}$$

kde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Maticu na pravej strane aj s faktorom ω_0^2 označíme Ω^2, rovnice majú teda tvar $\ddot{\vec{x}} = -\Omega^2\vec{x}$. Ideou nášho postupu bude teraz vyjadriť vektor $\vec{x} = (x_1, x_2)$ v báze vlastných vektorov tejto matice. V takej báze bude matica diagonálna a sústava rovníc sa rozviaže, navyše na jej diagonále budú jej vlastné čísla.

Vlastné hodnoty nájdeme ako korene charakteristického polynómu

$$\det\left(\Omega^2 - \lambda\mathbb{1}\right) = 0 \tag{3.79a}$$

$$(2\omega_0^2 - \lambda)^2 - \omega_0^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2\omega_0^2 \mp \omega_0^2 \tag{3.79b}$$

a vlastné vektory potom riešením zodpovedajúcich rovníc $\Omega^2\vec{u}_{1,2} = \lambda_{1,2}\vec{u}_{1,2}$ dostaneme ako

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{3.80}$$

V tejto báze máme

$$\vec{x} = \xi_1\vec{u}_1 + \xi_2\vec{u}_2 \ , \ \ddot{\vec{x}} = \ddot{\xi}_1\vec{u}_1 + \ddot{\xi}_2\vec{u}_2 \ , \ \Omega^2\vec{x} = \xi_1\lambda_1\vec{u}_1 + \xi_2\lambda_2\vec{u}_2 \ , \tag{3.81}$$

a môžeme písať sústavu (3.78) v tvare

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} . \tag{3.82}$$

Prípadne sme si rovno mohli rozmyslieť, že to takto musí v báze vlastných vektorov dopadnúť. Dostali sme, že pohyby v smere vektorov $\vec{u}_{1,2}$ sú nezávislé a sú dané časovým vývojom harmonického oscilátora s frekvenciou $\sqrt{\lambda_{1,2}}$

$$\xi_1(t) = A_1e^{i\sqrt{\lambda_1}t} + B_1e^{-i\sqrt{\lambda_1}t} \ , \ \xi_2(t) = A_2e^{i\sqrt{\lambda_2}t} + B_2e^{-i\sqrt{\lambda_2}t} . \tag{3.83}$$

Časový vývoj vektora $\vec{x}$ v pôvodnej báze dostaneme jednoducho prechodom do novej bázy, vyriešením problému tam a prechodom späť

$$\vec{x}(t) = \xi_1(t)\vec{u}_1 + \xi_2(t)\vec{u}_2 = \tag{3.84a}$$

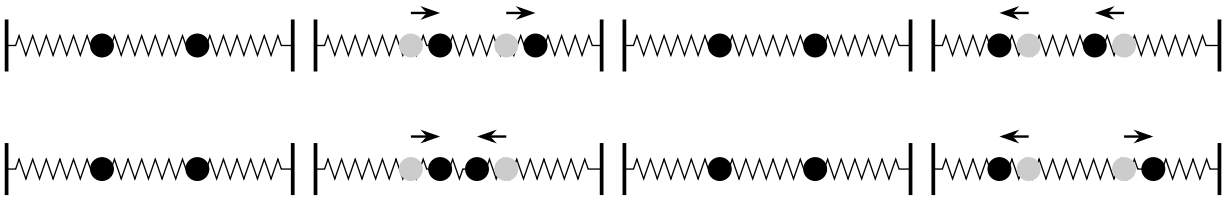
$$= \left[A_1e^{i\sqrt{\lambda_1}t} + B_1e^{-i\sqrt{\lambda_1}t}\right]\vec{u}_1 + \left[A_2e^{i\sqrt{\lambda_2}t} + B_2e^{-i\sqrt{\lambda_2}t}\right]\vec{u}_2 \tag{3.84b}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1(t) = A_1e^{i\omega_0 t} + B_1e^{-i\omega_0 t} + A_2e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + B_2e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t} \\ x_2(t) = A_1e^{i\omega_0 t} + B_1e^{-i\omega_0 t} - A_2e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} - B_2e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t} \end{array} \tag{3.84c}$$

pričom ako predtým neznáme parametre $A_{1,2}, B_{1,2}$ nájdeme z počiatočných podmienok pre $\vec{x}(0)$ a $\dot{\vec{x}}(0)$.

Predtým, ako sa pustíme do explicitných počítačiek alebo do všeobecných úvah, zosumarizujme si, čo sa stalo. Pôvodný problém pre dve previazané telesá sme previedli na dva nezávislé jednorozmerné, ktoré sme vedeli vyriešiť. Riešenie pôvodného problému nájdeme ako patričnú superpozíciu týchto jednorozmerných riešení, ktorá je daná tvarom počiatočnej podmienky.

Jednorozmerným riešeniam sa hovorí módy. Oplatí sa rozmyslieť si, čo presne módy (3.80) znamenajú. V prvom majú obe telesá vždy rovnakú výchylku. To znamená, že prostredná pružina sa nenaťahuje a akoby nebola. Telesá teda efektívne kmitajú iba na jednej pružine, preto frekvencia ω_0. V druhom prípade majú telesá vždy výchylku proti sebe, predĺženie prostrednej pružiny je teda vždy $2x$ a efektívne akoby to bola pružina s dvojnásobnou tuhosťou, odkiaľ pochádza faktor $\sqrt{3}$ vo výslednej frekvencii: spolu s krajnou pružinou pôsobí na teleso sila ako od pružiny s tuhosťou $3k$.



Pohyby zodpovedajúce módom (3.80). V prvom riadku prvý, v druhom riadku druhý.

V druhom móde sa poloha ťažiska nemení, ale v prvom áno. Celková vonkajšia sila pôsobiaca na telesá je súčtom síl od krajných pružín. Ľahko sa presvedčíme, že v prípade druhého módu je celková výsledná sila nulová. V prípade prvého módu

$$-kx_1 - kx_2 = -2kx \ , \tag{3.85}$$

pričom sme použili/označili $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$. Pre výchylku ťažiska máme

$$R(t) = \frac{m\, x_1(t) + m\, x_2(t)}{2m} = x(t) \ . \tag{3.86}$$

Z rovnice pre súradnicu x_1 máme

$$\ddot{x} = -\frac{2kx_1 - kx_2}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{3.87}$$

a teda sme dostali

$$2m\ddot{R} = 2m\ddot{x} = -2kx(t) \ . \tag{3.88}$$

Explicitne sme teda overili, že pre oba módy platí

$$\text{súčet hmotností} \ \times \ \text{zrýchlenie ťažiska} \ = \ \text{súčet vonkajších síl} \tag{3.89}$$

a tým pádom to platí v akomkoľvek pohybe, ktorý vznikne ako súčet týchto dvoch.

Na jednom príklade si ešte ilustrujeme, ako to presne vyzerá s hľadaním konkrétnej superpozície spĺňajúcej konkrétne počiatočné podmienky. Jedno z telies vychýlime z rovnovážnej polohy a uvoľníme, druhé pred uvoľnením držíme na mieste. Počiatočné podmienky teda vyzerajú nasledovne

$$x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \ , \ x_1(0) = -X_0 \ . \tag{3.90}$$

Pre všeobecné riešenie (3.84c) platí

$$\vec{x}(0) = (A_1 + B_1)\vec{u}_1 + (A_2 + B_2)\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 + A_2 + B_2 \\ A_1 + B_1 - A_2 - B_2 \end{pmatrix} \tag{3.91}$$

a

$$\dot{\vec{x}}(0) = i\omega_0(A_1 - B_1)\vec{u}_1 + i\sqrt{3}\omega_0(A_2 - B_2)\vec{u}_2 = i\omega_0 \begin{pmatrix} A_1 - B_1 + \sqrt{3}A_2 - \sqrt{3}B_2 \\ A_1 - B_1 - \sqrt{3}A_2 + \sqrt{3}B_2 \end{pmatrix} . \tag{3.92}$$

Týmto dostávame sústavu rovníc, ktorú ľahko vyriešime a dostaneme

$$A_1 = B_1 = -\frac{X_0}{4} \ , \ A_2 = B_2 = -\frac{X_0}{4} \ , \tag{3.93}$$

čo vedie na

$$\vec{x}(t) = -\frac{X_0}{2}\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\vec{u}_1 - \frac{X_0}{2}\frac{e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t}}{2}\vec{u}_2 = -\frac{X_0}{2}\left[\cos(\omega_0 t)\,\vec{u}_1 + \cos\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)\vec{u}_2\right] \tag{3.94}$$

a v pôvodných súradniciach

$$x_1(t) = -\frac{X_0}{2}\left[\cos(\omega_0 t) + \cos\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)\right] \ , \tag{3.95a}$$

$$x_2(t) = -\frac{X_0}{2}\left[\cos(\omega_0 t) - \cos\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)\right] \ . \tag{3.95b}$$

Použitím súčtových vzorcov pre kosínus

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \ , \tag{3.96}$$

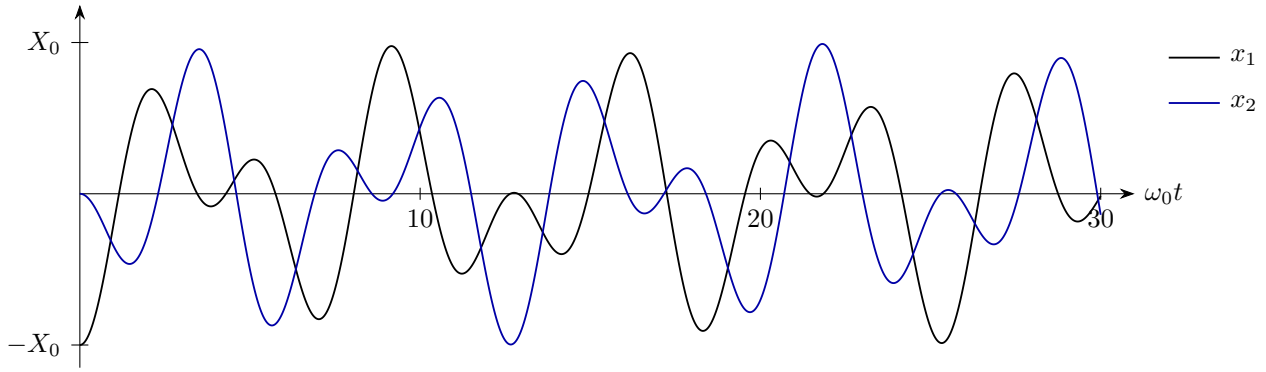
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \ , \tag{3.97}$$

dostaneme

$$x_1(t) = -X_0\cos\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\omega_0 t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\omega_0 t\right) \ , \tag{3.98a}$$

$$x_2(t) = -X_0\sin\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\omega_0 t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\omega_0 t\right) \ . \tag{3.98b}$$

čo na obrázku vyzerá nejak takto



Priebeh polôh x_1, x_2.

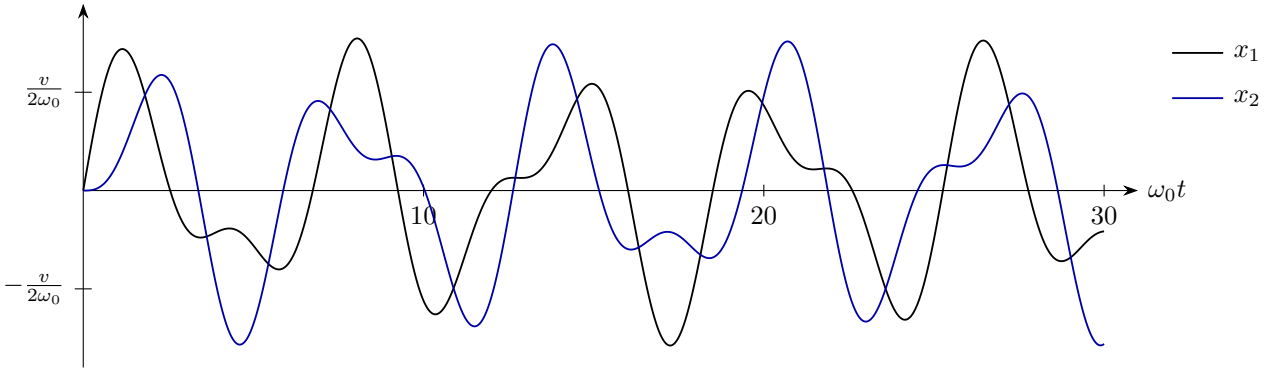
Príklad 3.25. Ako vyzerá riešenie v prípade, že v rovnovážnej polohe jednému z telies na začiatok udelíme rýchlosť v? □

Výsledok. Výsledný časový vývin polôh je

$$x_1(t) = \frac{v}{2\omega_0}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)\right], \tag{3.99a}$$

$$x_2(t) = \frac{v}{2\omega_0}\left[\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)\right], \tag{3.99b}$$

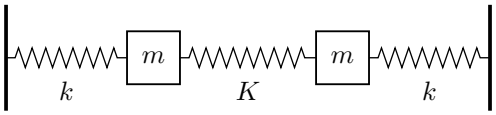
čo vyzerá nasledovne



Priebeh polôh x_1, x_2.

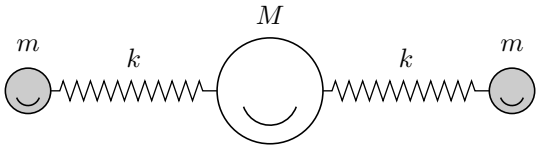
■

Príklad 3.26. Urobte podobnú analýzu pohybu ako v predchádzajúcich príkladoch pre sústavu na obrázku.



T. j. nájdite módy a ich frekvencie, všeobecný tvar riešenia v pôvodných súradniciach a konkrétne riešenie pre nejakú konkrétnu počiatočnú podmienku. □

Príklad 3.27. Urobte podobnú analýzu pohybu ako v predchádzajúcich príkladoch pre sústavu na obrázku.



Ide o zjednodušený – jednorozmerný – model trojatómovej molekuly. □

3.3.2 Tri a viac telies na pružinkách

Pre tri telesá na pružinkách bude situácia analogická a maticový zápis pohybových rovníc

$$M\ddot{\vec{x}}(t) = -K\vec{x} \tag{3.100}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -M^{-1}K\vec{x} = -\Omega^2\vec{x} \tag{3.101}$$

zostane rovnaký. S rozdielom, že matice M, K, Ω^2 budú tentoraz 3×3 a vektor $\vec{x}$ bude mať 3 komponenty. Pripomeňme, že matica M je diagonálna (na diagonále má hmotnosti telies) a matica K je symetrická, lebo jej prvky sú druhé derivácie potenciálnej energie, napríklad $U = \sum_{i<j} k_{ij}(x_i - x_j)^2/2$. Ako výsledok budeme mať tri vlastné vektory a tri charakteristické frekvencie – dané odmocninami vlastných čísel matice Ω[250]. Každý z módov sa opäť bude v čase vyvíjať harmonicky a všeobecné riešenie bude superpozícia takýchto harmonických pohybov

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{3} \left(A_i e^{i\omega_i t} + B_i e^{-i\omega_i t}\right) \vec{u}_i \ . \tag{3.102}$$

A keď telesá nebudú tri, ale bude ich N, „jediné“, čo sa v tejto rovnici zmení, bude horná hranica sumy.

Prečo si to ale všetko hovoríme? Priznajme si, telieska na pružinkách sú síce pekná, ale neveľmi praktická úloha. Odpoveďou na túto otázku sú malé kmity. Tým chceme povedať, že pre ľubovoľnú sústavu interagujúcich hmotných bodov bude platiť, že blízko stabilnej rovnovážnej polohy bude jej pohyb superpozíciou harmonických kmitov.

Potenciálna energia sústavy N bodov v jednom rozmere je daná funkciou $V(x_1, \ldots, x_N)$. Podmienka rovnováhy v konfigurácii $\bar{x}$ hovorí, že na žiadne z telies nepôsobí sila

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x_k}\right|_{x=\bar{x}} = 0 \ \forall k \ . \tag{3.103}$$

Pre malé výchylky z tejto konfigurácie môžeme potom aproximovať potenciál jeho Taylorovým rozvojom do druhého rádu

$$V(x_1, \ldots, x_N) \approx V(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=\bar{x}} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \tag{3.104}$$

a môžeme polohu každého z telies začať merať od rovnovážnej polohy, t. j. $\bar{x} = 0$. Pohybové rovnice

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_j K_{ij}x_j \tag{3.105}$$

majú potom presne taký tvar ako pre telieska na pružinkách, pričom pre element K_{ij} matice K dostaneme explicitne

$$K_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=\bar{x}} \ . \tag{3.106}$$

[50] Ak telesá nemajú rovnaké hmotnosti, matica $\Omega^2 = M^{-1}K$ nie je symetrická. Napriek tomu má reálne vlastné čísla a úplnú sústavu vlastných vektorov, lebo je podobná symetrickej matici: $\Omega^2 = M^{-1/2}\left(M^{-1/2}KM^{-1/2}\right)M^{1/2}$, kde $M^{-1/2}$ je diagonálna matica s prvkami $1/\sqrt{m_i}$. Ak je K pozitívne definitná (čo bude podmienkou stability, ako uvidíme o chvíľu), sú tieto vlastné čísla aj kladné.

Vlastné čísla tejto matice hovoria, o aký druh rovnováhy ide. Ak sú všetky kladné, rovnováha je stabilná a môžeme zopakovať postup, ktorý viedol k (3.102), resp. k N-telesovej verzii. Ak má nulovú vlastnú hodnotu, typicky to znamená, že sústava nie je zvonku nijak ukotvená a môže sa v priestore voľne pohybovať. No a ak má zápornú vlastnú hodnotu, v zodpovedajúcom móde nebude pohyb sústavy ohraničený a exponenciálne sa bude z rovnovážnej polohy vzďaľovať až do situácie, keď nebude aproximácia (3.104) dobrá. V princípe by sa to dalo vyriešiť tým, že systém na začiatku nastavíme tak, že pohyb nebude mať žiadnu zložku v tomto móde. Akokoľvek malá nepresnosť by ale túto situáciu pokazila a tým pádom to nie je veľmi praktické.

Matica K má byť teda pozitívne definitná[51]. To je pri funkciách viacerých premenných analógia kladnej druhej derivácie ako podmienky pre lokálne minimum funkcie.

Príklad 3.28. Vo svete máme často do činenia s dvojčasticovými interakciami, keď sa dá potenciál rozpísať nasledovne

$$V(x_1, \ldots, x_N) = \sum_i V_i(x_i) + \sum_i \sum_{j<i} U_{ij}(|x_i - x_j|) \ . \tag{3.107}$$

Skúste úvahy tejto kapitoly dotiahnuť ďalej pre takýto tvar potenciálu. Čo platí o existencii nulovej vlastnej hodnoty v takomto prípade bez vonkajších potenciálov V_i? □

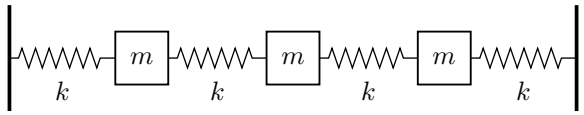
Všeobecná situácia pre telesá v troch rozmeroch by nevyzerala veľmi inak, len by sme namiesto matice $N \times N$ a N módov s N frekvenciami mali maticu $3N \times 3N$ a $3N$ módov.

Príklad 3.29. Explicitne rozpíšte situáciu pre tri telesá v troch rozmeroch, t. j. pre prípad

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = V_1(\vec{x}_1) + V_2(\vec{x}_2) + V_3(\vec{x}_3) + U_{12}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + U_{13}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|) + U_{23}(|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|) \ . \tag{3.108}$$

Ak máte pocit, že viete spraviť zjednodušenia, ktoré neuberú na esencii problému, smelo ich spravte. □

Príklad 3.30 (HW)**.** Majme tri rovnaké telesá hmotnosti m, spojené pružinkami s rovnakou tuhosťou do lineárnej retiazky a na krajoch upevnené na fixovanú stenu.



- Aké sú pohybové rovnice pre výchylku z rovnovážnej polohy každého telesa?
- Ako vyzerajú tieto rovnice v maticovom tvare? Aké sú frekvencie jednotlivých módov? Nájdite zodpovedajúce vlastné vektory a stručne opíšte pohyb, ktorý telesá vykonávajú v tom ktorom móde.
- Ukážte, že v módoch, v ktorých sa mení poloha ťažiska, platí rovnica

$$\text{súčet hmotností} \ \times \ \text{zrýchlenie ťažiska} \ = \ \text{súčet (vonkajších) síl} \ .$$

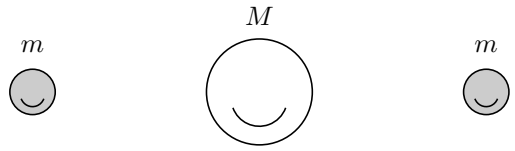
[51] Presnejšie semidefinitná, ale pri prechode do ťažiskovej sústavy dostávame už pozitívne definitnú maticu v $N-1$ premenných.

□

Príklad 3.31. Interakcia dvoch skutočných neutrálnych atómov alebo molekúl je pomerne dobre (najmä pre atómy vzácnych plynov) popísaná Lennard-Jonesovým potenciálom

$$U(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right] .$$

- Rozmyslite si, o akú interakciu ide.
- Aká je rovnovážna vzdialenosť častíc a efektívna pružinová konštanta k, ktorá popisuje malé výchylky z tejto polohy?
- Majme molekulu ako na nasledujúcom obrázku.

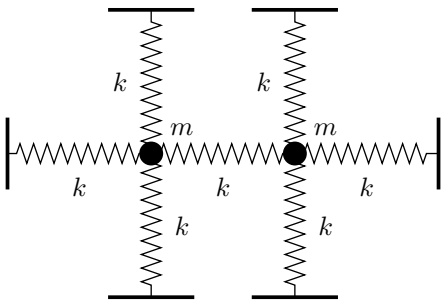


  Interakcia atómov m je daná jednou sadou parametrov v LJ potenciáli a interakcia atómov m a M druhou sadou. Aká je rovnovážna konfigurácia tejto sústavy a možné frekvencie malých kmitov okolo tejto polohy?

- Ako vyzerajú zodpovedajúce módy pohybu molekuly?

□

Príklad 3.32. Majme konfiguráciu telies a pružín ako na obrázku

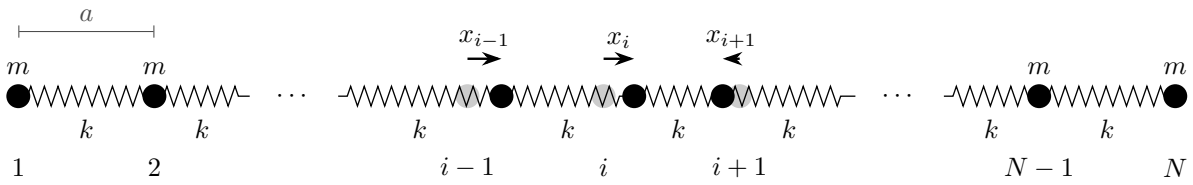


Koľko bude mať tento systém módov? Viete aspoň niektoré z nich uhádnuť?

Napíšte pre túto sústavu pohybové rovnice a linearizujte ich vo výchylkách telies z rovnovážnej polohy. Potom napíšte rovnice v maticovom tvare, maticu diagonalizujte a módy explicitne nájdite. □

3.3.3 Lineárna retiazka z (veľmi) veľa telies na pružinkách

Ako sme sa presvedčili v predchádzajúcej časti, pridanie druhého telesa k osamotenému telesu prinieslo nečakané výsledky a značné obohatenie problému. Ako sme zistili potom, pridanie ďalšieho telesa už až tak veľa vody nenamútilo, pribudli nové stupne voľnosti, ale nič principiálne nové sa nestalo. Pridávanie ďalších telies na tom tiež nič nezmenilo a situácia začne byť zaujímavejšia až v prípade, keď telies bude (veľmi) veľa.



Majme lineárnu retiazku, ktorá sa skladá z N telies hmotnosti m, medzi ktorými sú pružinky tuhosti k a v pokoji vzdialenosti a. Celková hmotnosť retiazky je teda $M = Nm$ a jej celková dĺžka $L = Na$. Keď sa v retiazke telesá vychýlia, označíme posunutie i-teho telesa od pôvodnej polohy x_i (ako na obrázku). Keď preň napíšeme Newtonovu pohybovú rovnicu, dostaneme

$$m\ddot{x}_i = k(x_{i+1} - x_i) - k(x_i - x_{i-1}) \ . \tag{3.109}$$

Tieto rovnice neplatia pre hraničné telieska $i = 1, N$, k dynamike ktorých sa ešte vrátime. Urobíme teraz nasledovné označenia

$$x'_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{a} \ , \ x''_i = \frac{x'_i - x'_{i-1}}{a} \ . \tag{3.110}$$

Motivácia je taká, že plánujeme poslať počet telies N do nekonečna tak, že ich vzdialenosť sa bude vhodne zmenšovať. Tieto vzťahy sa potom začnú náramne podobať na prvú a druhú deriváciu, presne čoho a podľa čoho, uvidíme čoskoro. S týmto označením prejde rovnica (3.109) na

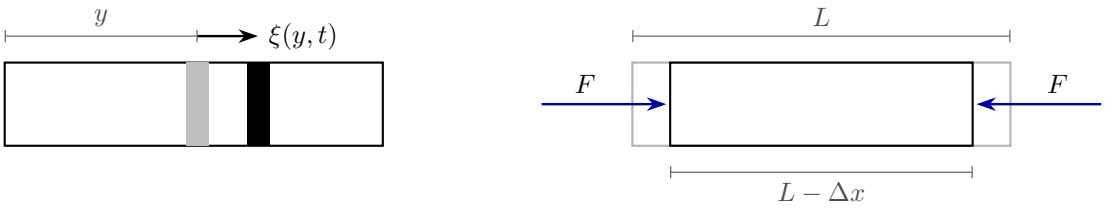
$$\ddot{x}_i = \frac{ka^2}{m} x''_i \ . \tag{3.111}$$

A teraz sa pustime do limity $N \to \infty$. To sa dá robiť rôzne. Najjednoduchšie je postupne prikladať ďalšie a ďalšie teleso na koniec retiazky, tým ale žiadnu rozumnú limitu nedostaneme. Také teleso by malo nekonečnú hmotnosť a nekonečnú dĺžku, čo je v lepšom prípade nefyzikálne, v horšom blbosť. Chceme, aby veličiny M a L zostali pri pridávaní telies rovnaké. To znamená, že s každým ďalším telesom musíme zmenšiť m a a, konkrétne

$$m = \frac{M}{N} \ , \ a = \frac{L}{N} \ . \tag{3.112}$$

Z toho vidíme, že pomer m/a bude pri pridávaní telies konštantný a rovný M/L. Toto číslo udáva dĺžkovú hustotu materiálu, ktorý telieska vytvoria a označíme ho λ_0. Rovnica (3.111) teda prejde na

$$\ddot{x}_i = \frac{ka}{\lambda_0} x''_i \ . \tag{3.113}$$



Skôr, ako sa zameriame na výraz ka, pozrime sa, čo sa stane s $\ddot{x}$ a x''. Z retiazky v limite $N \to \infty$ vznikne spojité teleso a výchylky pôvodných telies sa teraz prejavia ako deformácie tohto telesa. Táto

deformácia je daná funkciou dvoch premenných $\xi(y,t)$, kde y označuje vzdialenosť od ľavého okraja pôvodnej retiazky. Hodnota tejto deformácie bude výchylka niektorého z pôvodných telies, otázka je, ktorého. A odpoveď nie je ťažké nájsť: bude to také teleso, aby platilo $ia = y$. V limite $N \to \infty$ teda

$$x_i \to \xi(ia,t)\ ,\ x_{i+1} \to \xi(ia+a,t) \tag{3.114}$$

a teda

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{a} \to \frac{\xi(ia+a,t)-\xi(ia,t)}{a} \to \frac{\partial\xi(y,t)}{\partial y}\ . \tag{3.115}$$

A podobne

$$x_i'' \to \frac{\partial^2\xi(y,t)}{\partial y^2}\ . \tag{3.116}$$

Z definície časovej derivácie priamočiaro dostávame, že

$$\ddot{x}_i \to \frac{\partial^2\xi(y,t)}{\partial t^2} \tag{3.117}$$

a vidíme, že takto zadefinované veličiny majú rozumnú – rozumej konečnú – limitu pri $N \to \infty$. Ostáva si teda rozmyslieť, čo s výrazom ka.

Čisto z matematickej úvahy vidíme, že tento výraz musí byť konečný pri $N \to \infty$, aby sme dostali v (3.113) nejakú netriviálnu dynamiku. Môžeme teda povedať, že $ka \to C$, t. j. $k = CN/L$, kde C je nejaké konečné číslo charakterizujúce daný materiál. Má to však aj nejaké fyzikálne pozadie, ktoré nám aj odhalí interpretáciu tohto čísla.

Zoberme retiazku a stlačme ju konečnou silou F z oboch strán. Telesá si nájdu nové rovnovážne polohy a retiazka sa skráti o Δx, čo znamená, že vzdialenosť medzi každou dvojicou sa skráti o $\Delta a = \Delta x/N$. Keď sa pozrieme na teliesko úplne na kraji retiazky, pôsobí naň vonkajšia sila F a sila rozťahujúcej sa retiazky $k\Delta a$. V pokoji sa tieto dve sily vyrovnajú a

$$F = k\Delta a = k\frac{\Delta x}{N} = ka\frac{\Delta x}{L}\ . \tag{3.118}$$

V materiálovej fyzike sa veličine $\Delta x/L$ hovorí relatívne predĺženie a konštante úmernosti C medzi vonkajšou pôsobiacou silou a relatívnym predĺžením tuhosť v ťahu. Súvisí s modulom pružnosti (Youngovým modulom) E materiálu, ktorý je pomerom napätia, t. j. sily na jednotku plochy prierezu, a relatívneho predĺženia: $C = ES$, kde S je plocha prierezu. Pre slušné materiály je C konečné, a tak musíme pre $N \to \infty$ posielať k do nekonečna. To má ale dobrý význam. Pridávaním teliesok skracujeme vzdialenosti medzi nimi a tým pádom aj skracujeme vzdialenosti, o ktoré sa pri presúvaní telies, a.k.a. deformovaní výsledného spojitého média, predlžujú alebo skracujú jednotlivé pružiny. Ak ale majú mať pružiny šancu reagovať na konečné vonkajšie sily, musí ich tuhosť rásť nad všetky medze.

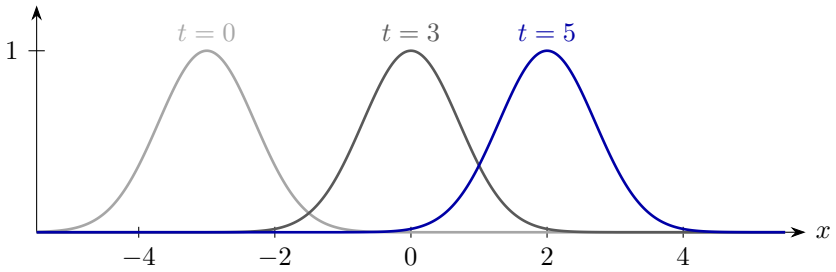
Pohybové rovnice pre N telies sme teda zabalili do jednej rovnice popisujúcej deformáciu celej retiazky. Keďže výchylky jednotlivých telies x_i už nepotrebujeme, budeme odteraz polohu v retiazke označovať zvyčajným x namiesto y a rovnica má tvar

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{C}{\lambda_0}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}\ . \tag{3.119}$$

Tejto rovnici sa hovorí vlnová a hneď sa pozrieme prečo a čo z toho vyplýva. Limita nekonečného N si ale zaslúži komentár. Videli sme, ako sme museli jednotlivé parametre nastavovať a meniť spoločne s meniacim sa N, aby sme v konečnom výsledku dostali čosi rozumné. A táto požiadavka rozumnosti nám vlastne diktovala, ako máme tieto zmeny robiť. Ak by sme zvolili k príliš malé, napríklad nezávislé od N, materiál by bol príliš mäkký. Jeho deformácie by ničím neboli ovplyvňované a pohybovali by sa rovnomerne priamočiaro podľa rovnice $\partial^2\xi/\partial t^2 = 0$. Naopak, ak by sme spravili pružiny príliš tuhé, napríklad $k \sim N^2$, v limite $N \to \infty$ by z rovnice úplne vypadla časová derivácia.

A ešte jedna poznámka. Definície derivácií (3.110) sú pekné, ale mohli sme ich vymyslieť mnohými inými spôsobmi. Nehralo by to úlohu vo výsledku? Odpoveď je, že hralo, ale malú. Konkrétne by to viedlo na členy, ktoré by v limite $N \to \infty$ aj tak vypadli. Inak povedané, rozdiel je až vo vyššom ráde v a.

Vlnová rovnica. Vlna je profil, ktorý sa v priestore nemení, iba sa posúva nejakým smerom rýchlosťou v.



Profil $f(x-t) = e^{-(x-t+3)^2}$ pre časy $t = 0, 3, 5$.

V jednom rozmere to znamená pre profil daný predpisom $f(z)$ vlnu v tvare

$$f(x \pm vt)\ . \tag{3.120}$$

Na toto vyjadrenie sa treba pozerať ako na funkciu dvoch premenných $\xi(x,t)$, ktorá vznikne tak, že do profilu $f(z)$ dosadíme potrebnú kombináciu hodnôt x a t.

Keď spočítame patričné parciálne derivácie

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 f''(x \pm vt)\ , \tag{3.121}$$

kde čiarka označuje deriváciu funkcie f podľa jej argumentu, a

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} = f''(x \pm vt)\ , \tag{3.122}$$

zistíme, že takáto funkcia spĺňa vlnovú rovnicu (3.119), ak $v^2 = C/\lambda_0$. Treba si ale dávať pozor, vlnová rovnica má aj iné riešenia, pretože ľubovoľná superpozícia v tvare

$$\xi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \tag{3.123}$$

je riešením vlnovej rovnice, ale toto riešenie sa už v tvare (3.120) pre jednu funkciu napísať nedá. Platí aj opak: každé riešenie vlnovej rovnice sa dá zapísať v tvare (3.123). Vidno to, keď namiesto x a t zavedieme premenné $s_\pm = x \pm vt$. V nich má vlnová rovnica tvar $\partial^2\xi/\partial s_+\partial s_- = 0$ a jej riešením je súčet funkcie iba s_+ a funkcie iba s_-.

Zvukové vlny na retiazke. Vidíme, že v retiazke sa môžu šíriť vlny. Kúsky retiazky kmitajú v smere retiazky, dochádza k zhusťovaniu a zrieďovaniu materiálu, z ktorého sa retiazka skladá. Takýmto vlnám hovoríme zvuk. Rýchlosť šírenia je

$$v = \sqrt{\frac{C}{\lambda_0}}\,, \tag{3.124}$$

čo dáva zmysel. Vlny sa šíria tým rýchlejšie, čím je materiál tuhší – lebo pri rovnakých deformáciách pôsobia väčšie sily, napríklad v kove sa šíria rýchlejšie ako vo vzduchu – a čím je pri danej tuhosti ľahší – lebo jeho kúsky majú menšiu zotrvačnosť.

Zaujímavé je porovnať materiály, ktorých mriežka je tvorená atómami toho istého chemického prvku, ale rôznych izotopov. Tuhosť takých materiálov je takmer rovnaká, lebo tá je daná chemickými vlastnosťami, ale hustota je rôzna, pretože hmotnosť jednotlivých atómov je rôzna. A tento rozdiel sa dá experimentálne pozorovať.

Rovinné vlny. Funkciám v tvare

$$\xi(x,t) = e^{i(px-\omega t)} \tag{3.125}$$

sa hovorí rovinné vlny. To preto, lebo v trojrozmernom prípade sú plochy, na ktorých je výchylka rovnaká, dané vzťahom $\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega t = const$ a teda roviny kolmé na vektor $\vec{p}$, ktoré sa s časom v smere tohto vektora pohybujú. Keďže sú komplexné, nebudú mať význam ako fyzikálne riešenia vlnovej rovnice, ale dôležité – a vlastne všetky – riešenia sa z nich budú dať poskladať.

Všimnite si teda, že ω môže byť ľubovoľné, ale p je potom dané podmienkou, že rovinná vlna spĺňa vlnovú rovnicu, $p = \pm\omega/v$.

Príklad 3.33 (Retiazka bez spojitej limity)**.** Pohybové rovnice (3.109) pre nekonečnú retiazku sa dajú vyriešiť aj bez prechodu k spojitej limite. Index telesa označme n, aby sa nemýlil s imaginárnou jednotkou.

- Dosaďte do nich výchylky v tvare $x_n = A\,e^{i(pna-\omega t)}$ a ukážte, že ide o riešenie, ak

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\frac{pa}{2}\right|\,. \tag{3.126}$$

- Ukážte, že pre dlhé vlny, $pa \ll 1$, dostaneme $\omega = vp$ s rovnakou rýchlosťou v ako z vlnovej rovnice. Akým vlnovým dĺžkam zodpovedá podmienka $pa \ll 1$?

- Aká je najvyššia frekvencia, s ktorou môže retiazka kmitať? Ako sa pri nej pohybujú susedné telieska?

- Prečo nemá zmysel uvažovať p mimo intervalu $(-\pi/a, \pi/a]$?

□

Návod. Pri dosadení sa hodí $e^{ipa} + e^{-ipa} - 2 = 2(\cos pa - 1) = -4\sin^2(pa/2)$. ■

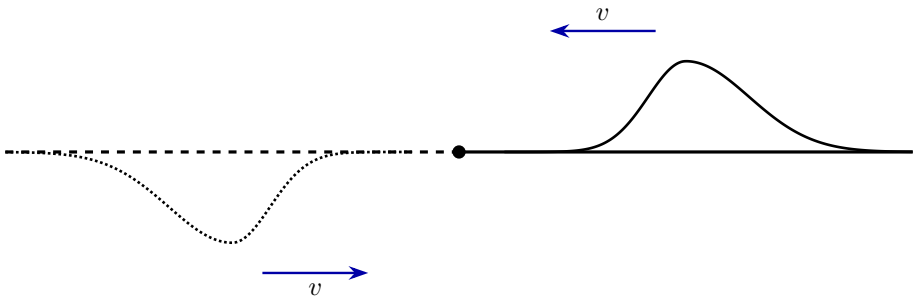
Doterajšie úvahy fungovali pre vnútro retiazky, respektíve pre retiazku, ktorá je efektívne nekonečná. Vlnová rovnica popisuje dynamiku takéhoto prostredia lokálne. Aj v rýchlosti vystupujú iba "lokálne" vlastnosti prostredia ako hustota a nie "globálne" vlastnosti ako dĺžka alebo celková hmotnosť. Prostredie však nemusí byť nekonečné a na jeho okrajoch si už s vlnovou rovnicou nevystačíme.

Odraz vlny a stojaté vlny. Majme teda polonekonečné prostredie, napríklad retiazku, ktorá je v jednom bode ukotvená. V tomto bode zvolíme počiatok súradníc $x = 0$ a prostredie necháme nachádzať sa v časti $x > 0$. Na rozhranie potom necháme sprava doľava dopadať nejaký vlnový profil daný priebehom $f(x + vt)$. Fakt, že koniec retiazky je ukotvený, môžeme matematizovať požiadavkou

$$\xi(0, t) = 0 \ \forall t \ , \tag{3.127}$$

lebo v reči pôvodnej retiazky z N telies to zodpovedá podmienke $x_1 = 0$. Pre tento profil ju vieme identicky splniť riešením v tvare

$$\xi(x, t) = f(x + vt) - f(-x + vt) \ . \tag{3.128}$$



Takéto ξ spĺňa vlnovú rovnicu, lebo je v tvare (3.123) a z jednoznačnosti riešenia je to jediné riešenie. Čomu zodpovedá fyzikálne? Ak rozšírime existenciu média aj do záporných x, druhý člen zodpovedá zrkadlovo prevrátenému profilu f, ktorý ale na rozhranie dopadá zľava doprava a má výchylku opačným smerom. Po dostatočne dlhom čase pôvodné riešenie prejde do regiónu záporných x a vyjde z neho toto rukou pridané riešenie s opačnou výchylkou. Jeho interpretácia je potom taká, že ide o odraz pôvodného profilu od pevného konca, ktorý ho vráti naspäť, ale kvôli znamienku mínus otočený.

Ak by bol koniec retiazky naopak voľný, na prvé teliesko retiazky by nesmela pôsobiť žiadna sila – lebo pri nekonečne malej hmotnosti by malo nekonečne veľké zrýchlenie. Z toho a z (3.109) dostávame, že $x_1 = x_2$ a[52]

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \ \forall t \ . \tag{3.129}$$

Príklad 3.34. Ako vyzerá odraz profilu od voľného konca? □

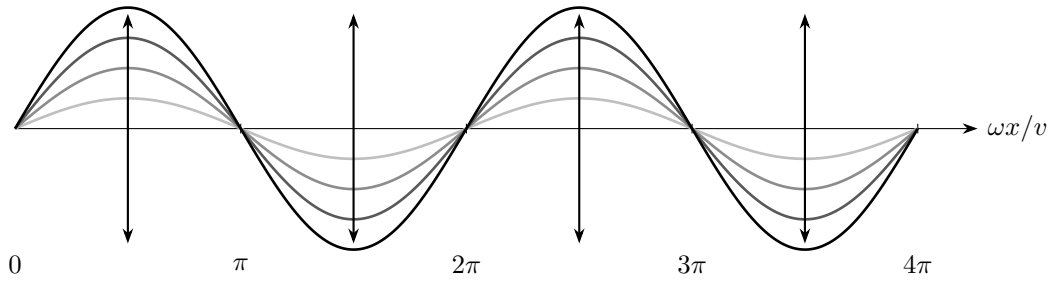
Riešenie. Profil sa odrazí presne taký, ako prišiel, bez otočenia. ■

Ak v týchto úvahách zoberieme za profil f vhodnú kombináciu rovinných vĺn (3.125), dostaneme riešenia v tvare

$$\xi_\omega(x, t) = \begin{cases} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \\ \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \\ \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \\ \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \end{cases} \ . \tag{3.130}$$

Takýmto riešeniam sa hovorí stojaté vlny. To preto, že ich profil stojí na mieste a nikam sa nepohybuje, len sa v čase hompáľa hore a dole.

[52] V teórii parciálnych diferenciálnych rovníc sa tejto okrajovej podmienke hovorí Neumannova, okrajovej podmienke (3.127) pre pevný koniec sa hovorí Dirichletova.



Stojaté vlnenie.

Keďže je vlnová rovnica lineárna, akákoľvek superpozícia stojatých alebo rovinných vĺn je jej riešením. Navyše akékoľvek riešenie sa dá ako takáto superpozícia vyjadriť – aj keď toto druhé tvrdenie je, na rozdiel od prvého, celkom netriviálne. Explicitný príklad tohto uvidíme čoskoro v prípade vlnenia na úsečke. Výhodou stojatých vĺn je, že sú reálne a ľahko sa v nich spĺňajú štandardné okrajové podmienky. Výhodou rovinných vĺn je, že sa s nimi o čosi lepšie počíta.

Z konštrukcie stojatých vĺn vidieť, že vznikajú ako zloženie profilov cestujúcich opačným smerom. Ich vzájomnou interakciou teda dochádza k vzniku vlnenia, ktoré nikam necestuje.

Aj sínusové aj kosínusové stojaté vlny majú miesta, kde sa vôbec nič nedeje. Týmto miestam hovoríme uzly – po anglicky nodes. Miestam, kde dochádza k najväčšej výchylke, sa v slovenčine hovorí kmitne, v angličtine jednoducho antinodes.

Pre vlnenie na polpriamke s ukotveným koncom vidíme, že musíme mať v mieste $x = 0$ uzol, a teda riešenie bude mať tvar

$$\xi(x,t) = \int d\omega \left(A_\omega \sin(\omega t) + B_\omega \cos(\omega t)\right) \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \ . \tag{3.131}$$

Vlny na úsečke. Čo v prípade, keď je struna konečná s dĺžkou L a je upevnená na oboch koncoch? Potom máme okrem podmienky v $x = 0$ aj rovnakú podmienku v $x = L$,

$$\xi(L,t) = 0 \ \forall t \ . \tag{3.132}$$

Ak by to pre stojatú vlnu s frekvenciou ω dopadlo tak, že by mala v mieste $x = L$ uzol, nechcela by tam kmitať tak či tak a táto podmienka by bola splnená, opäť identicky. Pre také frekvencie platí

$$\frac{\omega}{v} L = n\pi \ , \tag{3.133}$$

čo je pre danú situáciu podmienka na frekvenciu a dostávame

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L} \ . \tag{3.134}$$

Keď z (3.131) zoberieme iba takéto frekvencie, dostaneme funkciu, ktorá určite spĺňa aj vlnovú rovnicu, aj všetky okrajové podmienky, a teda funkcie

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L} t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{3.135}$$

popisujú kmitanie struny. Všimnite si, že ide o nekonečnú analógiu rozvoja kmitania N oscilátorov do módov (3.102). Tak ako v tom prípade tvorili módy bázu N-rozmerného priestoru výchylok oscilátorov, tvoria funkcie $\sin(n\pi x/L)$ bázu nekonečnorozmerného priestoru výchylok ukotvenej retiazky – t. j. priestoru funkcií s danou okrajovou podmienkou – a hovorí sa im tiež módy. V tomto duchu spomeňme už len to, že ide o vlastné funkcie operátora $\partial^2/\partial x^2$ podobne, ako boli módy vlastné vektory matice Ω^2. Viac už ale necháme na kurzy funkcionálnej analýzy a poďme späť k fyzike.

Spomeňme ešte koncept vlnovej dĺžky, ktorá sa štandardne označuje λ. Ide o vzdialenosť medzi dvoma bodmi s rovnakou fázou a dáva zmysel nielen pre stojaté vlny a nielen pre vlny na úsečke, ale pre akýkoľvek periodický profil. Ak označíme frekvenciu[53] vlnenia – t. j. prevrátenú hodnotu periódy, času medzi opakovaním dvoch rovnakých situácií v danom mieste x – ako f, vcelku priamočiaro platí

$$\lambda f = v \ , \ \omega = 2\pi f \ . \tag{3.136}$$

Majme teraz nejakú počiatočnú výchylku $\xi(x,0)$ a pre jednoduchosť majme na začiatku nulovú rýchlosť celej retiazky, t. j. $\dot{\xi}(x,0) = 0$. Táto počiatočná podmienka sa dá, ako každá iná funkcia, vyjadriť v báze (3.130) pre $t = 0$, navyše musí spĺňať patričnú okrajovú podmienku. Keď teraz rozvinieme počiatočnú podmienku do patričnej bázy stojatých vĺn $\xi_n(x,t) = \cos(\omega_n t)\sin(n\pi x/L)$

$$\xi(x,0) = \sum c_n \xi_n(x,0) \ , \tag{3.137}$$

jej časový vývoj bude daný patričnou superpozíciou časových vývojov bázových funkcií

$$\xi(x,t) = \sum c_n \xi_n(x,t) \ . \tag{3.138}$$

Táto rovnica je špeciálnym prípadom rozvoja (3.135) s $A_n = 0$ a $B_n = c_n$.

Príklad 3.35. Ako by tieto rozklady vyzerali pre všeobecnú počiatočnú rýchlosť elementov retiazky $\dot{\xi}(x,0) = w(x)$? □

Príklad 3.36. Ukážte, že koeficienty c_n možno dopočítať zo vzťahu

$$c_n = k \int_0^L dx\, \xi(x,0)\, \xi_n(x,0) \tag{3.139}$$

a dopočítajte konštantu k. □

Návod. Ukážte, že platí

$$\int_0^L dx\, \xi_n(x,0)\, \xi_m(x,0) = K\delta_{m,n} \ . \tag{3.140}$$

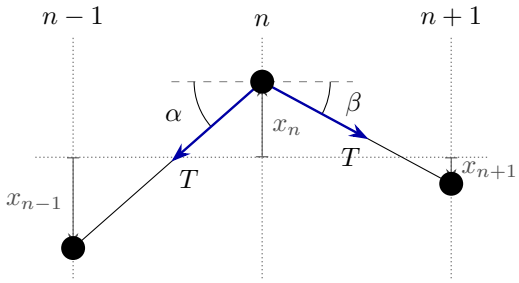
■

[53] Aj tomuto aj parametru ω sa hovorí frekvencia, ak je nutné zdôrazniť medzi nimi rozdiel, tomu druhému sa hovorí uhlová frekvencia.

Priečne vlnenie retiazky a gitara. Kmitania, ktorými sme sa zaoberali doteraz, boli pozdĺžne – výchylky teliesok, z ktorých sa v spojitej limite retiazka skladala, boli v tom istom smere, v ktorom sa šírila vlna. Teraz sa pozrieme na kmitanie, pri ktorom sa telieska pohybujú kolmo na retiazku.

Retiazka bude v tomto prípade natiahnutá silou T. To znamená, že jednotlivé pružiny sa snažia telieska pritiahnuť k sebe touto silou a bráni im v tom nejaký vonkajší agent, ktorý drží krajné telieska na mieste. Ako cvičenie sa môžete pozrieť na situáciu z predchádzajúcich úvah, keď pružiny bez výchyliek teliesok nepôsobia žiadnou silou. Vtedy by sme dostali pre telieska v y-ovom smere silu rádu a^3, teda o rád menšiu, ako potrebujeme, a v spojitej limite by sme žiadne vlny nedostali.

Výchylky teliesok budeme stále označovať x_n, ale tentoraz vo zvislom smere, a predpokladáme, že vo vodorovnom smere sa telesá nehýbu – tomu pohybu sme sa už venovali. Pozrieme sa na obrázok



a dostaneme silu pôsobiacu na n-té teleso

$$T \sin\beta - T \sin\alpha \ , \tag{3.141}$$

kde α a β sú uhly podľa obrázka. Budeme uvažovať malé výchylky, a teda môžeme použiť $\sin\beta \approx \tan\beta$. Z toho istého obrázka si premyslíme, že $\tan\beta = x'_n$ a $\tan\alpha = x'_{n-1}$. Tak dostaneme pohybovú rovnicu v tvare

$$m\ddot{x}_n = Tax''_n \ . \tag{3.142}$$

Keď v nej spravíme rovnakú limitu $N \to \infty$, dostaneme vlnovú rovnicu s rýchlosťou šírenia vĺn $v = \sqrt{T/\lambda_0}$. Ak má struna fixované konce a dĺžku L, dostaneme pre frekvencie – tie štandardné, nie uhlové – zo vzťahu (3.134)

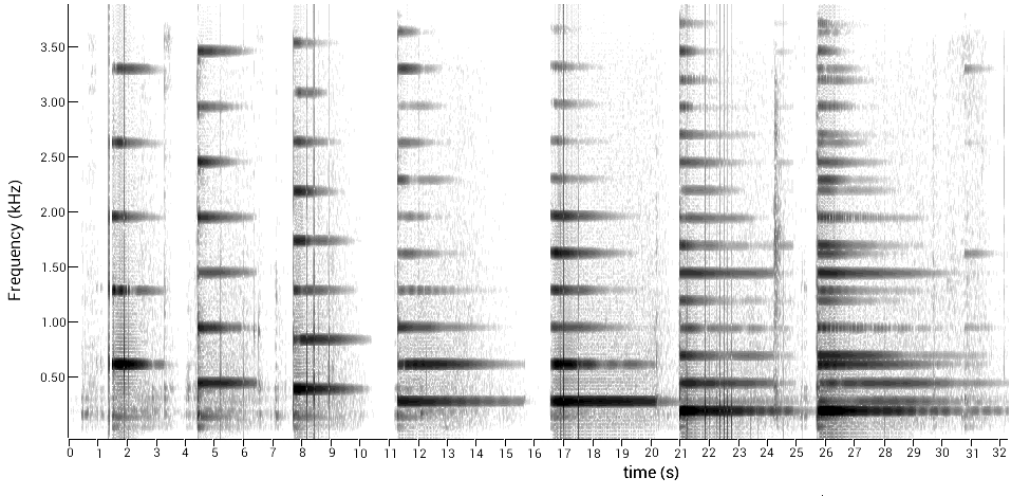
$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\lambda_0}} \ . \tag{3.143}$$

No a môžeme sa pozrieť, čo z toho všetkého vyplýva pre gitaru. Tam je pre všetky struny L fixované, ale rôzne struny majú rôznu hrúbku. To preto, že z konštrukcie gitary je fajn, aby boli všetky struny naťahované približne rovnakou silou, a preto, ak chceme rôzne základné frekvencie f_1, musíme meniť λ_0. A pre hlbšie tóny s menšou frekvenciou potrebujeme ťažšie struny. Tiež vieme, že pri ladení gitary zväčšovaním T zvyšujeme výšku tónu.

Stláčaním struny na hmatníku gitary skracujeme jej dĺžku a kratšie struny vydávajú vyšší tón. Ak skrátime strunu na polovicu, dostaneme dvojnásobnú frekvenciu, a teda o oktávu vyšší tón. V polovici dĺžky je dvanásty pražec, ktorý presne takto funguje.

Príklad 3.37. Zoberte gitaru a skúste merať vzdialenosti jednotlivých pražcov. Ako sú rozdelené? Čo z toho vyplýva pre frekvencie zodpovedajúcich pohybov? □

Pre výšku tónu, ktorý gitarová struna vydáva, je dôležitá základná frekvencia f_1. Brnknutím po strune však vzbudíme všetky frekvencie f_n, čo môžeme vidieť použitím programu na analýzu zvuku, napríklad v smartfóne. Vyzerá to napríklad takto



Jasne vidíme základnú frekvenciu, ale aj všetky jej násobky, ktorým sa hovorí vyššie harmonické. Ich pomernému zastúpeniu vo zvuku sa hovorí farba tónu. Vďaka tomu môžu tie isté hudobné tóny zahrané na rôznych nástrojoch znieť rôzne. Alebo dokonca aj na tom istom nástroji zahrané na rôznych miestach. Môžete skúsiť zobrať napríklad gitaru a ukulele a pozrieť sa, ako vyzerá zvuk z týchto dvoch nástrojov v rovnakom programe.

Ďalšie úlohy

Príklad 3.38. Ukážte, že funkcia $f(x - vt)$ spĺňa okrem vlnovej aj transportnú rovnicu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ . \tag{3.144}$$

V čom je najväčší rozdiel medzi týmito dvomi rovnicami a čo to znamená napríklad pre existenciu riešení v tvare stojatých vĺn? □

Príklad 3.39 (Vlnová rovnica vo viacerých rozmeroch)**.** V celej tejto časti sme hovorili o vlnách v jednom rozmere. Ako by ste vlnovú rovnicu (3.119) zovšeobecnili do viacerých rozmerov? □

Riešenie. V troch rozmeroch hľadáme funkciu $\xi(x, y, z, t)$. Zo symetrie trojrozmerného priestoru dostávame, že súradnice x, y a z by do rovnice nemali vstupovať rôznym spôsobom, a teda dostávame prirodzené zovšeobecnenie v tvare

$$\frac{\partial^2 \xi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi(\vec{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(\vec{x}, t)}{\partial z^2} \right) \ . \tag{3.145}$$

Táto trojica parciálnych derivácií sa zvykne označovať nasledovne

$$\frac{\partial^2 \xi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi(\vec{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(\vec{x}, t)}{\partial z^2} = \Delta \xi(\vec{x}, t) \tag{3.146}$$

a pravú stranu tejto rovnosti treba chápať ako diferenciálny operátor Δ pôsobiaci na skalárnu funkciu. Pre náročných môžeme spomenúť, že ide o druhú mocninu operátora nabla $\vec{\nabla}$ (2.92) ešte z časti o potenciáloch v troch rozmeroch a zvykne sa mu hovoriť Laplaceov operátor. Mohli by sme sa zaujímať, ako jeho vyjadrenie vyzerá v iných súradniciach, ale to už je otázka na ďalší semester. ■

Príklad 3.40. Ukážte, že funkcie tvaru

$$\xi(\vec{x},t) = A\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}\pm\omega t)} \tag{3.147}$$

sú riešeniami trojrozmernej vlnovej rovnice (3.145). V akom vzťahu musí byť $\vec{p}$ a ω, aby to bola pravda? Hovorí sa im rovinné vlny, už sme hovorili prečo. □

Príklad 3.41. Ukážte, že súčet vhodných rovinných vĺn vedie na riešenie vlnovej rovnice v tvare

$$\cos(\omega t)\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)\ . \tag{3.148}$$

□

Príklad 3.42. Pozrite si videá[54] Čo má spoločné gitara a mikrovlnka a Čo má spoločné čokoláda v mikrovlnke a rýchlosť svetla a na základe nich zmerajte rýchlosť svetla pomocou čokolády[55] v mikrovlnke. □

3.4 Dynamika tuhého telesa

Pod tuhým telesom si zatiaľ predstavte zemiak. Alebo asteroid, stoličku, bedmintonový košík. Kľúčovou vecou, ktorú tuhé teleso vie robiť, je otáčať sa. Budeme predpokladať, že intuitívne je jasné, čo sa pod otáčaním myslí. Formálnejší popis budeme po krokoch budovať často bez toho, aby sme na túto predstavu explicitne odkazovali. Je ale dobré mať ju na pamäti.

3.4.1 Úvod a špeciálny príklad sily kolmej na os otáčania

Pod tuhým telesom budeme rozumieť sústavu hmotných bodov, ktorých vzdialenosti medzi sebou sú fixované a môžu sa v priestore hýbať iba ako celok:

$$|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = const\ \forall i,j\ . \tag{3.149}$$

Body sú teda fixované na akýsi nehmotný rám. V limite nekonečného počtu hmotných bodov dostaneme opäť spojite rozloženú hmotu, ale tomuto sa v tejto časti veľmi venovať nebudeme. Skôr nás bude zaujímať pohyb takéhoto telesa.

Otázka je ako vôbec takúto konfiguráciu – budeme hovoriť o polohe telesa aj keď ide v našom popise technicky o veľa telies – rozumne popísať. Už vieme, že vnútorné sily od rámu, ktoré držia hmotné body, pohromade nebudú priamo ovplyvňovať pohyb ťažiska. Poloha tohto bodu bude teda

[54] Ak čítate tento text vytlačený, relevantné linky sú `https://youtu.be/1alC_DDNa10` a `https://youtu.be/ZU5WoRNjAyw`.

[55] Použiť sa dá nastrúhaný syr, maslo alebo čokoľvek iné, čo veľmi rýchlo a vehementne reaguje na zvýšenie teploty.

rozumným odrazovým mostíkom. O tom, ako rozumne opísať otočenie telesa okolo ťažiska budeme rozprávať trochu neskôr. Zatiaľ pripomeňme polohu ťažiska

$$\vec{R} = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{x}_i \ , \tag{3.150}$$

kde $m = \sum m_i$ je celková hmotnosť telesa (označenie M si necháme v tejto časti na čosi iné) a pohybová rovnica pre toto ťažisko je

$$m\ddot{\vec{R}} = \sum F_i \ , \tag{3.151}$$

kde ale sumujeme cez vonkajšie sily pôsobiace na hmotné body. V celej tejto časti budeme písať holé sumy bez hraníc, myslí sa tým sčítavanie cez všetky hmotné body, z ktorých sa teleso skladá. V našich prípadoch bude touto silou takmer výlučne gravitačná a teda

$$\sum F_i = m\vec{g} \tag{3.152}$$

a k jej pôsobisku sa ešte vrátime. Pre jeden hmotný bod sme už mali aj moment hybnosti

$$\vec{L}_i = m_i \, \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i \ , \tag{3.153}$$

celkový moment hybnosti pre teleso dostaneme presčítanim cez všetky body.

Príklad 3.43. Rozmyslite si, že pre tuhé teleso, ktoré sa iba otáča okolo ťažiska, je jeho celková hybnosť nulová, ale celkový moment hybnosti nenulový. Môžete si zvoliť nejaké jednoduché teleso a jednoduché otáčanie, kde sa tieto veci ľahko počítajú. □

Pre časovú deriváciu momentu hybnosti dostaneme

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum m_i \vec{x}_i \times \ddot{\vec{x}}_i = \sum \vec{x}_i \times \vec{F}_i \tag{3.154}$$

a veličinu na pravej strane tejto rovnice nazveme momentom hybnosti a označíme $\vec{M}$. Dostali sme takto rovnicu

$$\text{zmena momentu hybnosti} = \text{moment sily} \ , \tag{3.155}$$

ktorá toho zatiaľ veľa nehovorí. Snáď iba toľko, že ide o analógiu Newtonovej pohybovej rovnice s pridaním slova "moment". Tento drobný rozdiel má však ďalekosiahle dôsledky[56]. Začneme ich rozbaľovať len veľmi pozvoľna a začneme prípadom, kedy sa os, okolo ktorej sa teleso otáča, nebude meniť.

Otáčanie okolo fixovanej osi. Na začiatok si poďme premyslieť ako vyzerá kinematika otáčania telesa okolo fixovanej osi. Za túto os zvolíme os z a na všetko sa budeme pozerať v cylindrických súradniciach. Nech sa teleso otáča konštantou uhlovou rýchlosťou ω. Ak je v čase $t = 0$ polohový vektor i-teho bodu $\vec{x}_i = (r_i \cos\theta_i, r_i \sin\theta_i, z_i)$, po čase t sa poloha bodu zmení tak, že $\theta_i \to \theta_i + \omega t$, kde ω je uhlová rýchlosť otáčania telesa. Rýchlosť i-teho bodu bude potom

$$\dot{\vec{x}}_i = (-r_i\omega \sin\theta_i, r_i\omega\cos\theta_i, 0) = \vec{\omega} \times \vec{x}_i \ , \tag{3.156}$$

[56]Spoiler: tie sú spojené s tým, že analógiou hmotnosti z rovnice $\vec{F} = m\vec{a}$ nebude skalár, ale matica.

kde sme zaviedli vektor uhlovej rýchlosti $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, ktorý má smer osi otáčania a jeho veľkosť je jej hodnota. Tento vzťah teda popisuje rýchlosti jednotlivých bodov a ešte veľa krát bude dôležitý.

Tento vzťah prežije aj uhlovú rýchlosť v smere všeobecného vektora $\hat{n}$ a aj premennú veľkosť uhlovej rýchlosti.

Príklad 3.44. Ako je vo vzťahu (3.156) ukryté staré dobré $v = \omega R$? □

Moment hybnosti. S touto prípravou sa môžeme pustiť do počítania momentu hybnosti. Ešte si ale situáciu trochu zjednodušíme a budeme predpokladať, že teleso je rovinné a otáča sa okolo osi kolmej na túto rovinu. Z (3.153) dostávame

$$\vec{L} = \sum m_i \, \vec{x}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i) = \sum m_i \, (\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i) \, \vec{\omega} \ , \tag{3.157}$$

pričom sme si spomenuli na vzťah pre trojitý vektorový súčin[57]

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \, (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \, (\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{3.158}$$

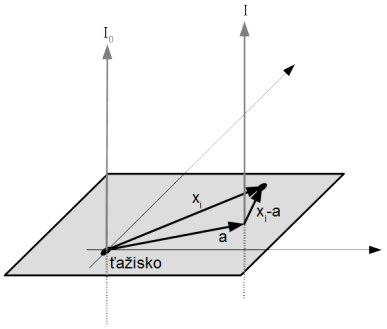
a využili kolmosť vektorov $\vec{x}_i$ a $\vec{\omega}$. Vidíme, že $\vec{L} = I\vec{\omega}$ a $\dot{\vec{L}} = I\dot{\vec{\omega}} = I\ddot{\theta}\hat{n}$, kde sme označili

$$I = \sum m_i \, (\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i) = \sum m_i r_i^2 \ . \tag{3.159}$$

Tejto veličine sa hovorí moment zotrvačnosti a je analógiou hmotnosti pre otáčavé pohyby, pretože máme $I\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}$. Všimnite si, že závisí od osi otáčania, pre rôzne osi dostaneme rôzne vzdialenosti bodov r_i.

Dôležitý poznatok ako príklad.

Príklad 3.45 (Steinerova veta)**.** Majme teleso, ktoré má okolo osi prechádzajúcej ťažiskom moment zotrvačnosti I_0. Ukáže, že okolo novej osi, ktorá je s tou pôvodnou rovnobežná a nachádza sa vo vzdialenosti a, má moment zotrvačnosti



$$I = I_0 + ma^2 \ . \tag{3.160}$$

□

Riešenie. Toto je priamočiarym dôsledkom kosínusovej vety. Počítame

$$I = \sum m_i(\vec{x}_i - \vec{a}) \cdot (\vec{x}_i - \vec{a}) = \sum m_i \vec{x}_i \cdot \vec{x}_i - 2\sum m_i \vec{x}_i \cdot \vec{a} + \sum m_i \, \vec{a} \cdot \vec{a} \ . \tag{3.161}$$

Prvý člen je I_0, druhý je nulový lebo ťažisko je v počiatku a tretí dá presne to, čo potrebujeme. ■

Zaujímavým dôsledkom Steinerovej vety je, že teleso má najmenší moment zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá prechádza jeho ťažiskom.

[57] Kolokviálne známy ako "bac mínus cab".

Energia otáčavého pohybu. V tejto jednoduchej situácii sa pozrime sa ešte na jednu vec – energiu. Keď vo vzťahu $E_i = m\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i/2$ zoberieme (3.156) a použijeme

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}) \tag{3.162}$$

dostaneme

$$E_{kin} = \sum E_i = \frac{1}{2} I\omega^2 \ . \tag{3.163}$$

Každému správnemu študentovi a každej správnej študentke by to samozrejme nemalo dať, a tento vzťah by si mali odvodiť samostatne. My len zdôrazníme, že čosi takéto sme už raz mali, keď sa pre jeden hmotný bod v polárnych súradniciach objavilo $E = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$.

Tento vzťah znamená, že aj keď sa na otáčajúce teleso pozeráme ako na jednu entitu, ktorá sa nikam nepohybuje, môže mať v sebe uloženú energiu. Mikroskopicky je táto energia súčtom kinetických energií jednotlivých hmotných bodov, ale makroskopicky sa na ňu dá pozerať ako na nový druh energie priradenej telesu. Ak sa naviac teleso ako celok pohybuje rýchlosťou $\vec{v}$, túto rýchlosť musíme pridať ku rýchlosti každého hmotného bodu a dostaneme

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \ . \tag{3.164}$$

Ako to celé vyzerá, keď sa teleso otáča okolo osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom?

Príklad 3.46. Na odvodenie vzťahov (3.159), (3.160) alebo (3.163) sme použili zjednodušenie rovinného telesa otáčajúceho sa okolo osi kolmej na túto rovinu. Rovnaké vzorce platia aj v o čosi menej prísnom zjednodušení. Čo všetko ešte môžeme dovoliť telesu, aby tieto vzťahy platili? □

Poznámka o spojitom rozložení hmoty. [58] Považovať tuhé teleso za konečný počet hmotných bodov je síce často praktické pri úvahách, ale konkrétne výpočty to dosť zahmlieva. Telesá s ktorými sa zväčša stretávame majú totiž hmotnosť rozmiestnenú spojite v nejakom objeme. Našťastie nie je ťažké prejsť od súm k integrálom a od konečných k spojitým rozloženiam.

Pointa je v tom, že spojité teleso nakrájame na (nekonečne) veľa infinitizemálnych kúskov. Hmotnosť každého z nich bude $m_i \to dm = \rho\, d^3x$, kde ρ je hustota telesa, ktorá v princípe môže závisieť od miesta a d^3x je objemový element v patričných súradniciach. No a všetky sumy sa v tomto prípade zmenia na integrály, takže

$$\sum m_i f(\vec{x}_i) = \int d^3x\, \rho f(\vec{x}) \ , \tag{3.165}$$

kde f určuje, o akú veličinu ide. V prípade rovinných alebo dokonca lineárnych telies budeme mať do činenia s dvojrozmerným resp. jednorozmerným objemovým elementom, hustotou a integrálom.

Príklad 3.47. Aký moment zotrvačnosti pre tyčku hmotnosti m a dĺžky l okolo osi kolmej na paličku prechádzajúcu jej stredom. □

Riešenie. Paličku si predstavíme ako nekonečne veľa hmotných bodov, každý hmotnosti dm vo vzdialenosti x od stredu.

[58] Ktorú som nemal veľmi kam dať tak skončila tu.



Z obrázku potom dostávame, že vzťah (3.159) prejde na

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{m}{l} x^2 = \frac{1}{12} m l^2 \tag{3.166}$$

■

Príklad 3.48. Zo Steinerovej vety ukážte, že moment zotrvačnosti paličky okolo kolmej osi prechádzajúcej koncom paličky je $I = ml^2/3$. Ako by ste tento výsledok dostali počítaním podobného integrálu ako (3.166). □

Príklad 3.49. Vypočítajte moment zotrvačnosti

1. štvorcovej dosky,
2. kruhovej dosky,

vzhľadom na os prechádzajúcu stredom a kolmú na rovinu útvaru. □

Návod. Rozmyslite, si že pre štvorcovú dosku je kľúčový integrál

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \; \frac{m}{a^2} \left(x^2 + y^2 \right) \; . \tag{3.167}$$

Ako bude vyzerať potom integrál pre kruhovú dosku? Ak si neviete rady, pozrite (3.203). ■

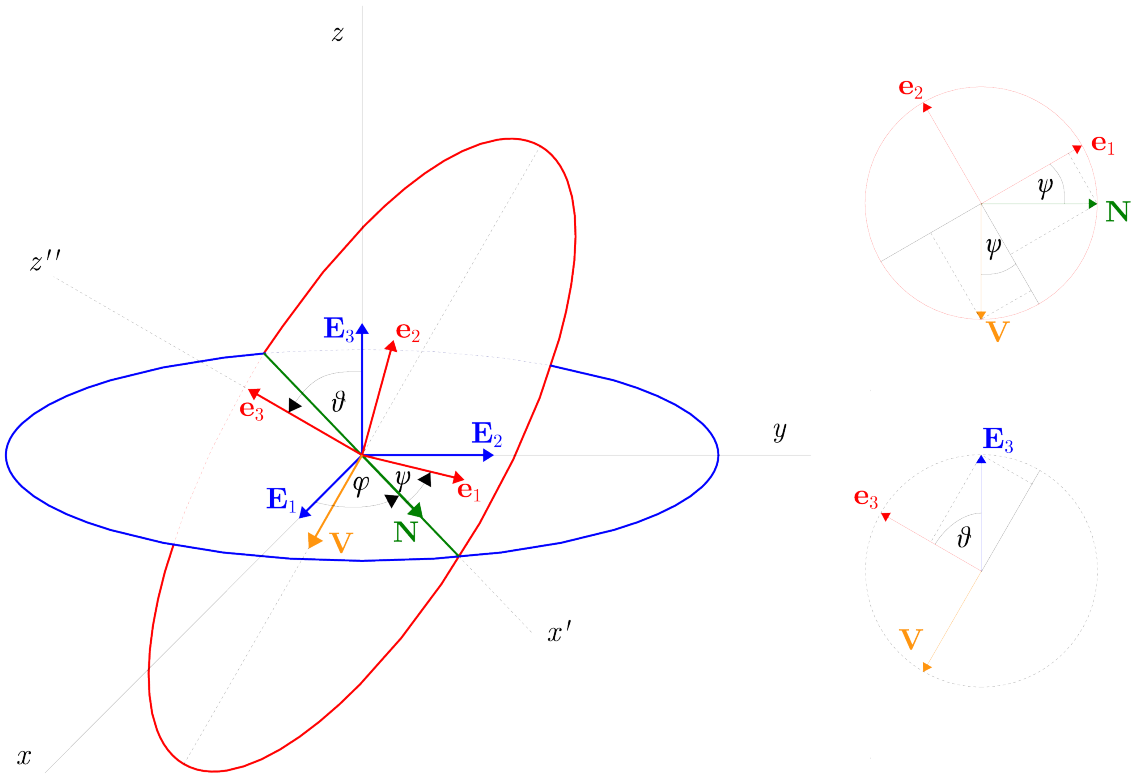
3.4.2 Kinematika tuhého telesa

Nastal čas pozrieť sa na otáčanie telesa poriadnejšie. Kľúčovým menom v tejto a nasledujúcej časti bude Euler. Podľa neho sa volajú dve sady rovníc, ktoré to budú robiť. Prvá "iba" kinematicky popisuje rozumným spôsobom natočenie telesa. Druhá hovorí, ako sa toto natočenie mení pod pôsobením (momentov) síl.

V telese si zafixujme tri osy, ktoré označíme e_1, e_2, e_3 – o tom ako to spraviť rozumne bude reč o chvíľu. V laboratórnej sústave zvoľme tiež tri osy s označením E_1, E_2, E_3. A v čase $t = 0$ nech tieto trojice splývajú. Teraz sa teleso nejakým spôsobom otočí, tj. osy e budú vzhľadom na osy E natočené. Toto otočenie popíšeme trojicou uhlov ϕ, θ, ψ (ktorým sa hovorí samozrejme Eulerove) nasledovne

- otočíme trojicu e_1, e_2, e_3 okolo osi e_3 o uhol ϕ,
- potom otočíme trojicu e_1, e_2, e_3 okolo osi e_1 o uhol θ,
- potom otočíme trojicu e_1, e_2, e_3 okolo osi e_3 o uhol ψ.

Celé to je vidieť na tomto obrázku, za ktorý veľmi pekne ďakujem Lukášovi Tomekovi.



Zmeny Eulerovych uhlov popisujú rotáciu telesa. Rovnako popisuje rotáciu telesa vektor uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$. Prvý popis je lepší pre nás, druhý popis je lepší pre rovnice, lebo uhlová rýchlosť vystupuje priamo v nich. Eulerove kinematické rovnice sú prekladovým slovníkom medzi týmto dvomi popismi.

Vektor $\vec{\omega}$ sa dá vyjadriť dvomi spôsobmi

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\psi}\hat{\psi} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3 \ , \tag{3.168}$$

pričom stále strieškou označujeme jednotkový vektor v smere osi, okolo ktorej sa otáča. Z obrázku po dlhom zamyslení postupne povyjadrujeme jednotkové vektory naľavo v termínoch jednotkových vektorov napravo, pozbierame členy pri tom istom vektore, porovnáme a dostaneme

$$\omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \ , \tag{3.169a}$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \ , \tag{3.169b}$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \ . \tag{3.169c}$$

Eulerove kinematické rovnice v plnej kráse.

3.4.3 Dynamika tuhého telesa

Popísať pohyb tuhého telesa už vieme. Ostáva nám nájsť pohybové rovnice, ktoré bude musieť tento pohyb spĺňať. Začnime kinetickou energiou, kde sa prvý krát stretneme so všeobecným momentom zotrvačnosti.

Kinetická energia telesa je súčet kinetických energií všetkých bodov, z ktorých sa skladá. To znamená

$$E_{kin} = \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i) = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{x}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}_i) = \frac{1}{2} \sum m_i \left[(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i) - (\vec{x}_i \cdot \omega)^2 \right] \ . \quad (3.170)$$

Teraz príde krok, ktorého výsledok je najlepšie napísať a nechať na čitateľov a čitateľky si ho rozmyslieť. Na vzťah pre kinetickú energiu sa budeme pozerať ako na funkciu vektora uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$. Ak komponenty tohto vektora označíme ω_a s $a = 1, 2, 3$, potom sa dá zapísať kinetická energia ako

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I_{ab} \omega_a \omega_b \ , \quad (3.171)$$

kde I je 3×3 matica, ktorej a, b-ty komponent je

$$I_{ab} = \sum m_i \left[(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i) \, \delta_{ab} - \vec{x}_{ia} \vec{x}_{ib} \right] \ . \quad (3.172)$$

V tomto vzťahu označuje výraz δ_{ab} jednotku pre $a = b$ a nulu inokedy. Ide teda o 3×3 maticu, ktorá má na diagonále jednotky a inde nuly, čiže jednotkovú maticu $\mathbb{1}$.

Odporúčam nepokračovať ďalej, kým predchádzajúce dva vzťahy nie sú vyjasnené.

Príklad 3.50. Ako presne vyzerá matica I? Kde sa v (3.172) skrýva (3.159)? □

Výsledok. V maticovom tvare (3.172) vyzerá takto

$$I = \begin{pmatrix} x_{i2}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i1}x_{i2} & -x_{i1}x_{i3} \\ -x_{i2}x_{i1} & x_{i1}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i2}x_{i3} \\ -x_{i3}x_{i1} & -x_{i2}x_{i3} & x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \end{pmatrix} \ . \quad (3.173)$$

■

Medzi maticou I a špeciálnym prípadom (3.159) sa nerobí veľký rozdiel a obe tieto veci sa nazývajú momentom zotrvačnosti s malou dušičkou, že z kontextu je jasné, či sa tým myslí matica alebo iba číslo. Je dobré ešte raz si premyslieť, že I je charakteristikou iba telesa a vôbec nezávisí od toho, čo sa s ním deje. Kľúčové pozorovanie z (3.172) je, že $I_{ab} = I_{ba}$ a matica I je symetrická. Existuje teda báza, v ktorej je diagonálna. No a v tejto báze budeme voliť vektory e_1, e_2, e_3, v ktorých budeme vyjadrovať uhlovú rýchlosť $\vec{\omega}$, počítať jej časový priebeh a potom ho prekladať do reči Eulerových uhlov.

Príklad 3.51. Odvoďte týchto niekoľko základných momentov zotrvačnosti

- hmotný bod $(md^2, md^2, 0)$,
- kružnica $(mr^2/2, mr^2/2, mr^2)$,
- tyčka okolo stredu $(ml^2/12, ml^2/12, 0)$,
- tyčka okolo kraja $(ml^2/3, ml^2/3, 0)$,
- disk $(mr^2/4, mr^2/4, mr^2/2)$,
- guľa $2mr^2/5(1, 1, 1)$.

□

Príklad 3.52. Ak sa na to cítite, môžete skúsiť odvodiť Steinerovu vetu vo všeobecnom prípade

$$I_{ab} = I_{0,ab} + m\left(a^2\delta_{ab} - \vec{a}_a\vec{a}_b\right) \ . \tag{3.174}$$

□

Teraz už nie je ťažké ukázať, že rovnaká matica sa objaví vo všeobecnom vyjadrení momentu hybnosti[59]

$$\vec{L} = \sum m_i\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i = \sum m_i\vec{x}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i) = I\vec{\omega} \ . \tag{3.175}$$

No a chceli by sme nájsť deriváciu tohto vektora $\dot{\vec{L}} = \ldots$, tá bude rovná celkovému momentu sily z (3.154). Čo ale napísať na pravú stranu? V laboratórnej sústave sa poloha telesa mení a teda $\dot{I} \neq 0$. V sústave spojenej s telesom $I = const$, ale bázové vektory tejto sústavy sa v čase menia. Táto druhá možnosť sa ukazuje byť schodnejšia. Píšeme

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d}{dt}\left(\omega_i\hat{x}'_i\right) = \dot{\omega}_i\hat{x}'_i + \omega_i\frac{d\hat{x}'_i}{dt} \ , \tag{3.176}$$

použijeme

$$\frac{d\hat{x}'_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}'_i \tag{3.177}$$

a dostaneme

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = M_1 \ , \tag{3.178a}$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = M_2 \ , \tag{3.178b}$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = M_3 \ . \tag{3.178c}$$

Týmto rovniciam sa hovorí Eulerove dynamické rovnice. Hovoria, ako sa v čase vyvíja uhlová rýchlosť telesa pod pôsobením momentu sily $\vec{M}$. Eulerove kinematické rovnice potom hovoria, ako sa na základe tohto riešenia v čase vyvíja poloha telesa v priestore.

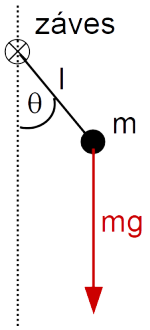
3.4.4 Niekoľko špeciálnych prípadov pohybu tuhého telesa

Pozrime sa teraz na niekoľko prípadov použitia rovníc z prechádzajúcich častí. Na úvodné príklady nám postačia základne informácie z časti 3.4.1, na príklady na konci už budeme potrebovať ťažkú mašinériu Eulerovych rovníc.

Príklad 3.53 (Matematické kyvadlo revisited, again)**.** Nájdite pohybovú rovnicu matematického kyvadla, tj. jedného hmotného bodu na závese dĺžky l v homogénnom gravitačnom poli. □

Riešenie. Moment zotrvačnosti hmotného bodu je jednoducho ml^2, moment tiažovej sily je $-mgl\sin\theta$. Znamienko mínus z toho, že pre kladné θ chce sila tento uhol zmenšovať, prípadne z toho, ktorým smerom smeruje vektor $\vec{L}$ ak sa uhol θ zväčšuje.

[59] V tomto vzťahu $I\vec{\omega}$ označuje maticové násobenie vektora $\vec{\omega}$ maticou I. Opäť budeme dúfať, že rozdiel medzi obyčajným a maticovým násobením bude jasný z kontextu.



V rovnici $I\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}$ tak dostaneme

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta\ , \tag{3.179}$$

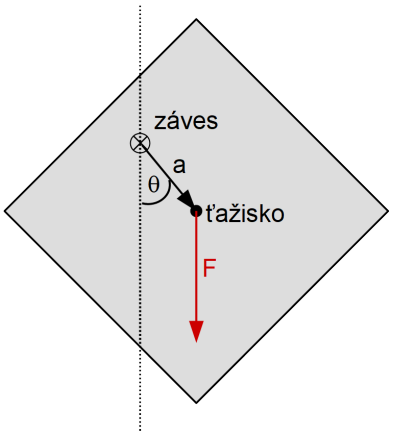
čosi, čo sme už viac krát mali. Ale je fajn overiť si, že nový aparát dáva staré výsledky skôr, ako ho začneme používať v nových situáciách. ■

Príklad 3.54 (Fyzikálne kyvadlo)**.** Paličku zavesíme za jeden koniec a necháme kmitať v homogénnom gravitačnom poli. S akou periódou to bude? Ako to vyzerá pre všeobecné teleso, ktoré je zavesené za bod mimo jeho ťažiska? □

Riešenie. Postup je viac menej identický ako v predchádzajúcom príklade. Palička je zavesená za jeden zo svojich koncov, a teda jej moment zotrvačnosti je $I = ml^2/3$. Moment tiažovej sily po vychýlení je $-mgl/2\sin\theta$, pretože tiažová sila pôsobí v ťažisku paličky. Pohybová rovnica je tým pádom

$$I\ddot{\theta} = M \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l}\sin\theta \approx -\frac{3g}{2l}\theta \tag{3.180}$$

a palička koná harmonické kmity. Všimnite si, že to je iná perióda, ako by bolo matematické kyvadlo s dĺžkou závesu $l/2$, palička kmitá pomalšie, a to napriek tomu, že má rovnakú hmotnosť a dokonca aj ťažisko na rovnakom mieste, lebo ma väčší moment zotrvačnosti. Rovnaká hmotnosť je rozmiestnená ďalej od osi otáčania a teda pri rovnakej uhlovej rýchlosti má palička (kvôli $v = \omega R$) väčšiu energiu.



Všeobecne sa teleso zavesené mimo ťažiska volá fyzikálne kyvadlo, pohybová rovnica je na základe totožných úvah

$$\ddot{\theta} = -\frac{gma}{I}\theta \tag{3.181}$$

kde a je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania, I je moment zotrvačnosti vzhľadom na túto os. Použitím Steinerovej vety $I = I_0 + ma^2$ toto ešte vieme upraviť

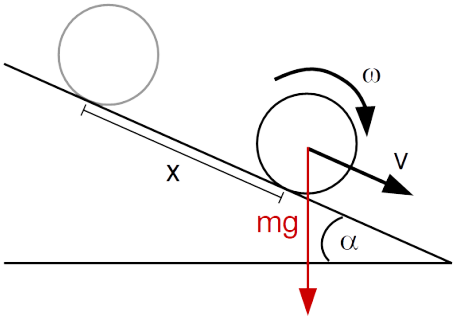
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{I_0}{ma^2}}\right)\theta \ , \tag{3.182}$$

a vidíme ze uhlová frekvencia je vždy menšia ako $\sqrt{g/a}$ a teda perióda kmitania fyzikálneho kyvadla je vždy väčšia ako pre zodpovedajúce matematické kyvadlo. ■

Príklad 3.55. Valec položíme na naklonenú rovinu a necháme ho bez prešmykovania kotúľať nadol. Aké bude jeho zrýchlenie? □

Riešenie. Keď sa valec kotúľa dole naklonenou rovinou, platí pre neho zákon zachovania energie (to preto, že trecia sila pri valení bez prešmykovania nekoná žiadnu prácu, bude o tom reč v časti 5) a teda

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 - mgx\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{I_0}{R^2}+m\right)\dot{x} - mgx\sin\alpha \ , \tag{3.183}$$



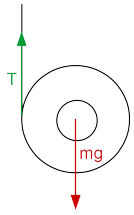
kde sme ako na obrázku označili vzdialenosť, ktorú valec prejde dole rovinou x a využili, že pri takomto pohybe $v = \omega R$. Derivovaním tohto výrazu a z nulovosti derivácie dostaneme

$$\ddot{x} = g\sin\alpha\,\frac{1}{1+\frac{I_0}{mR^2}} \ . \tag{3.184}$$

To je menej ako $g\sin\alpha$, čo by sme dostali pre teleso ktoré sa dole naklonenou rovinou iba voľne sunie. To preto, že gravitačná energia sa mení okrem posuvnej kinetickej aj na otáčavú a teda sa valec posúva dole pomalšie. V časti 5 o trení sa naučíme, ako tento príklad počítať aj použitím síl. ■

Príklad 3.56. Rolku toaletného papiera chytíme za koniec a uvoľníme. S akým zrýchlením sa bude pohybovať tesne po uvoľnení? □

Riešenie. Napíšeme pohybovú rovnicu vzhľadom na bod, za ktorý je rolka zavesená – moment gravitačnej sily je mR, moment ťahovej sily je nulový, pretože polohový vektor jej pôsobiska je nulový –, hľa



$$I\varepsilon = Rmg \ , \tag{3.185}$$

a z toho dostaneme

$$\varepsilon = \frac{Rmg}{I_0 + mR^2} \ . \qquad (3.186)$$

Rolka sa teda bude otáčať okolo bodu, v ktorom sa odmotáva papier, s takýmto uhlovým zrýchlením. Zrýchlenie ťažiska preto bude

$$a = g\,\frac{1}{1+\frac{I_0}{mR^2}} \qquad (3.187)$$

a to je menej ako g. Opäť, okrem posuvnej energie sa míňa energia aj na otáčanie. Z toho vieme dokonca dorátať ťahovú silu zavesenej časti toaleťáku, pretože celková sila udáva zrýchlenie ťažiska

$$mg - T = ma \ \Rightarrow \ T = mg\frac{I_0}{mR^2 + I_0} \ . \qquad (3.188)$$

Ľahko overíme, že $TR = I_0\varepsilon$. Prečo sme tento výsledok čakali? ■

3.4.5 Niekoľko zložitejších prípadov pohybu tuhého telesa

Voľný sférický zotrvačník. Najjednoduchšia možnosť pre maticu momentu hybnosti je iba násobok jednotkovej matice $I = I_0\mathbb{1}$. Z Eulerovych dynamických rovníc vidíme, že krížové členy všetky vypadnú a pre prípad voľného pohybu bez vonkajšieho momentu hybnosti je iba rovnomerné otáčanie $\vec{\omega} = const$. V prípade nenulového momentu hybnosti dostávame $\dot{\vec{\omega}} \sim \vec{M}$, čo keď si rozmyslíte je prípad predchádzajúcej časti.

Voľný symetrický zotrvačník. Druhá najjednoduchšia možnosť je, keď sú dve z troch diagonálnych komponent I rovnaké a zvoľme osy tak, aby platilo $I_{11} = I_{22} \neq I_{33} \neq 0$. V situácii bez momentu hybnosti dostaneme z tretej dynamickej rovnice

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\omega}_3 = 0 \ . \qquad (3.189)$$

Druhé dve rovnice potom dajú

$$\dot{\omega}_1 = \Omega\omega_2 \ , \ \dot{\omega}_2 = -\Omega\omega_1 \ , \ \Omega = \omega_3\frac{I_1 - I_3}{I_1} \ , \qquad (3.190)$$

čo hravo vyriešime

$$\ddot{\omega}_1 = \Omega\dot{\omega}_2 = -\Omega^2\omega_1 \ \Rightarrow \ \omega_2 = \omega_0\cos(\Omega t) \qquad (3.191)$$

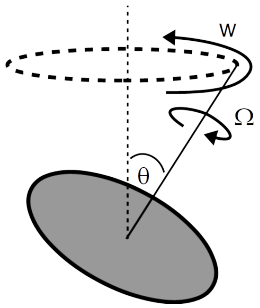
a potom

$$\omega_1 = \omega_0\sin(\Omega t) \ . \qquad (3.192)$$

Z kinematických rovníc po troche práce dostaneme

$$\psi = \Omega t \ , \ \theta = const \ , \ \phi = \frac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta}t = wt \ . \qquad (3.193)$$

Tomuto pohybu sa hovorí precesia a keď za konkrétne teleso zoberieme disk, vyzerá nasledovne.



Disk nie je vodorovne, ale jeho os je natočená pod uhlom θ. Ten sa okolo tejto naklonenej osi otáča uhlovou rýchlosťou Ω a os samotná okolo zvislého smeru rotuje uhlovou rýchlosťou

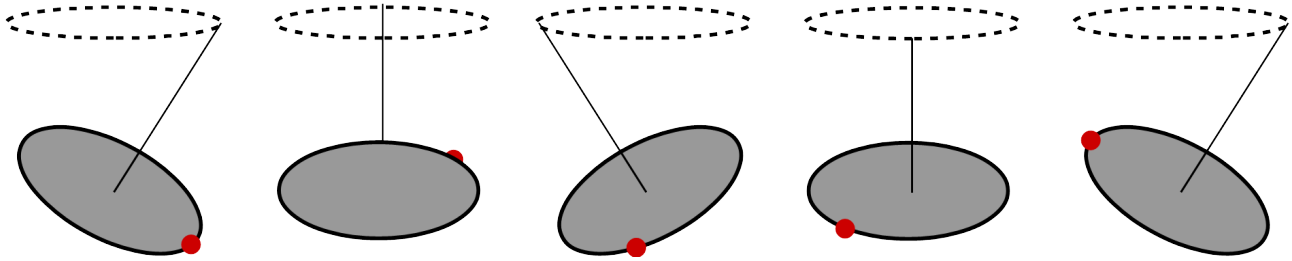
$$w = \frac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta} = \frac{I_3\Omega}{(I_1 - I_3)\cos\theta} \ . \tag{3.194}$$

Vidíme, že pre $I_1 > I_3$ je to v rovnakom smere, pre $I_1 < I_3$ v opačnom ako rotuje teleso.

Pre disk sa dá dopočítať ešte viac. Nie je ťažké ukázať, že $I_3 = 2I_1$ a pre nie príliš veľké uhly naklonenia dostávame

$$\Omega = \omega_3 \ , \ w \approx 2\Omega \ . \tag{3.195}$$

Precesia taniera je dva krát rýchlejšia ako jeho otáčanie. To sa dá vidieť najlepšie na spomalenom videu disku, ktorý vyhodíme do vzduchu. Ak si na okraji disku spravíme značku, kým sa značka vráti na pôvodné miesto os otáčania disku – a teda aj rovina disku – urobí dve otáčky.



Tenis racket theorem. Pre všeobecnú situáciu je už ťažšie čosi dopočítať. V princípe môže takéto teleso konať veľmi komplikovaný pohyb. My sa pozrieme ale na jednu situáciu, ktorá sa dá dotiahnuť celkom ďaleko.

Ľahko overíme, že otáčanie okolo jednej z troch telesových osí – nech je to os 1 a teda uhlová rýchlosť v tvare $\vec{\omega}_0 = (\omega_0, 0, 0)$ – je riešením voľných Eulerovych dynamických rovníc. Budeme teraz hľadať riešenie, ktoré nie je presne toto, ale je k tomuto riešeniu veľmi blízko. A teda uhlovú rýchlosť v tvare

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\delta} \ , \ \delta_{1,2,3} \ll \omega_0 \ . \tag{3.196}$$

Toto nás bude oprávňovať v rovniciach zahadzovať členy, v ktorých sa objaví súčin viac ako dvoch $\delta_{1,2,3}$. Hovoríme, že rovnice riešime do prvého rádu v δ. Najskôr dostaneme

$$I_{11}\dot{\delta}_1 = 0 \tag{3.197}$$

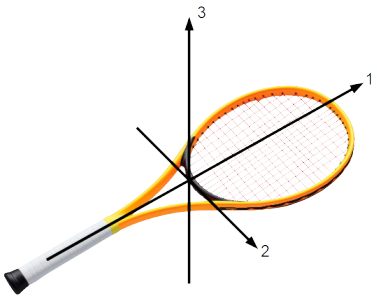
a teda že ω_1 sa môže zmeniť len o konštantu. Kombináciou druhých dvoch rovníc potom dostaneme

$$\ddot{\delta}_2 = \omega_0^2 \frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_3 I_2} \delta_2 \ . \tag{3.198}$$

Ak je konštanta v tejto rovnici záporná, dostávame rovnicu harmonického oscilátora. Os otáčania – a teda aj naklonenie telesa – sa bude v smere 2 meniť, ale nikdy nie príliš a teleso bude stále natočené viac menej rovnako. Ak je ale konštanta kladná, riešením rovnice nebudú sínusy a kosínusy, ale hyperbolické funkcie, ktoré s časom divergujú! Smer 2 sa rýchlo od svojho pôvodného smeru odchýli a teleso bude natočené inak, ako pôvodne. V prvom prípade hovoríme, že rotácia telesa okolo osi 1 je stabilná, v druhom prípade, že je labilná alebo nestabilná. V stabilnom prípade malá odchýlka od požadovaného riešenia nevedie k ničomu dramatickému, to už ale nie je pravda v nestabilnom prípade.

Keď sa pozrieme na výraz $(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)$ vidíme, že nestabilné bude otáčanie okolo tej osi, ktorá zodpovedá prostrednému z trojice momentov zotrvačnosti.

Ako naznačuje názov tejto časti, overiť sa to dá na tenisovej rakete. Tá má tri osy ako na obrázku.

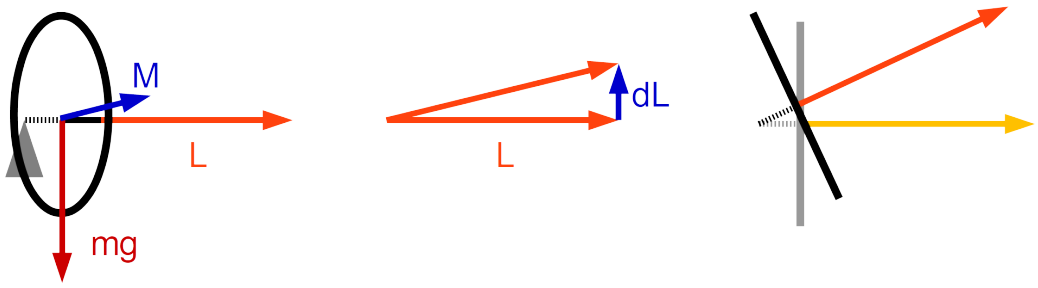


Z rozloženia hmoty dá usúdiť, že prostredný moment zotrvačnosti bude okolo osi označenej ako 2. Ľahko overíme, že otáčanie okolo osí 1 a 3 je stabilné a s raketou sa nič výrazné nedeje. Čo však otáčanie okolo osi 2? Raketu chytíme za rúčku a vyhodíme do vzduchu. Urobí jednu otočku a vráti sa nám naspäť do ruky, zdá sa, že nič špeciálne sa nestalo. Keď sa ale na raketu pozriete lepšie, takmer určite bude otočená naopak – tá strana výpletu, ktorá bola pôvodne dole, bude teraz nahor!

To isté o čosi lepšie vidieť na pingpongovej rakete, lebo má výrazne odlíšené strany. Z akéhosi dôvodnou ale efekt nie je až taký výrazný. Viete prečo? Ak si trúfate, môžete si to vyskúšať aj na mobile a sledovať, ako je obrazovka otočená raz nahor a raz nadol.

Príklad 3.57 (Bicyklové koleso kvalitatívne)**.** Vyberte z rámu bicyklové koleso a vo zvislej polohe ho roztočte. Potom pustite jeden koniec osky kolesa a držte ho iba za ten druhý. Pokúste sa z rovnice $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ vysvetliť jeho následný pohyb. □

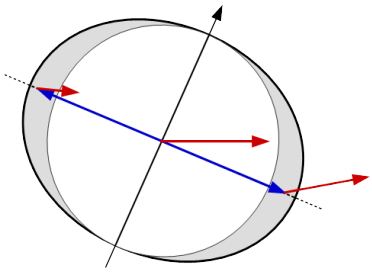
Riešenie. Moment hybnosti kolesa $\vec{L}$ je v smere jeho osi a je vodorovný. Tiažová sila smeruje nadol a jej moment $\vec{M} = \vec{x} \times \vec{F}$ smeruje – v situácii ako na obrázku smerom "do papiera". Takto tiažová sila nebude koleso otáčať smerom nadol, ale smerom do strany, pretože moment hybnosti sa zmení z hodnoty $\vec{L}$ na hodnotu $\vec{L} + \vec{M}dt$. Toto je načrtnuté na ďalších dvoch obrázkoch.



Táto úvaha nám dáva aj niekoľko zaujímavých predpovedí. Ak sa teleso roztočí rýchlejšie, zmena $\vec{M}dt$ zostane tá istá, ale vektor $\vec{L}$ bude väčší. To znamená, že uhol o ktorý sa $\vec{L}$ otočí bude menší a koleso sa bude otáčať pomalšie. No a keď koleso roztočíme do opačného smeru – alebo zmeníme koniec osky, za ktorý koleso držíme – moment sily sa otočí na opačný a tým pádom sa koleso bude otáčať do opačnej strany.

Nie je nič ľahšie ako tieto dve veci overiť. ■

Čosi podobné ako s bicyklovým kolesom sa deje aj so Zemou. Moment sily pochádza od Slnka! Dôležité je pri tom to, že Zem nemá úplne dokonale guľový tvar, že os jej otáčania je naklonená a to, že gravitačná sila sa so vzdialenosťou mení. Ak si podelíme Zem ako na obrázku, červenou zobrazené gravitačné sily na jednotlivé časti budú mať výsledný nenulový moment smerom do papiera podobne, ako mala gravitačná sila na bicyklové kolesa. A rovnako ako koleso, aj Zem sa bude kvôli tomu otáčať. Perióda tohto pohybu je približne 24000 rokov.



Ak sa Zem otáča tak, že jej moment hybnosti smeruje na sever, ako sa bude otáčať os otáčania?

Ďalšie úlohy

Príklad 3.58. V opačných bodoch guľovej planéty pripevnil ktosi dva motory s hnacou silou F. Čo sa bude s planétou diať, keď motory zapneme, ak bola predtým v pokoji?

Ten istý človek potom z planéty jeden z motorov odobral. Ako sa z pokoja bude planéta pohybovať teraz? □

Riešenie. Celková pôsobiaca sila je nulová a teda planéta nikam nepôjde. Celkový moment, ktorý pôsobí na planétu je $M = 2RF$, to znamená, že planétu to roztoči s uhlovým zrýchlením $I\varepsilon = M$

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{2RF}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5F}{mR} \,. \tag{3.199}$$

Čo keď dáme jeden motor preč? Moment bude $M = RF$ a uhlové zrýchlenie $\dot{\omega} = \frac{5F}{2mR}$. Ale výsledná sila už nebude nulová, takže bude aj nejaké zrýchlenie ťažiska $a = F/m$.

Aké bude v prvom momente zrýchlenie bodu v rovine rovníka so súradnicami r, θ? V uhlovom smere zrýchlenie $r\dot{\omega}$, v x-ovom smere zrýchlenie a, takže spolu

$$a_x = a - r\dot{\omega}\sin\theta \ , \ a_y = r\dot{\omega}\cos\theta \ . \tag{3.200}$$

Po malom čase δt sa planéta otočí, sila už bude iným smerom a výsledný pohyb bude komplikovaná špirála. Táto situácia je jednoduchšia v polárnych súradniciach, môžete ju skúsiť popísať. ■

Príklad 3.59. Hokejový puk, ktorý sa otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo svojej osi, položíme na ľad. Ak je medzi pukom a ľadom koeficient trenia f, za aký čas zastane?[60] □

Riešenie. Moment zotrvačnosti puku je $\frac{1}{2}mR^2$ a teda jeho celkový moment hybnosti je $L_0 = \frac{1}{2}mR^2\omega$. Ostáva už len nájsť moment trecej sily a čas potom dostaneme z $\dot{L} = -M$, čo vedie na $L = L_0 - Mt$ a $T = L_0/M$.

Trecia sila pôsobiaca na element dm vo vzdialenosti r je $fgdm$, jej moment je $fgdmr = fgmdS/S$, kde $S = \pi R^2$ plocha podstavy puku a $dS = rdrd\theta$ je plošný element puku vo vzdialenosti r od jeho stredu. Celkový moment je teda

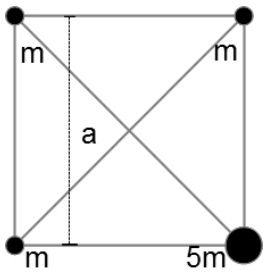
$$M = \frac{fgm}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2fgmR}{3} \tag{3.201}$$

a čas zastavenia bude

$$T = \frac{3\omega R}{4fg} \ . \tag{3.202}$$

■

Príklad 3.60. Máme štvorcový rám s hranou dĺžky a, ktorý má vo svojich troch vrcholoch hmotné body s hmotnosťou m a vo štvrtom hmotný bod s hmotnosťou $5m$.



1. Nájdite ťažisko tejto sústavy.
2. Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na stred štvorcového rámu.
3. Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na ťažisko.
4. Overte Steinerovu vetu.

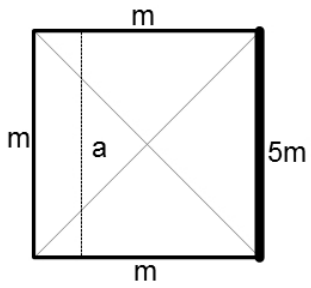
[60] Ak o trení nič neviete, môžete sa k tomuto príkladu vrátiť po časti 5.

Rám aj s hmotnými bodmi teraz upevníme na os kolmú na rovinu štvorca a prechádzajúcu jeho stredom.

5. Nájdite rovnovážnu polohu sústavy.
6. Nájdite periódu kmitov tejto sústavy.

□

Príklad 3.61. Máme štvorcový rám s hranou dĺžky a, ktorý je zložený z troch paličiek hmotnosti m a jednou paličkou s hmotnosťou $5m$.



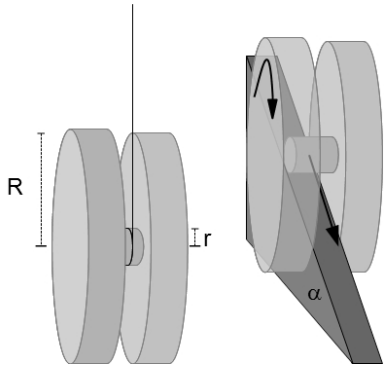
1. Nájdite ťažisko tejto sústavy.
2. Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na stred štvorcového rámu.
3. Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na ťažisko.
4. Overte Steinerovu vetu.

Rám teraz upevníme na os kolmú na rovinu štvorca a prechádzajúcu jeho stredom.

5. Nájdite rovnovážnu polohu sústavy.
6. Nájdite periódu kmitov tejto sústavy.
7. Skúste si rozmyslieť, či by ste očakávali, že to bude viac alebo menej ako v predchádzajúcej úlohe. Vyšlo to tak?

□

Príklad 3.62. Jojo vznikne spojením dvoch diskov polomeru R a hmotnosti M, medzi ktoré vložíme disk polomeru $r < R$ a hmotnosti m.



1. Vypočítajte moment zotrvačnosti disku okolo osi, ktorá prechádza jeho stredom a je kolmá na jeho rovinu.[61]

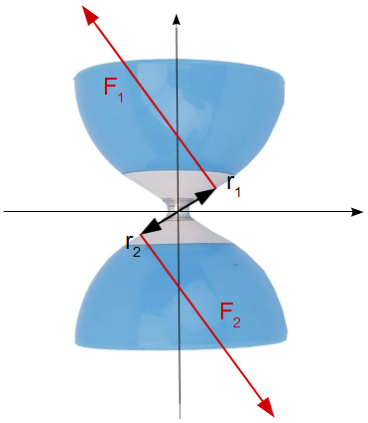
2. Okolo malého disku omotáme motúz, za ktorý jojo zavesíme a uvoľníme. Ak moment zotrvačnosti valca s polomerom ρ a hmotnosťou μ je $\mu\rho^2/2$, aké bude zrýchlenie joja hneď po uvoľnení?

3. Jojo potom položíme na naklonenú rovinu so sklonom α a necháme ho kotúľať sa smerom nadol. S akým zrýchlením sa bude pohybovať?[62]

□

Príklad 3.63 (Diabolo)**.** Tento príklad bude zaujímavý, ak viete trochu robiť s takou žonglovacou vecou že diabolo. Ide vlastne o roztočený symetrický zotrvačník. Ako sme videli v texte, pôsobenia síl na roztočené telesá vedia mať veľmi zaujímavé a neintuitívne efekty. Ak ovládate diabolovanie tak viete, že ak sa v štandardnej polohe snažíte toto teleso nakloniť smerom k sebe alebo od seba, robíte to tak, že jednu ruku posuniete dopredu a druhú naopak dozadu. Prečo to tak je a ktorú ruku máte dať dopredu a ktorú dozadu ak, ak chcete diabolo posunúť dopredu, tj. časť pri vás zodvihnúť? □

Riešenie. Pozerajme sa na diabolo zvrchu ako na obrázku a dajme pravú ruku dopredu a ľavú dozadu.



[61] Rozmyslite si, že je potrebné spočítať integrál

$$I = \frac{m}{R^2}\int_0^R dr\, r\, r^2 \,. \tag{3.203}$$

[62] Na výpočet tohto príkladu pomôže pozrieť sa na príklad o valci na naklonenej rovine, ktorý je vypočítaný v poznámkach.

Rozmyslite si, že sily ktoré takto pôsobia na diabolo majú zo symetrie situácie tvar

$$\vec{F}_1 = (-F_x, F_y, -F_z) \ , \ \vec{F}_2 = (F_x, -F_y, -F_z) \tag{3.204}$$

a miesta v ktorých pôsobia sú

$$\vec{r}_1 = (x, y, z) \ , \ \vec{r}_2 = (-x, -y, z) \ . \tag{3.205}$$

Výsledný moment je potom iba v smere osi z a veľkosť $2(F_x y + F_y x)$.

Ak som pravák tak v tejto situácii mam roztočené diabolo tak, že moment hybnosti smeruje ku mne, i.e. na spodnú stranu obrázka. Kladný moment sily ho teda dvíha smerom nahor a teda prednú časť diabola nakláňa nadol. Ak ruky vymením, moment sily bude opačný a predná časť diabola sa bude natáčať nahor.

Z toho sa dá aj vymyslieť, ako otočiť diabolo vo vodorovnej rovine. Zoberieme jednu paličku a priložíme ju k oske diabola zo strany. Vrchnou časťou potom zatlačíme na jednu časť a spodnou na druhú časť. Tak vytvoríme dvojicu síl, ktorá bude mať rovnaký efekt ako dvojica na obrázku ale vo zvislej rovine. Rozmyslite si, čo sa bude s diabolom diať ak napríklad pravou paličkou zatlačíme zhora na prednú a zdola na zadnú časť. A potom to skúste overiť. ■

4 (Ne)Inercialne vzťažné sustavy

Doteraz sme predpokladali, že náš systém popisujeme v nejakej dopredu dobre definovanej sústave a tým sa rozmýšľanie o súradnicových systémoch zväčša končilo. Občas sme potrebovali prejsť do alebo z ťažiskovej sústavy, ale to sme spravili len tak intuitívne pripočítaním rýchlosti. No a predpokladali sme, že v každej sústave s ktorou sme sa stretli bez problémov platia Newtonove zákony. V tejto časti sa na to všetko pozrieme poriadne a rozmyslíme si, ako tá istá situácia vyzerá v rôznych sústavách a čo z toho vyplýva.

4.1 Zmena vzťažnej sústavy a inerciálne vzťažné sústavy

4.1.1 Súradnicové systémy

Pod súradnicovým systémom budeme rozumieť dobre definovaný spôsob, ako povedať kde sa akékoľvek teleso nachádza. Na to budeme potrebovať: počiatok sústavy, tj. bod vzhľadom na ktorý meriame polohu telies a sadu jednotkových vektorov $\hat{x}_i, i = 1, 2, 3$, v smere ktorých budeme udávať súradnice telies. K určeniu polohy telesa ešte potrebujeme čas, ten ale budeme považovať za univerzálny a v každej sústave rovnaký. So far so good.

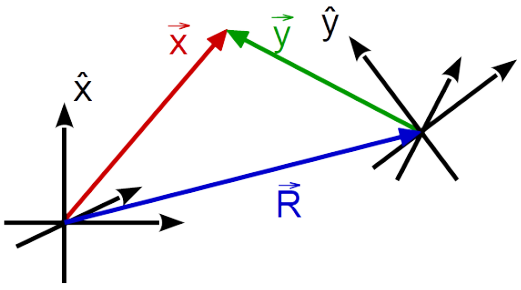
Ako budeme v takejto sústave merať rýchlosť a zrýchlenie telesa? Necháme teleso hýbať sa krátky čas dt a jeho novú polohu rozvinieme do druhého rádu – Taylorov rozvoj. Dostaneme

$$\vec{x}(t + dt) = \vec{x}(t) + \vec{v}dt + \frac{1}{2}\vec{a}dt^2 \ . \tag{4.1}$$

Rýchlosť telesa je potom z definície to, čo stojí v rozdiely $\vec{x}(t + dt) - \vec{x}(t)$ pri dt a zrýchlením to, čo stojí pri dt^2. Zdá sa to trochu zbytočne komplikované, ale čoskoro uvidíme, že má zmysel riešiť to takto dôkladne. Druhý newtonov zákon potom hovorí, že v slušnom svete platí $\vec{a} = \vec{F}/m$ a z definície je rýchlosť deriváciou zrýchlenia.

Budeme predpokladať, že všetky naše súradnicové systémy sú kartézke. Už sme pár krát videli, že v krivočiarych súradniciach prichádza komplikácia v tom, že zmena súradníc vektora môže byť spôsobená zmenou bázových vektorov a nie zmenou samotného vektora. Tak sa tejto komplikácii na zatiaľ vyhneme.

A teraz príde kľúčová otázka celej tejto časti. Máme iný súradnicový systém, ktorého počiatok je vzhľadom na pôvodný systém posunutý o vektor $\vec{R}$ a súradnicové osy sú dané vektormi $\hat{y}_i$.



V ňom budeme popisovať pohyb toho istého telesa

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{v}_y dt + \frac{1}{2}\vec{a}_y dt^2 \tag{4.2}$$

a platí $\vec{x} = \vec{R} + \vec{y}$. Aký je vzťah medzi $\vec{a}_x$ a $\vec{a}_y$ ak vieme aký je vzťah medzi $\hat{x}$ a $\hat{y}$? Ak vieme, že sústava x je inerciálna, za akých podmienok je inerciálna aj sústava y.

4.1.2 Inercialne vztazne sustavy

Ako uvidíme, inerciálnosť bude súvisieť so zotrvačnosťou telies – tendenciou odporovať zmene svojho pohybového stavu – a platnosťou zákona zotrvačnosti – prvého Newtonovho zákona. Zotrvačnosť sa po anglicky, a možno aj v iných jazykoch, povie *inertia*. A zotrvačné sily, ktoré čoskoro objavíme, budú také členy na silovej strane pohybovej rovnice, ktoré nepochádzajú z materiálovej interakcie medzi kúskami hmoty, ale zo zotrvačnosti – tendencie telies držať si svoju aktuálnu rýchlosť.

Na prvý Newtonov zákon sa dá pozerať ako na definíciu inerciálnej sústavy. To je taká, v ktorej je zrýchlenie telesa, na ktoré nepôsobí sila, nulové. Táto definícia ale nič nehovorí o tom, čo to sila vlastne je.

To je prekvapivo komplikovaná otázka :) My ju vyriešime nasledovne, trochu podvodom. Pomôžeme si s vedomosťou, ktorú zatiaľ v princípe nemáme – všetky telesá sa skladajú z atómov. A atómy medzi sebou pôsobia nejakými fundamentálnymi interakciami. Dá sa pozrieť na jednotlivé atómy z ktorých sa teleso skladá a pozbierať všetky sily, ktorými na tieto atómy pôsobia všetky ostatné atómy vo vesmíre. A tento súčet je sila, ktorá pôsobí na teleso. Ide o veľmi komplikovaný proces, keď treba sčítavať elektromagnetické, gravitačné a v princípe ďalšie sily a výsledkom je potom čosi ako trecia sila. Alebo normálová sila od podložky, odpor vzduchu a všetky ostatné sily, na ktoré sme zvyknutí.

To, čo budeme rozumieť pod silou – takou tou skutočnou silou F, ktorá patrí do pohybového zákona v inerciálnej sústave –, je teda výsledkom fundamentálnych interakcií medzi základnými stavebnými kúskami, z ktorých sa skladajú telesá.

Uff, to bolo veľmi veľa slov okolo zdanlivo jednoduchého slova. Späť k inerciálnym sústavám.

Ešte si poďme rozmyslieť, ako môže vzťah medzi x a y vyzerať. Zakážeme škálovanie osí a budeme predpokladať, že vo všetkých sústavách používame tie isté jednotky. Ak sú oba systémy kartézke, tri osi y môžu byť vzhľadom na x iba posunuté a nejak natočené. Ale toto posunutie a natočenie sa môže v čase meniť.

Ak máme danú na začiatok jednu inerciálnu vzťažnú sústavu, ako vyzerajú všetky ostatné? Inak povedané, ak vieme, že $\vec{a}_x = 0$, za akých podmienok je potom nutne aj $\vec{a}_y = 0$? Nuž bez veľkých rečí, ktorých už bolo až až, derivujeme

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}} &= \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \hat{x}_i \equiv \vec{a}_x \\ &= \sum_{i=1}^{3} \ddot{y}_i \hat{y}_i + 2\sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i \dot{\hat{y}}_i + \sum_{i=1}^{3} y_i \ddot{\hat{y}}_i + \ddot{\vec{R}} = \vec{a}_y + \dots \ .\end{aligned} \tag{4.3}$$

Prvý člen v druhom riadku je $\vec{a}_y$ a z požiadavky inerciálnosti y dostávame, že všetky ďalšie členy, označené ako ... musia byť nulové. Naviac musia byť nulové v každom čase a pre každý pohyb telesa.

To sa nedá docieliť inak ako tým, že každý z nich bude nulový a teda bázové vektory sa v čase nebudú meniť a posunutie bude najviac lineárne v čase.

Dostali sme teda, že pre inerciálnu sústavu x sú inerciálne také sústavy, ktoré sa vzhľadom na ňu pohybujú rovnomerne priamočiaru a sú nejak natočené, ale toto natočenie sa už v čase nemení. Rozmyslite si, že bez ohľadu na to, z ktorej inerciálnej sústavy sme na začiatku štartovali, takýmto spôsobom dostaneme všetky.

Pre rýchlosti v týchto sústavách potom platí

$$\vec{v}_x = \vec{v}_y + \dot{\vec{R}} \,, \tag{4.4}$$

čo je skladanie rýchlostí, ktoré sme už použili pri prechodoch medzi ťažiskovou a laboratórnou sústavou.

V inerciálnych sústavách platia newtonove zákony, zákony zachovania a celá mechanika tak, ako sme ju mali doteraz. Čo ale v tých ostatných, ktoré voláme neinerciálne?

4.2 Neinerciálne vzťažné sústavy

V neinerciálnych sústavách to bude inak. Tam nebude platiť Newtonov zákon v zmysle $\vec{F} = m\vec{a}$, kde na ľavej strane je sila ako výsledok všetkých interakcií tak, ako sme ju definovali v prechádzajúcej časti. Tu by sme v princípe mohli skončiť a povedať, že na fyziku v takých sústavách sme prikrátki. Ale ukáže sa, že čosi o nej predsa len budeme vedieť povedať.

Dokonca budeme vedieť Newtonov zákon v nejakej forme úplne zachrániť. Spoiler alert. Budeme vedieť na ľavú stranu doplniť členy – ktorým sa hovorí zotrvačné, alebo zdanlivé, sily – ktorých tvar bude úplne nezávislý od pohybu telesa[63] a budú univerzálne pre danú sústavu a takto upravený Newtonov zákon bude platiť. Treba si ale dávať pozor, že v zmysle našej definície je názov sila trochu zavádzajúci. Zotrvačné sily nie sú dôsledkom žiadnej interakcie, ale dôsledkom neinerciálnosti vzťažnej sústavy.

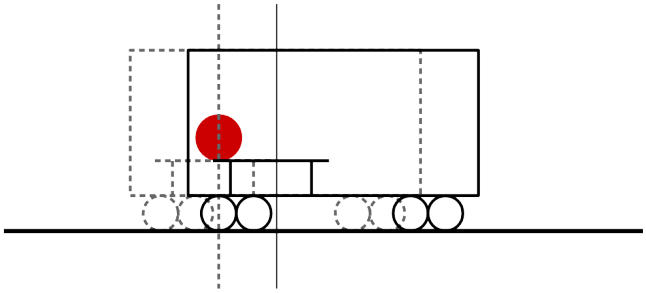
Na ich pôvod, dôsledky a popis a pozrieme tromi rôznymi spôsobmi.

4.2.1 Jednoduchý popis zotrvačných sil

Posuvné zrýchlenia. Najskôr sa pozrime na obľúbený vlakový príklad. Na koľajniciach stojí vlak, v ktorom je stôl. Stanica si so sebou nesie prirodzenú vzťažnú sústavu, tak isto vlak. Sústavu spojenú so stanicou budeme považovať za inerciálnu. No a vlak sa začne rozbiehať so zrýchlením a.

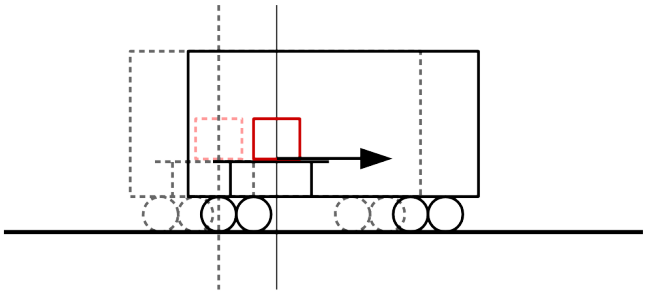
Nech je na stole položený valec, ktorý sa môže po stole voľne šmýkať. Na valec nepôsobí žiadna sila, takže v inerciálnej vzťažnej sústave sa nebude hýbať a zostane na mieste. V neinerciálnej sústave spojenej s vagónom to znamená, že sa valec začne rozbiehať opačným smerom so zrýchlením $-a$.

[63] Samotné sily od pohybu závisieť budú, ale vzorec, ktorým ich budeme počítať sa meniť nebude. Však uvidíte.



Človek vo vlaku na základe toho usúdi, že jeho sústava nie je inerciálna. Bez silového pôsobenia dochádza k zmene pohybu, čo je proti prvému Newtonovemu zákonu. Rovnako si ale všimne, že pohyb valca sa v jeho sústave dá popísať tak, ako keby na neho pôsobila sila veľkosti ma.

V inej situácii majme na stole položenú knihu. Tá sa po stole nešmýka, naopak trecia sila ju pevne drží na mieste. V inerciálnej sústave stanice sa pod pôsobením tejto sily knižka rozbehne spolu s vlakom so zrýchlením a.



V sústave spojenej s vagónom ale bude stáť na mieste. A to napriek tomu, že na ňu pôsobí nejaká sila. Čo opäť vedie na neplatnosť prvého zákona, ale tiež to opäť zachráni sila ma v smere proti pohybu vlaku. Vidíme teda, že v oboch situáciách zachráni platnosť Newtonovho zákona pridanie toho istého členu.

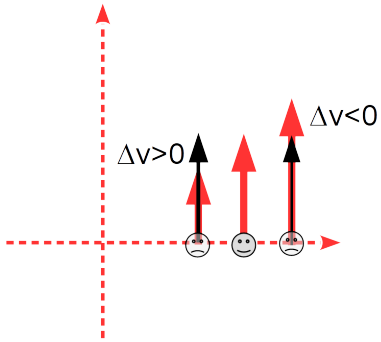
Otáčavé zrýchlenia. To bola sústava, ktorej počiatok zrýchľuje a teda $\ddot{\vec{R}} \neq 0$. Pozrime sa teraz na zložitejšiu situáciu sústavy, ktorá sa v čase otáča.

Majme ľadový kolotoč. Bežná vec. A majme človeka, ktorý na ľade stojí mimo osi otáčania. Na človeka nepôsobí žiadna sila a teda sa v inerciálnej sústave spojenej so Zemou pohybovať nikam nebude. V sústave spojenej s kolotočom ale koná pohyb po kružnici. Znamená to, že na ľavú stranu pohybovej rovnice musíme pridať dostredivú (!!!) zotrvačnú silu, ktorá bude tento pohyb zabezpečovať. K tomuto zdanlivému paradoxu sa ešte vrátime.

Ak je na ľade položený puk, ktorý sa otáča spolu s ľadom. V iniciálnej sústave na puk pôsobí dostredivá sila a tá spôsobuje jeho pohyb po kružnici. V neinerciálnej sústave spojenej s kolotočom sa teleso hýbe inak ako by táto sila hovorila. Nehýbe sa totiž vôbec. Tu sa objavuje už odstredivá sila, na ktorú sme zvyknutí. Výslednica tejto sily a trecej sily je nulová a teleso bude stáť.

Poďme sa ešte pozrieť na o čosi komplikovanejšiu situáciu. Nasledujúca úvaha bude najzložitejšia, ktorú budeme v tejto časti robiť. Ak ju pochopíte, všetko ostatné by malo byť už jasné. Majme obyčajný kolotoč, na ktorom stojí človek a otáča sa spolu s ním. A teraz spraví krok smerom preč od

osi otáčania kolotoča. Ako to vyzerá v inerciálnej sústave? Pôvodne človek konal pohyb po kružnici nejakou rýchlosťou. Pri posúvaní sa jeho rýchlosť bude meniť iba v radiánom smere, takže s rýchlosťou dookola sa nič diať nebude. V neinerciálnej sústave sa ale človek posunul do miesta, ktoré sa okolo osi otáča väčšou rýchlosťou ako to pôvodné! Pretože $v = \omega R$ a R sa zväčšilo. Človek sa ale stále pohybuje tou istou rýchlosťou a teda vzhľadom na kolotoč získal nejakú rýchlosť v smere proti otáčaniu. Získanie rýchlosti je zrýchlenie a zrýchlenie bez silového pôsobenia znamená neinerciálnosť. Ale dá sa vyriešiť pridaním zdanlivých síl. No ak by človek spravil krok smerom k osi otáčania, vzhľadom na kolotoč by zrýchlil a teda sila by pôsobila opačným smerom.



Všimnite si, že tu nehralo úlohu to, či sa sústava otáčala rovnomerne alebo menila svoju uhlovú rýchlosť. Aj rovnomerné otáčanie sústavy vedie na jej neinerciálnosť.

Záver. Prišli sme teda na to, že sú sústavy, kde neplatia Newtonove zákony a telesá sa rozbiehajú, aj keď na ne nepôsobia sily alebo stoja, ak keď na ne sily pôsobia. Ale zdá sa, že by sme mohli zaviesť nejaký silový efekt, vlastný pre danú sústavu, ktorý po pripísaní do pohybových rovníc dovolí Newtonove zákony ďalej používať. Ale to je len špeciálny konštrukt vlastný len pre daného pozorovateľa a nemá žiadny pôvod v skutočných silách.

4.2.2 Poriadnejší popis zotrvačných síl

Pozrime sa na situácie z prechádzajúcej časti o čosi precíznejšie. Dokonca aj nejakou matematikou. Pri tom si spomeňme na definíciu rýchlosti a zrýchlenia z prechádzajúcej časti.

Posuvné zrýchlenia. Ešte raz vlak rozbiehajúci sa so zrýchlením a a v ňom teleso, na ktoré pôsobí sila F. V sústave spojenej so stanicou sa teleso, ktoré sa pôvodne hýbalo s rýchlosťou v_0 z miesta x_0 pohne za čas dt do nového miesta

$$x = x_0 + vdt + \frac{1}{2}\frac{F}{m}dt^2 \tag{4.5}$$

a jeho rýchlosť sa zmení z v_0 na $v = v_0 + \frac{F}{m}dt$. Ako to vyzerá pre človeka vo vlaku? Ak predpokladáme, že v čase $t = 0$ sú počiatky v jednom bode, potom počiatočná poloha je tá istá $y_0 = x_0$ a poloha po čase dt je

$$y = x_0 + vdt + \frac{1}{2}\frac{F}{m}dt^2 - \frac{1}{2}adt^2 \ , \tag{4.6}$$

Vidíme teda, že

$$a_y = \frac{F}{m} - a \ . \tag{4.7}$$

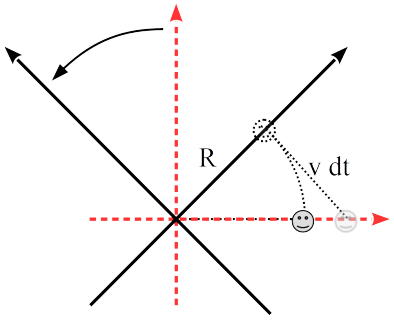
Toto sa dá upraviť na tvar

$$ma_y = F - am \ , \tag{4.8}$$

čo vyzerá ako pohybová rovnica v čiarkovanej sústave, len sa na mieste kde by sme očakávali silu objavilo okrem skutočnej sily F ešte čosi ďalšie. A tomu ďalšiemu budeme hovoriť zotrvačná sila.

Otáčavé zrýchlenia. Pre prípad rotujúcej sústavy to bude trochu komplikovanejšie, pretože tu už bude zotrvačná sila závisieť od toho, čo teleso robí.

Majme najskôr človeka, ktorý stojí na ľadovom kolotoči. Nech je vo vzdialenosti R od osi otáčania a nech sa kolotoč otáča uhlovou rýchlosťou ω. Ako na tomto obrázku:



Čiarkované osi sú osami laboratórnej sústavy (a teda osami rotujúcej sústavy v čase $t = 0$), plné čiary sú osi otočenej sústavy. Čiarkované teleso je otočená pôvodná poloha telesa, priesvitné teleso je poloha telesa v otočenej sústave, ak by sa pohybovalo podľa prvého Newtonovho zákona s rýchlosťou $(0, -v)$, plné teleso je skutočná poloha telesa. Rozdiel medzi priesvitným telesom a plným telesom je spôsobený zotrvačnou silou.

Rýchlosť človeka v sústave spojenej s kolotočom je $v = \omega R$. Za čas dt sa kolotoč otočí o uhol ωdt a v sústave spojenej s kolotočom sa človek dostane z polohy $(R, 0)$ do polohy $(R\cos\alpha, -R\sin\alpha)$. Rozvoj do druhého rádu v dt dá pre novú polohu

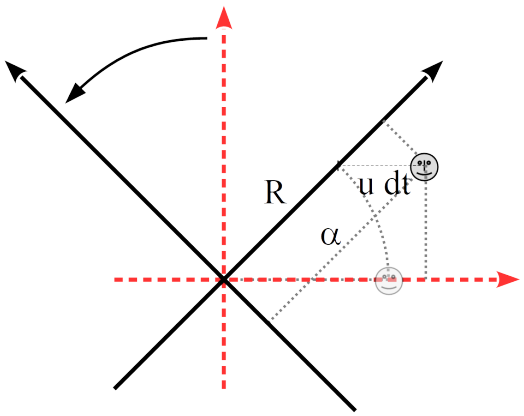
$$\left(R - \frac{1}{2}\omega^2 R dt^2, -\omega R dt\right) \ . \tag{4.9}$$

Tu vieme priamo odčítať spomínanú rýchlosť $(0, -v)$ a zrýchlenie človeka $(-\omega^2 R, 0)$. Dostávame teda nenulové $m\vec{a}$ a toto neinerciálny pozorovateľ intepretuje ako nejaké silové pôsobenie, ktoré potom spôsobuje pohyb po kružnici. Všimnite si, že po matematickej stránke ide o veľmi podobný výpočet aký sme robili, keď sme popisovali pohyb po kružnici v príklade 1.30. Idea je však veľmi rozdielna.

Čo v druhom prípade, keď čosi drží puk na kolotoči? Vtedy na puk pôsobí sila $F = -m\omega^2 R$ a v inerciálnej sústave koná pohyb po kružnici. V neinerciálnej sústave kolotoča sa ale jeho poloha nezmení a v $\vec{y} - \vec{y}_0$ pri dt^2 vystupuje 0. To znemená, že okrem členu F chceme na silovú stranu druhého Newtonovho zákona dať ďalší člen $+m\omega^2 R$, a teda dostávame štandardnú odstredivú silu.

Čoskoro uvidíme, prečo sme v prípade posuvného zrýchlenia dostali v oboch prípadoch to isté ale v prípade otáčajúcej sa sústavy nie.

Ešte sme hovorili o situácii, v ktorej človek kráča v radiálnom smere. Nech je to rýchlosťou u. Pôsobí na neho dostredivá sila, ktorá zariaďuje jeho pohyb po kružnici v inerciálnej sústave. Obrázok vyzerá nejak takto:



V inerciálnej sústave pre posunutie za čas dt dostaneme

$$(R,0) \to \left(R + udt - \frac{1}{2}\omega^2 R dt^2, R\omega dt\right) \tag{4.10}$$

a teda rýchlosť $(u, \omega R)$ ako by sme očakávali a zrýchlenie $-\omega^2 R$ podľa druhého newtonovho zákona. V neinerciálnej sústave spojenej s kolotočom sa za čas dt posunie iba takto

$$(R,0) \to \left(R + udt, -\omega u dt^2\right) \ . \tag{4.11}$$

V tejto sústave teda dostávame rýchlosť $(u, 0)$, opäť nič neočakávané. Zrýchlenie telesa je ale $(0, -2\omega u)$ a aby sme toto dostali musíme v radiálnom smere k skutočnej sile pripočítať zdanlivú odstredivú a v uhlovom smere pôsobí nová zotrvačná sila veľkosti $-2m\omega u$. Hovoríme jej Corriolisova a je dôsledkom toho, že pri radiálnom pohybe sa teleso dostáva do miest, ktoré sa otáčajú okolo osi rýchlejšie, prípadne pomalšie, ako bolo miesto, vzhľadom na ktoré pôvodne teleso stálo.

Príklad 4.1. Aký by bol rozdiel, ak by sme krok v radiálnom smere spravili ešte pred otočením? To znamená, že v inerciálnej sústave by sme spravili krok

$$(R,0) \to ((R + udt)\cos\alpha, (R + udt)\sin\alpha) \tag{4.12}$$

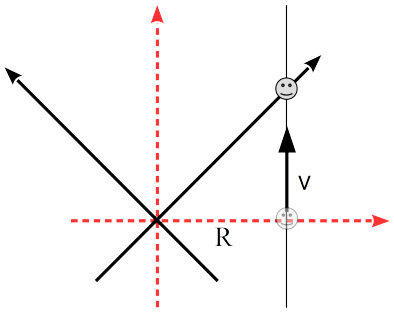
a v neinerciálnej

$$(R,0) \to ((R + udt), 0) \ . \tag{4.13}$$

Na aké výsledky by to viedlo a ako vieme, ktoré sú tie správne? □

Na záver tejto časti si ešte precvičíme celý tento koncept na obľúbenom triviálnom prípade – rovnomernom priamočiarom pohybe.

Príklad 4.2. Majme teleso, ktoré sa pohybuje rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v a zvoľme v tomto smere os y. Os x zvoľme tak, že v čase $t = 0$ sú súradnice telesa $(R, 0)$, viď. obrázok. Ako vyzerajú v čase t súradnice telesa v tejto sústave? Ako vyzerajú súradnice telesa v sústave, ktorej os x sa natáča tak, aby bola vždy v smere telesa? Aké sily pôsobia na teleso v tejto sústave?



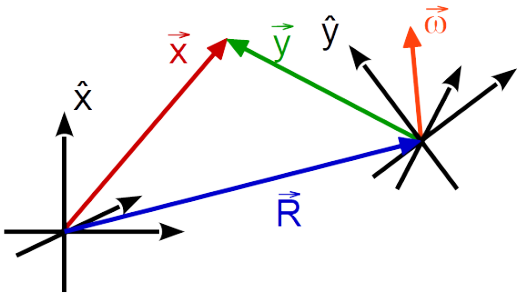
□

4.2.3 Poriadny popis zotrvačných síl

Keď sme už teraz v zotrvačných silách pečení a varení, môžeme sa na ne pozrieť poriadne, od podlahy. Budeme derivovať a rovno pracovať v troch rozmeroch. Zíde sa nám vedomosť z predchádzajúcej kapitoly – že pri otáčaní uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ je časová derivácia vektora daná vzťahom

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x} \,. \tag{4.14}$$

Tam to bola reálna rýchlosť reálneho hmotného bodu pri reálnom otáčaní. Tu to je zmena vektora pri malom otočení spôsobenom otočením súradnicovej sústavy. Ale matematika je tá istá.



No a kľúčová myšlienka bude, že pri derivovaní vektora nesmieme zabudnúť aj na zmeny bázových vektorov a nepozerať sa len na zmeny súradníc v tejto báze. V inerciálnej sústave máme pre deriváciu vektora $\vec{x}$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{x}_i = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \hat{x}_i = \vec{a}_x \tag{4.15}$$

a keďže ide o inerciálnu sústavu, platí $m\vec{a}_x = \vec{F}$. Sústavu y zoberme tak, že má počiatok posunutý o vektor $\vec{R}$ a vzhľadom na $\hat{x}_i$ sa otáča uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$. Pre deriváciu toho istého vektora dostávame

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{R}} + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3} y_i \hat{y}_i = \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^{3} y_i \dot{\hat{y}}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_y + \sum_{i=1}^{3} y_i \, \vec{\omega} \times \hat{y}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_y + \vec{\omega} \times \vec{x} \,. \tag{4.16}$$

A potom

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{3} \ddot{y}_i \hat{y} + \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i \vec{\omega} \times \hat{y}_i + \vec{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i \hat{y}_i + \vec{\omega} \times \vec{x} \right) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} =$$

$$= \ddot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{3} \ddot{y}_i \hat{y}_i + 2 \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i \vec{\omega} \times \hat{y}_i + \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{y}_i) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} = \tag{4.17}$$

$$= \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_y + 2\vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} \; . \tag{4.18}$$

Túto rovnicu teraz vynásobíme m, použijeme pohybovú rovnicu, preusporiadame členy a dostaneme s veľkou slávou pohybovú rovnicu v neinerciálnej sústave y ako

$$m\vec{a}_y = F - m\ddot{\vec{R}} - 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}_y - m\,\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{y} - m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} \; . \tag{4.19}$$

Vidíme, že v neinerciálnej vzťažnej sústave neplatí $\vec{F} = m\vec{a}$. Ale máme jasný predpis, čo dať na pravú stranu k F aby sme dostali rovnicu, ktorá nejak tak vyzerá. Týmto členom sa hovorí zotrvačné sily, postupne v poradní zotrvačná, Corriolisova, odstredivá a Eulerova. Tieto sily nie sú skutočnými silami v zmysle toho, že pochádzajú od nejakej interakcie medzi telesami alebo ich časťami. Sú to členy, ktoré sa správajú ako sily, vystupujúce v pohybovej rovnici v neinerciálnej vzťažnej sústave.

Odstredivá sila. Už sme videli ako odstredivá sila pochádza z toho, že teleso v neinerciálnej sústave pokračuje ďalej rýchlosťou ωR a to ho pri otočení sústavy dostane do väčšej vzdialenosti, ako by sme čakali. V neinerciálnej sústave sa to dá interpretovať – resp. popisovať – ako nejaké silové pôsobenie.

Z obľúbeného vzorca pre trojitý vektorový súčin dostaneme

$$F_{ods} = -m\,\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{y} = -m(\vec{\omega} \cdot \vec{y})\vec{\omega} + m\omega^2 \vec{y} \; . \tag{4.20}$$

Prvý člen vykompenzuje zložku druhého v smere $\vec{\omega}$ a teda odstredivá sila pôsobí kolmo na os otáčania sústavy. Ak v sústave y zavedieme cylindrické súradnice so z-ovou osou v smere otáčania, pre odstredivú silu máme

$$F_{ods} = m\omega^2 r\hat{r} \; . \tag{4.21}$$

Vidíme, že táto sila je potenciálová s potenciálom v týchto súradniciach

$$V(z, r, \theta) = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \; . \tag{4.22}$$

Všeobecne by sme pre potenciál dostali

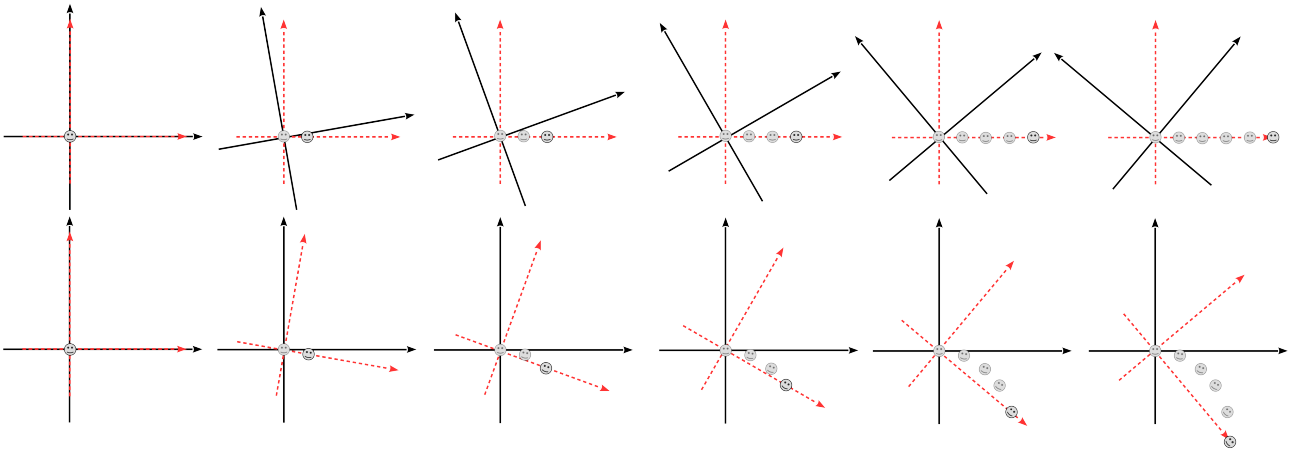
$$V(\vec{y}) = -\frac{1}{2} m(\vec{\omega} \times \vec{y})^2 \; . \tag{4.23}$$

Potenciál klesá do mínus nekonečna, sila je odpudivá ako by sme zo skúsenosti (a z názvu) očakávali.

Na chvíľu si teraz spomenieme na efektívny potenciál z časti o jednom telese v troch rozmeroch. Keď tam za moment hybnosti dosadíme $L = mr^2\omega$, dostaneme presne výraz pre potenciál odstredivej sily. Na túto časť efektívneho potenciálu sa teda dá pozerať ako na dôsledok neinercálnosti sústavy, v ktorej z-ová os smeruje kolmo na rovinu, v ktorej sa teleso pohybuje a x-ová os je neustále natáčaná tak, aby teleso ležalo na nej, rovnako ako v príklade 4.2.

Corriolisova sila. Tento člen vzniká preto, že sa teleso pohybuje v smere preč alebo k osi otáčania a tým pádom sa dostáva na miesta, kde je jeho rýchlosť nekompatibilná s rýchlosťou sústavy. Ak sa posunie bližšie, sústava spomalila, ak ďalej, tak zrýchlila. Táto zmena rýchlosti telesa vzhľadom na sústavu sa dá interpretovať ako zdanlivé silové pôsobenie.

Vráťme sa ku ľadovému kolotoču. Majme človeka, ktorý sedí v strede na osi otáčania a odrazí sa radiálnym smerom. Ak medzi ním a kolotočom nie je trenie, pôjde proste rovnomerne priamočiaro dopredu. Z pohľadu kolotoča bude ale jeho pohyb vcelku komplikovane krivočiary. Tento divný pohyb interpretuje pozorovateľ v otáčajúcej sa sústave ako výsledok pôsobenia Corriolisovej sily.



Na obrázku je horný riadok postupnosť polôh telesa v inerciálnej sústave – červené osy. Na dolnom obrázku v otáčajúcej sa neinerciálnej sústave – čierne osy.

Bude o tom ešte viac reč v ďalšej časti, čosi však spomeňme už tu. Corriolisova sila je zodpovedná za veľa rôznych efektov na našej planéte, tak napríklad vzniká mnoho štruktúr v prúdení vzduchu v atmosfére a vody v oceánoch. Wikipédia, ChatGPT alebo staré dobré googlenie vám isto rado prezradí oveľa viac.

Príklad 4.3. Rozmyslite si, ako v prípade človeka stojaceho na ľadovom kolotoči dá súčet odstredivej a Corriolisovej sily dostredivú silu pre zdanlivý kruhový pohyb. □

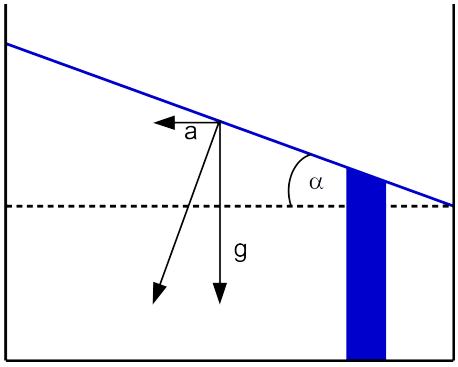
4.3 Dôsledky zotrvačných síl

4.3.1 Lineárne zrýchľujúce sústavy

Tu len jeden príklad, nie je to až taká veľká veda :) Alebo?

Príklad 4.4. Pod akým uhlom bude v rozbiehajúcom sa vlaku hladina v šálke kávy? □

Riešenie. Hladina je v rovnovážnej situácii v každom bode kolmá na silu, ktorá na kvapalinu pôsobí. Ak by nebola, komponenta sily v smere rovnobežnom s hladinou by pôsobila na elementy kvapaliny a začala by ich presúvať. Čo nie je rovnovážna situácia.



Je priamočiare presunúť sa do neinerciálnej sústavy, kde okrem skutočnej gravitačnej sily mg pôsobí na elementy kvapaliny aj zotrvačná sila $-ma$, kde a je zrýchlenie vlaku. Z jednoduchej geometrie úlohy dostaneme pre uhol medzi hladinou a vodorovným smerom

$$\tan\alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}\ . \tag{4.24}$$

Tu je zaujímavé rozmyslieť si, že situácia je v inerciálnej sústave oveľa komplikovanejšia. Tam totiž okrem gravitačnej sily pôsobí na vyznačený kus kvapaliny aj zvyšná kvapalina tlakom. Tým, že hladina napravo a naľavo má rôznu výšku, výsledné sily sprava a zľava sú rôzne. A výsledkom je nenulová sila smerom doprava, ktorá spôsobuje zrýchlenie kvapaliny. V inerciálnej sústave je teda naklonenie kvapaliny spôsobené požiadavkou nenulovej výslednej sily vo vodorovnom smere, ktorá bude zrýchľovať kvapalinu spolu s vlakom.

Skúste si rozmyslieť, čo sa deje s tlakom v kvapaline v neinerciálnej sústave. ■

4.3.2 Menej komplikované rotujúce sústavy

Zopár príkladov na odstredivé sily v otáčajúcich sa sústavách.

Príklad 4.5 (Matematické kyvadlo)**.** Majme matematické kyvadlo, ktoré sa môže pohybovať iba vo zvislej rovine. Tú roztočíme uhlovou rýchlosťou ω. Ako bude vyzerať rovnovážna poloha kyvadla? S akou periódou bude kmitať toto kyvadlo? Situáciu si rozmyslite z pohľadu inerciálneho aj neinerciálneho pozorovateľa. □

Riešenie. Pozrime sa na situáciu z pohľadu neinerciálneho pozorovateľa. V jeho sústave sa nachádza kyvadlo v potenciáli tiažovej a odstredivej sily (v cylindrických súradniciach)

$$V(r,\theta,z) = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\ . \tag{4.25}$$

Kyvadlo je fixované na záves dĺžky L, ktorý ak zoberieme v počiatku, a teda $z = -L\cos\theta$ a $r = L\sin\theta$, dostaneme

$$V(\theta) = -mgL\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 L^2\sin^2\theta\ . \tag{4.26}$$

Minimá tohto potenciálu θ_0 nájdeme z nulovosti derivácie a dostávame

$$\sin\theta_0 = 0 \text{ alebo } \cos\theta_0 = \frac{g}{\omega^2 L}\ . \tag{4.27}$$

Prvá možnosť je zvislá poloha kyvadla a existuje vždy. Druhá možnosť existuje iba ak $\omega^2 > g/L$ a teda ak sa sústava otáča dostatočne rýchlo. Z druhej derivácie zistíme, že prvá poloha je minimom – a teda stabilná – presne vtedy, ak neexistuje druhý extrém. A ak druhý extrém existuje, je minimom a stabilnou polohou on a prvá poloha sa stane nestabilnou.

Presnejšie dostaneme, že frekvencia kmitov je v oboch prípadoch postupne

$$\sqrt{\frac{g}{L} - \omega^2}\ ,\ \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 L^2}}\ . \tag{4.28}$$

Relevantný bude ten prípade, kde je reálna.

Okrem inerciálneho pohľadu si skúste rozmyslieť čo sa presne deje v kritickom prípade keď $\omega^2 = g/L$. ■

Príklad 4.6 (Matematické kyvadlá)**.** Majme teraz dve matematické kyvadlá, jedno zavesené na druhom, ktoré sú tiež roztočené ako v predchádzajúcom prípade. Ako bude vyzerať ich rovnovážna poloha? □

Riešenie. V inerciálnej sústave by sme si potrebovali rozmyslieť, že telesá konajú v rovnovážnej sústave kruhový pohyb a že dostredivou silou pre tento pohyb musí byť výslednica gravitačných síl a ťahových síl lán, na ktorých sú telesá zavesené. V neinerciálnej sústave sa telesá nachádzajú – opäť v cylindrických súradniciach – v potenciáli

$$V(z_1, z_2, r_1, r_2) = mgz_1 + mgz_2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r_2^2 \tag{4.29}$$

a opäť sú viazané podmienkami

$$z_1 = -L\cos\theta_1\ ,\ r_1 = L\sin\theta_1\ ,\ z_2 = z_1 - L\cos\theta_1\ ,\ r_2 = r_1 + L\sin\theta_2\ . \tag{4.30}$$

Napísať rovnice pre minimum tohto potenciálu je viac menej priamočiare ale riešenie je už náročnejšie. Dá sa overiť, že zvislá poloha $\theta_1 = \theta_2 = 0$ je vždy riešením ale stabilná je iba pre $\omega^2 < (2 - \sqrt{2})g/L$. Ešte sa dá vcelku jednoducho overiť, že iné riešenie $\theta_1 = \theta_2$ neexistuje. A potom sa dá zabávať s riešeniami týchto podmienok a stabilitou riešení pre rôzne hodnoty parametrov numericky. ■

Príklad 4.7 (Newtonovo vedro)**.** Aký tvar má ustálená hladina vody v roztočenom vedre s vodou? □

Riešenie. Ako sme už hovorili, sila pôsobiaca na elementy na hladine kvapaliny je v rovnovážnom stave kolmá na hladinu. To znamená, že hladina vody sa uloží tak, že bude ekvipotenciálna, pretože vtedy je derivácia v smere hladiny nulová a teda na elementy nepôsobí žiadna sila. Čo v ľudskej reči znamená, že element nemá chuť presunúť sa na miesto toho vedľajšieho, pretože tým nič nezíska.

Hľadáme teda takú konfiguráciu hladiny $z = f(r)$, že potenciálna energia

$$V(r, z) = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{4.31}$$

bude konštanta. Dostávame tak

$$f(r) = \frac{K}{mg} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 \tag{4.32}$$

a teda paraboloid. Že výsledok je čosi podobné sa dá overiť aj s lyžičkou v šálke čaju. No a takto sa napríklad vyrábajú parabolické zrkadlá. ■

Príklad 4.8. Rozmyslite si, že aj jednoduchá zotrvačná sila z príkladu 4.4 je potenciálová, nájdite jej potenciál a nájdite hľadaný uhol α týmto spôsobom. □

4.3.3 Zem ako neinerciálna vzťažná sústava

Doteraz sme slovným spojením "laboratórna" sústava predpokladali, že sústavy štandardne spojené s miestnosťami na Zemi sú inerciálne. Keďže sa však Zem otáča, toto nie je pravda a v skutočnosti sa v týchto sústavách prejavia zotrvačné sily, resp. rozdiely medzi pohybom nameraným v tejto sústave a výsledkami z pohybového zákona $F = ma$. Ako však uvidíme, tieto rozdiely sú v bežných situáciách veľmi malé a keď staviate dom alebo robíte čosi podobné, uvažovať ich nemusíte. Keď však posielate družicu do vesmíru, sú úplne kľúčové.

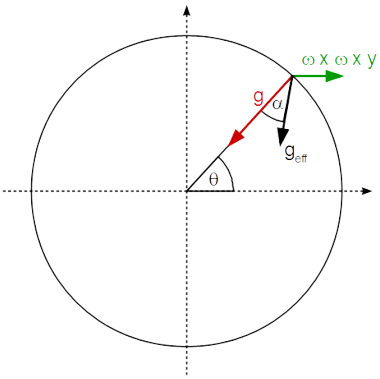
Zem sa otáča uhlovou rýchlosťou

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60\, s} \approx 7 \times 10^{-5}\, s^{-1} \ . \tag{4.33}$$

V našich jednotkách to je málo, takže efekty otáčania budú pre javy, ktoré majú v SI jednotkách rozumné hodnoty veľmi malé. Vo všeobecnosti budeme voliť súradnice tak, že sa Zem otáča okolo z-ovej osi, a teda $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$, a jej počiatok bude v strede Zeme.

Príklad 4.9 (Efektívna tiažová sila)**.** Aký vplyv má rotácia Zeme na stojaci predmet na jej povrchu? Situáciu si rozmyslite z pohľadu inerciálneho aj neinerciálneho pozorovateľa. □

Riešenie. Trochu názvoslovia. Sile, ktorou pôsobí planéta Zem na telesá na jej povrchu sa hovorí gravitačná. Sile, ktorú tieto telesá na povrchu Zeme vnímajú sa hovorí tiažová a áno, je medzi tým rozdiel. Týmto rozdielom je odstredivá sila v neinerciálnej sústave, v ktorej sa teleso nachádza. Rozmyslenie v inerciálnej sústave opäť nechávame na čitateľa, poďme sa na situáciu pozrieť v neinerciálnej sústave.



Snáď netreba veľmi zdôrazňovať, že v tomto obrázku je veľkosť odstredivého zrýchlenia značne prehnaná.

Výsledné efektívne tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme je

$$\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{y} \ , \tag{4.34}$$

čo keď rozložíme do radiálneho a uhlového smeru tak dostaneme (aby sme sa držali klasickej zemskej súradnicovej sústavy, uhol θ pôjde od rovníka k pólom, čo je naopak ako pri zvyčajných sférických

súradniciach)

$$\vec{g}_{eff} = (-g + R\omega_0^2 \cos^2\theta)\hat{r} + \omega_0^2 R \cos\theta \sin\theta\, \hat{\theta} \ . \tag{4.35}$$

Uhol medzi smerom priamo do stredu a smerom g_{eff} je

$$\tan\alpha = \frac{\omega_0^2 R \cos\theta \sin\theta}{g - R\omega_0^2 \cos^2\theta} \approx \frac{R \sin 2\theta}{2g}\omega_0^2 \ . \tag{4.36}$$

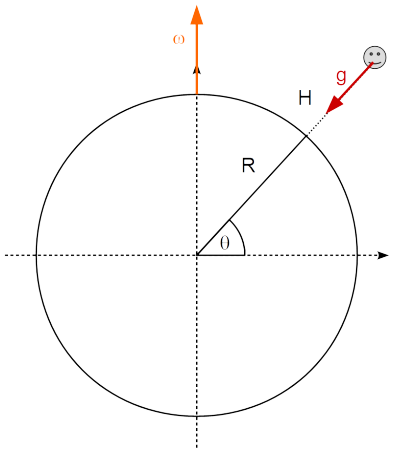
Pre veľkosť tiažového zrýchlenia dostávame

$$g_{eff} \approx g\left(1 - \frac{R\omega_0^2}{g}\cos^2\theta\right) \ . \tag{4.37}$$

Veľkosť tiažového zrýchlenia je teda najmenšia pri rovníku, čo sme ale mohli vidieť už z obrázku. Číselne je faktor $R\omega_0^2/g \approx 0.003$, čo je v bežnom živote málo, ale sú situácie v ktorých to hrá úlohu. Keď chceme niečo vystreliť do kozmu, najlacnejšie je robiť to z miesta čo najbližšie pri rovníku. Tak isto sa blízko pri rovníku lepšie robia atletické rekordy. K tomu prispieva aj to, že Zem nie je guľa (kvôli odstredivej sile), ale na rovníku je širšia a teda sme ešte ďalej od stredu, kde je nižšia gravitačná sila. ■

Príklad 4.10 (Pád z veľkej výšky)**.** Aký vplyv má rotácia Zeme na pád telesa z (väčšej) výšky H? Padne teleso pred alebo za bod, na ktorý by padlo v prípade neotáčajúcej sa Zeme? □

Riešenie. V tomto prípade môžeme zanedbať efekt odstredivej sily. Presnejšie povedané, ak sa budeme zaujímať o výsledky iba do rádu ω_0, tj. do prvého netriviálneho rádu, tak odstredivá sila si nezahrá, lebo jej efekty sú až rádu ω_0^2. Tým, že nebudeme uvažovať odstredivú silu dávame hranicu na presnosť našich úvah.



Riešime teda pohybovú rovnicu

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{g} - 2\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \ . \tag{4.38}$$

To, čo bude nasledovať sa nazýva poruchová metóda. Po formálnej stránke budeme predpokladať, že riešenie tejto rovnice má pekné analytické vyjadrenie ako funkcia parametra ω_0 a my budeme vlastne hľadať jej Taylorov rozvoj. Konkrétne iba jeho prvý člen. Názov metódy pochádza z toho, že na efekt

Corriolisovej sily sa dá pozerať ako na malú "poruchu" k efektu oveľa väčšej gravitačnej sily. Výsledný pohyb teda bude vyzerať viac menej ako voľný pád, iba trochu porušený efektom čohosi malého naviac.

Ako sme hovorili niekedy v úvode, nič ako malý rozmerný parameter neexistuje. Celé by sa to dalo formalizovať presnejšie, nám ale bude stačiť nasledujúci argument. Rozmer ω_0 je s^{-1}, takže $1/\omega_0$ určuje akýsi charakteristický čas (približne jeden deň). Priblíženie malého ω_0 teda vlastne hovorí, že procesy na ktoré sa takto môžeme pozerať musia trvať oveľa menej ako tento charakteristický čas. Ak padáme sekundy alebo minúty, mali by sme byť úplne v pohode. Ak sa už blížime k hodinám, dávanie rúk do akýchkoľvek ohňov by som si dva krát rozmyslel.

Riešenie rovnice (4.38) budeme hľadať v tvare

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t) + \omega_0 \vec{x}_1(t) \ . \tag{4.39}$$

Dosadíme, zahodíme člen úmerný ω_0^2, pretože takéto členy už chýbajú aj v pôvodnej rovnici, pozbierame zvyšné členy pri tých istých mocninách ω_0 a dostaneme

$$\left(\ddot{\vec{x}}_0 - \vec{g}\right) + \omega_0 \left(\ddot{\vec{x}}_1 + 2\hat{\omega} \times \dot{\vec{x}}_0\right) = 0 \ . \tag{4.40}$$

V tejto rovnici musia byť zátvorky nulové nezávisle. Argumenty sú na to dva, jeden lepší ako druhý. Prvý hovorí, že ω_0 je veľmi malé a teda prvý člen v tejto rovnici je oveľa väčší ako druhý a teda členy nemajú šancu vynulovať sa navzájom. Druhý argument hovorí, že rovnica musí platiť pre hocijakú hodnotu ω_0. Ak by sa aj nejakým obskúrnym spôsobom členy medzi sebou vynulovali, ak by sme ω_0 trochu zmenili, rovnosť by sa pokazila.

Z prvej zátvorky dostávame, aj so započítaním počiatočných podmienok

$$\vec{x}_0(0) = ((R+H)\cos\theta, 0, (R+H)\sin\theta)) \ , \ \dot{x}_0(0) = 0 \tag{4.41}$$

ako riešenie starý známy voľný pád

$$\vec{x}_0 = \left(\left((R+H) - \frac{1}{2}gt^2\right)\cos\theta, 0, \left((R+H) - \frac{1}{2}gt^2\right)\sin\theta\right) \ . \tag{4.42}$$

To keď zderivujeme a dosadíme do druhej zátvorky dostaneme

$$\ddot{\vec{x}}_1 = 2gt\cos\theta\,\hat{y} \ . \tag{4.43}$$

Túto rovnicu teraz stačí dva krát zintegrovať a dostaneme výsledné riešenie

$$\vec{x} = \vec{x}_0(t) + \frac{1}{3}\omega_0 g t^3 \cos\theta\,\hat{y} \ . \tag{4.44}$$

Čas, za ktorý teleso dopadne je stále ten istý $T = \sqrt{2H/g}$, ale dôjde ku kladnému posunutiu v y-ovom smere. Čo keď si rozmyslíte je posunutie v smere rotácie a padajúce teleso predbehne rotujúcu Zem! Aká je tomu príčina? Prvá je zákon zachovania momentu hybnosti – teleso sa približuje k Zemi a na to, aby malo rovnaký moment hybnosti musí preto zrýchľovať v uhlovom smere. Druhým dôvodom je to, že teleso sa vďaka rotácii Zeme pohybuje v uhlovom smere rýchlejšie ako bod, ktorý sa nachádzal priamo pod ním.

Vieme dostať aj približnú vzdialenosť o ktorú to bude. Dosadíme T do y-ovej časti (4.44) a máme

$$\delta = \frac{\omega_0 g}{3}\left(2H/g\right)^{3/2} \approx 2.2 \times 10^{-5} H^{3/2} \ , \tag{4.45}$$

alebo pri výške 100 metrov asi 2 centimetre. ■

4.4 Ponaučenie

Ešte raz si to celé zhrňme. Zotrvačné sily neexistujú. Sú len formálnym nástrojom ako v neinerciálnych vzťažných sústavách zachrániť druhý Newtonov zákon. Napriek tomu majú veľmi reálne efekty na skutočné fyzikálne systémy. Tak ako to teda je?

Skutočné efekty zotrvačných síl sú efektami skutočných síl, ktorí nám ale neinerciálnosť vcelku úspešne ukrýva. No a samotnej zotrvačnosti. Keď napríklad stojíte v brzdiacom autobuse a máte pocit, že vás čosi tlačí dopredu, to v skutočnosti trecia sila drží nohy na mieste a vyťahuje vám ich z pod zvyšku tela, ktoré sa zotrvačnosťou posúva dopredu. Podobne sa dá rozmyslieť skutočný pôvod všetkých ďalších efektov.

Na záver tejto časti spomeňme jedno pozorovanie. Vo všetkých zotrvačných silách vystupuje hmotnosť telesa a s jednou takou silou sme sa stretli už skôr. Ale to určite nebude mať žiadne hlboké dôsledky.

Ďalšie úlohy

Príklad 4.11. Už veľa krát sme počítali, čo sa stane keď teleso hodíme rýchlosťou v pod uhlom α. Bude nás zaujímať, ako bude táto situácia vyzerať, keď budeme teleso hádzať v zrýchľujúcej sústave.

Najskôr sa na problém pozrime v inerciálnej sústave. Teleso hodíme rovnako, ale miesto, z ktorého sme ho vyhodili bude rovnomerne zrýchľovať so zrýchlením a.

- Kde sa v čase T bude nachádzať toto miesto?
- Rozmyslite si, že pohyb telesa bude vyzerať rovnako. Ako ďaleko od miesta, z ktorého sme ho vyhodili, teleso dopadne?

Pozrime sa teraz na situáciu v neinerciálnej sústave. V nej okrem tiažovej sily pôsobí na teleso zotrvačná sila $-ma$ v x-ovom smere.

- Napíšte pohybové rovnice pre teleso v tejto sústave.
- Nájdite polohu telesa v čase t a nájdite čas, za ktorý teleso dopadne.
- Vypočítajte vzdialenosť dopadu telesa od miesta, z ktorého sme ho vyhodili. Porovnajte s výsledkom prechádzajúcej časti.

□

Príklad 4.12. Na kolotoči, ktorý sa otáča okolo svojej osi uhlovou rýchlosťou ω hádžeme loptičkou.

- Pred tým, ako sa kolotoč roztočí, hodíme z miesta $(D, 0, 0)$ loptičku pod uhlom α rýchlosťou u v radiálnom smere. Ukážte, že dráha po ktorej sa loptička bude pohybovať bude

$$\vec{x}_0(t) = \left(D + u\cos\alpha t, 0, u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \right). \tag{4.46}$$

- Urobíme to isté na otáčajúcom sa kolotoči. Rozmyslite si, že pohybová rovnica

$$m\ddot{\vec{x}} = m\vec{g} - 2m\ \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \tag{4.47}$$

prejde v priblížení malého $\vec{\omega} = \omega\ \hat{z}$ a rozvoji $\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t) + \omega\vec{x}_1(t)$ na

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -2\omega\hat{z} \times \dot{\vec{x}}_0. \tag{4.48}$$

- Dosaďte neporušené riešenie a zistite, ako musíme hodiť loptičku ak chceme, aby dopadla na to isté miesto, ako pri stojacom kolotoči.

□

Príklad 4.13 (Slapové sily)**.** Čo robia Zem a Mesiac samé o sebe vieme z príkladu 3.19 – obiehajú po elipsách okolo spoločného ťažiska. Možno ale neuniklo vašej pozornosti to, že okrem toho hrá v ich existencii dôležitú úlohu aj ďalší objekt – Slnko. Vo veľmi rozumnom priblížení môžeme povedať, že ťažisko sústavy Zem-Mesiac obieha okolo Slnka po kružnici s patričným polomerom a patričnou rýchlosťou. Čo sa ale bude diať v ťažiskovej sústave teraz? □

Príklad 4.14. Ako cvičenie zoberte do úvahy pri páde z veľkej výšky aj odstredivú silu a vypočítajte pohybovú rovnicu poruchovou metódou do druhého rádu v ω_0. □

Príklad 4.15. Na spoločnom závese visia na špagátoch dĺžky L dve guličky hmotnosti m. Sú elektricky nabité, takže sa odpudzujú silou, ktorá je rovná kq^2/r^2, kde r je vzdialenosť guličiek. Okrem toho je medzi nimi pružina, ktorá má tuhosť K a v nenatiahnutom stave nulovú dĺžku. A aby toho nebolo málo, celé sa to otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω.

1. Aký uhol zvierajú špagáty v rovnovážnej polohe?
2. Aká je perióda malých kmitov guličiek okolo tejto rovnovážnej polohy?

□

Príklad 4.16. Do úvah pri páde telesa pod vplyvom Corriolisovej sily sme nezarátali odpor vzduchu. Trúfnete si na to? □

Návod. Lineárny odpor by mal byť vcelku priamočiary, lebo tam sú smery nezávislé. Pri kvadratickom odpore to už tak nie je, zas poruchové priblíženie by mohlo veci značne zjednodušiť. Potrápte sa a ak sa k čomusi zaujímavému dopočítate, dajte vedieť, rád sa na vaše výsledky pozriem. ■

5 Trecia sila

Ak sa chceme rozprávať o situáciách z bežného života, tému trenia nemôžeme obísť. Hrá totiž kľúčovú úlohu v živote každého z nás. Niekedy žiaľbohu, niekedy chvalabohu, niekedy žiaľbohu, že chvalabohu a niekedy chvalabohu, že žiaľbohu.

5.1 Mechanizmus suchého trenia

Budeme sa rozprávať o "suchom" trení, tj. o procesoch, kedy sú v kontakte dva rôzne, dobre definované povrchy dvoch rôznych dobre definovaných telies a vzhľadom na seba sa pohybujú, alebo by sa minimálne chceli pohybovať. To znamená, že nás nebudú zaujímať prípady v ktorých je medzi telesami vrstva tekutého materiálu alebo o trecích silách priamo v tekutinách, ktorému hovoríme mokré trenie a budeme sa mu venovať v ďalšom diele.

Vtedy vzniká odporová sila, ktorá pôsobí proti pohybu podobne ako sily z časti 2.2.2, ktorá tiež nie je potenciálová, ale po matematickej stránke sa s ňou pracuje oveľa ťažšie. Čoskoro uvidíme prečo.

Suché trenie môže byť dvoch rôznych druhov v závislosti od toho, či sa povrchy vzhľadom na seba pohybujú alebo nie. V oboch prípadoch je predpokladom, že telesá sa na atomárnej úrovni dotýkajú iba na veľmi malej časti svojich plôch, tj. že nerovnosti ich povrchov majú oveľa väčšie rozmery ako veľkosti molekúl, z ktorých sa skladajú. Toto je nie splnené pre polymérne látky ktorých molekuly sú veľmi veľké a tiež už v spomenutom prípade tekutín na rozhraní, ktoré vypĺňajú nerovnosti povrchov.

Kinetické, alebo šmykové, trenie. Najskôr situácia, kedy sa povrchy telies vzhľadom na seba pohybujú. Tri zákony trenia v tejto situácii sú:

- Trecia sila je priamo úmerná normálovej sile.
- Trecia sila je nezávislá od veľkosti styčnej plochy. (oba Amontons, 1699)
- Koeficient úmernosti je nezávislý od rýchlosti. (Coulomb, 1785)

Matematicky to znamená, ze trecia sila je

$$T = f_K N \ , \tag{5.1}$$

spolu s nultým zákonom, že trecia sila pôsobí v smere proti rýchlosti a teda ako vektor je úmerná $-\vec{v}/|\vec{v}|$. Tiež pre ňu platí zákon akcie a reakcie, takže telesá pôsobia na seba navzájom rovnako veľkými, ale opačne orientovanými silami. V tejto rovnici je f_K koeficient kinetického trenia, ktorý je charakteristikou danej dvojice povrchov.

Mikroskopický mechanizmus kinetického trenia je veľmi komplikovaný a úplne dokonale mu stále nerozumieme. Základná idea je ale v tom, že pri vzájomnom pohybe sa štruktúra telies na molekulovej úrovni deformuje a táto deformácia sa potom vo forme vĺn šíry telesom, kde sa pomaly disipuje. Tak si odnáša energiu z posuvného pohybu a premieňa ju na teplo. Úplne najzaujímavejšie je, že takýto komplikovaný proces sa dá popísať tak jednoduchým matematickým zákonom. Je dôležité zdôrazniť, že kinetické trenie nevzniká ako zabrusovanie nerovností povrchov!

Statické, alebo statické, trenie. Statické trenie je komplikovanejšie, pretože zákon preň neprichádza v tvare rovnosti, ale v tvare nerovnosti. Konkrétne platí

$$T \leq f_S N \ , \tag{5.2}$$

kde f_S je opäť koeficient charakterizujúci danú dvojicu povrchov. Smer trenia je daný smerom výslednice všetkých ostatných síl, ktorými na seba dané telesá pôsobia a je proti tejto sile.

Toto je veľmi ojedinelá situácia, kedy sa princíp vo fyzike lepšie opisuje slovami ako matematicky. Majme dve telesá, ktoré by sa bez trenia vzhľadom na seba začali pohybovať. Statické trenie bráni tomuto pohybu a jeho veľkosť je presne taká, aby zostali povrchy vzhľadom na seba v pokoji. Jeho veľkosť teda nie je fixná, ale mení sa so silami, ktoré na telesá pôsobia vždy tak, aby ich vykompenzovalo. Až do situácie, kedy už nedokáže byť splnená nerovnosť (5.2), tj. keď sú ostatné sily príliš veľké, vtedy statické trenie "povolí", povrchy sa vzhľadom na seba rozpohybujú a prejdeme do režimu kinetického trenia.

Pre koeficienty trenia platí $f_S \gtrsim f_K \approx 0.1$, môže byť ale oveľa menej, napríklad pre teflón v niektorých situáciach ≈ 0.04, môže byť ale aj veľa, napríklad guma na asfalte $1-2$, niektoré špeciálne pretekárske zmesi až 4. Vtedy už ale narážame na platnosť predpokladu o malej ploche kontaktu a veľkosti molekúl, takže zákony trenia môžeme použiť iba s veľmi skríženými prstami.

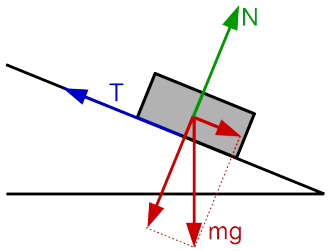
Statické trenie nekoná prácu a nemíňa sa pri ňom žiadna energia, pretože sila nepôsobí na žiadnej dráhe a v integrovaní $\vec{F} \cdot \vec{ds}$ je dráhový element nulový. Mechanizmus statického trenia je tiež komplikovaný a nie úplne pochopený, pointa je v medzimolekulovom priťahovaní okrajových vrstiev telies. Je zaujímavé, že dva principiálne iné mechanizmy pre kinetické a statické trenie dávajú na úrovni efektívneho popisu podobné zákony a dokonca numericky podobné koeficienty.

Ako už je zvykom v tomto texte, najskôr sa pozrieme na zopár jednoduchších situácií a potom, keď už budeme mať zvládnuté základy, sa pozrieme na komplikovanejšie aplikácie.

5.2 Niekoľko jednoduchých úloh

Príklad 5.1. Na naklonenej rovine so sklonom α máme teleso s hmotnosťou m. Čo sa bude diať s telesom, keď ho uvoľníme? Ako bude vyzerať zrýchlenie telesa ako funkcia uhla sklonu? □

Riešenie. Aké sily pôsobia na teleso? Tiažová sila mg, reakcia od naklonenej roviny N a trecia smerom hore naklonenou rovinou – pretože bez trenia by sa teleso chcelo rozbehnúť smerom nadol. Tiažovú silu si rozložíme na smer rovnobežne s rovinou a kolmo na rovinu a dostaneme pre výsledne sily, pričom kladné smery sme zvolili dole naklonenou rovinou a smerom nahor,



$$F_{\parallel} = mg\sin\alpha - T \tag{5.3}$$

$$F_{\perp} = N - mg\cos\alpha \tag{5.4}$$

Rovnako sme mohli rozkladať aj do x-ového a y-ového smeru, ale toto sa ukáže byť rozumnejšie. V smere kolmom na naklonenú rovinu teleso nikam neide, takže $F_\perp = 0$ a teda $N = mg\cos\alpha$, ostáva nám určiť treciu silu. Tá podla pravidiel bude taká veľká, aby vykompenzovala sily pôsobiace v smere naklonenej roviny, takže $F_\parallel = 0$. To ale za predpokladu, že to bude konzistentné s $T \leq f_S N = f_S mg\cos\alpha$. Dostávame teda, že

$$T = mg\sin\alpha \tag{5.5}$$

a toto platí ak

$$mg\sin\alpha \leq f_S mg\cos\alpha \;\Rightarrow\; \tan\alpha \leq f_S\ . \tag{5.6}$$

Pre uhly menšie ako táto hodnota sa teleso nepohne a zostane na naklonenej rovine stáť. Keď ale bude uhol väčší, teleso sa pohne. Potom bude trecia sila rovná

$$T = f_K N = f_K mg\cos\alpha \tag{5.7}$$

a zrýchlenie telesa bude

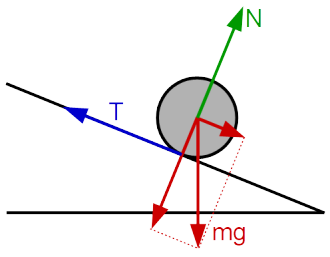
$$a = \frac{F_\parallel}{m} = \frac{mg\sin\alpha - f_K mg\cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - f_K\cos\alpha) = g\sin\alpha\left(1 - \frac{f_K}{\tan\alpha}\right) \tag{5.8}$$

a teda menšie ako by bolo bez trenia. Vidíme, že statické trenie vytvára situáciu, kedy sa teleso nedá do pohybu pri ľubovoľne malej sile. V závislosti $a = F/m$ vzniká akási medzera, kedy je zrýchlenie nulové aj pre nenulovú vonkajšiu silu. Takému čomusi sa hovorí "gap". Vidíme tiež, že kritický uhol pri ktorom sa teleso dá do pohybu je nezávislý od hmotnosti – nie je nič ľahšie ako overiť to.

Na tomto príklade je vidieť, kde je problém pri počítaní s trecou silou. Museli sme najskôr vyriešiť pohybové rovnice v špeciálnom prípade, potom overiť, že toto riešenie je konzistentné s predpokladom statického režimu a ak nebolo, celý výsledok zahodiť a zopakovať v režime kinetického trenia. ■

Príklad 5.2. Na naklonenú rovinu so sklonom α teraz položíme valec s hmotnosťou m a polomerom R. Čo sa bude diať s ním? □

Riešenie. Na rozdiel od telesa v predchádzajúcom prípade sa valec isto začne otáčať, pretože trecia sila bude mat vzhľadom na ťažisko nenulový moment TR. Opäť bude platiť $N = mg\cos\alpha$ a pre uhlové zrýchlenie valca bude bez ohľadu na režim trenia platiť



$$\varepsilon = \frac{TR}{I_0}\ . \tag{5.9}$$

Režim trenia sa ale prejaví v tom, či bude valec prešmykovať alebo nie. Pri tom si spomenieme na príklad 1.32. Ak sme v statickom režime a valec neprešmykuje, znamená to, že zrýchlenie jeho ťažiska v smere naklonenej roviny musí byť

$$a = \varepsilon R = \frac{TR^2}{I_0}\ . \tag{5.10}$$

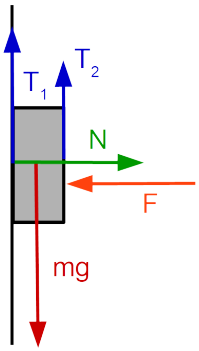
Výsledná sila v smere naklonenej roviny je $F_{\parallel} = mg\sin\alpha - T$ a teda

$$a = \frac{F_{\parallel}}{m} = \frac{mg\sin\alpha - T}{m} \;\Rightarrow\; T = mg\sin\alpha\,\frac{1}{1+\frac{mR^2}{I_0}}\ . \tag{5.11}$$

Tak sme sa dopočítali k potrebnej hodnote trenia. Ak by toto malo byť viac ako $f_S mg\cos\alpha$, valec začne prešmykovať a treba začať s výpočtom odznova. Vtedy už nebudú uhlové a posuvné zrýchlenia previazané, ale trecia sila bude daná presne. Zvyšok už isto zvládnete samostatne[64]. ■

Príklad 5.3. Akou silou musíme tlačiť o stenu knihu hmotnosti m, aby nespadla? Koeficient trenia medzi knihou a stenou je f, rovnako ako medzi rukou a knihou. □

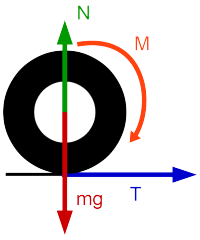
Riešenie. Vo zvislom smere pôsobí na knihu sila $T_1 + T_2 - mg$, vo vodorovnom sila $F - N$, kde N je reakcia od steny.



Bude platiť $F = N$ – ak toto neplatí, prebúrali sme stenu a máme úplne iné problémy – a teda kniha nebude padať dole ak $T_1(= fF) + T_2(= fN = fF) = 2fF$ bude väčšie ako mg a teda keď $F > mg/2f$. ■

Príklad 5.4. Auto celkovej hmotnosti m má kolesá s momentom zotrvačnosti I a polomerom R. Ak ich roztáča moment sily M, s akým zrýchlením sa bude auto pohybovať? Pre akú hodnotu M začnú kolesá prešmykovať? □

Riešenie. Pozrime sa najskôr na jednoduchšiu situáciu, kedy máme iba roztáčajúce sa koleso. Pri momente sily M sa bude sa roztáčať uhlovým zrýchlením



$$\varepsilon = \frac{M - TR}{I}\ . \tag{5.12}$$

[64] Prečo skutočné koleso v skutočnom svete zastaví, aj keď trecia sila, ktorá na neho pôsobí koná nulovú prácu? Dôvodom je valivý odpor, ktorý vzniká kvôli deformácii povrchov. Preto sa napríklad valivé ložiská robia s veľmi tvrdých materiálov – ideálne z keramických – ktorá sa deformujú len veľmi, veľmi málo. V našom popise by to znamenalo, že normálová sila nepôsobí kolmo nahor, ale má malú zložku v smere proti pohybu.

Na tom celom je najnáročnejšie rozmyslieť si smer pôsobenia trecej sily. Bez trenia by sa spodný bod kolesa rozbiehal smerom doľava a koleso ako celok by stálo na mieste. Body kolesa sa chcú hýbať doľava, trecia sila bude pôsobiť doprava. Aby koleso neprešmykovalo, musí sa rozbehnúť dopredu so zrýchlením

$$a = R\varepsilon = \frac{RM - TR^2}{I} = \frac{T}{m} \ , \tag{5.13}$$

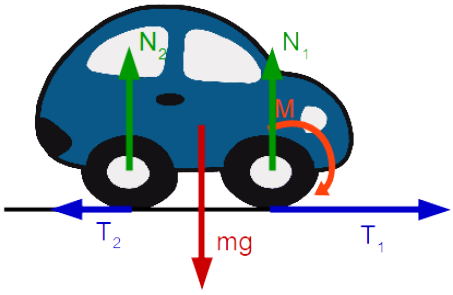
Kde sme na záver využili, že vo vodorovnom smere pôsobí iba trecia sila. Všimnite si, že sa nám objavil podobný faktor ako keď sme využívali Steinerovu vetu, ale úplne z iného dôvodu. Z tohto dostaneme

$$T = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}} \frac{M}{R} \ . \tag{5.14}$$

Ak bude moment príliš veľký, kolesá budú prešmykovať. To nastane ak

$$M > \frac{fg}{R} \left(I + mR^2 \right) \tag{5.15}$$

A teraz kompletné auto.



Prečo pôsobí trecia sila na zadnom kolese opačným smerom ako na prednom?

Sada rovníc je teraz

$$N_1 + N_2 = mg \ , \ I\varepsilon_2 = T_2 R \ , \ I\varepsilon_1 = M - T_1 R \ , \ ma = T_1 - T_2 \ , \ a = \varepsilon_1 R \ , \ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ , \tag{5.16}$$

s riešením

$$a = \frac{MR}{2I + mR^2} \ , \ T_1 = \frac{M(I + mR^2)}{R(2I + mR^2)} \ , \ T_2 = \frac{MI}{R(2I + mR^2)} \tag{5.17}$$

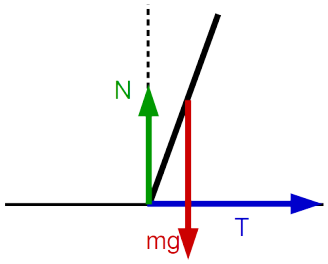
a pre neprešmykovanie musí platiť nerovnosť pre obe trecie sily, ale keďže $T_1 > T_2$ stačí overiť tú.

Môžete skúsiť napísať rovnakú sústavu rovníc pre bicykel, kde je hnané zadné koleso. A skúsiť napríklad vypočítať, za akých podmienok sa predné koleso bicykla začne dvíhať. ■

5.3 (O čosi) zložitejšie úlohy

Príklad 5.5. O aký uhol sa musím na bicykli nakloniť, aby som prechádzal rýchlosťou v zákrutu s polomerom R. Akou maximálnou rýchlosťou viem cez zákrutu prejsť, ak je koeficient trenia medzi kolesom a podložkou f. □

Riešenie. Prečo sa vlastne pri zatáčaní na bicykli musíme nakláňať? V neinerciálnej sústave (v ktorej sa vtedy my ako človek na bicykli nachádzame) je odpoveďou kompenzácia odstredivej sily. Ale vo fyzikálnejšej inerciálnej sústave je dôvodom to, že na zatáčanie potrebujeme nejak vytvoriť dostredivú silu pre náš kruhový pohyb. Tou nemôže byť tiažová, pretože tá pôsobí vždy smerom nadol a ostáva nám teda nejaká interakcia s podložkou. Ale nemôže to byť ani normálová sila, lebo tá pôsobí zas vždy nahor a musíme teda nejak donútiť trenie, aby na nás pôsobilo. No a naklonenie je na to najjednoduchší spôsob. V tom prípade vyzerajú sily takto



kde sme si vyhradili právo na trochu umeleckej voľnosti a nahradili bicykel aj s človekom paličkou. Dobre si rozmyslite, prečo trecia sila pôsobí smerom, ktorý je naznačený.

Najväčšia možná hodnota trecej sily je $T_{\max} = fN$. Normálová sila musí vykompenzovať tiažovú silu a teda $N = mg$. Ak máme daný polomer krivosti zákruty, pre maximálnu rýchlosť dostaneme

$$v_{\max} = \sqrt{fgR}\ . \tag{5.18}$$

Po uhle ale ani chýru. Ten dostaneme keď spočítame moment síl vzhľadom na ťažisko

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha - T\frac{l}{2}\cos\alpha = 0\ . \tag{5.19}$$

Chceme aby bol nulový, pretože pri nenulovom momente sa začne bicykel otáčať, čomu sa v značne komplikovanom cyklistickom žargóne hovorí pád. Tak dostávame

$$\tan\alpha = \frac{T}{mg} \tag{5.20}$$

a pre danú rýchlosť a polomer zákruty dostávame uhol naklonenia.

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{gR}\ . \tag{5.21}$$

Keď dosadíme za maximálnu rýchlosť (5.18) dostaneme pre maximálny uhol $\tan\alpha = f$. Hmmm, to už kdesi bolo. ■

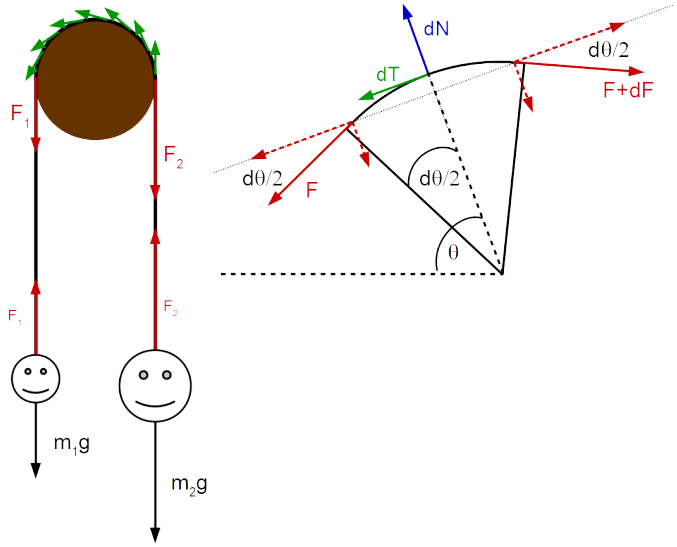
Príklad 5.6. Medzi lanom a konárom je koeficient trenia f. Cez konár prehodíme lano a na jeho konce povesíme telesá s rôznou hmotnosťou m_1 a m_2. Pre aké hmotnosti zostane sústava v pokoji? □

Riešenie. Bez trenia by sa lano po konári začalo šúchať smerom k ťažšiemu telesu. Bez straty na všeobecnosti zvoľme $m_2 > m_1$. Na kontakte povrchov lana a konára preto bude pôsobiť trecia sila, ktorá sa bude zo všetkých síl snažiť tomuto celému zabrániť. Oproti predchádzajúcim situáciám ale

bude problém v tom, že prítlaková – a teda ani normálová – sila nie je pozdĺž povrchu konštantná a čosi kdesi bude treba integrovať.

Najskôr si ale musíme rozmyslieť, ako to vlastne funguje v tom lane. Použijeme na to trpaslíkovú metódu, ktorá je inak všeobecne veľmi užitočná pri fyzikálnych úvahách. Lano si predstavme ako veľmi veľa veľmi malých trpaslíkov, ktorý sa držia za ruky. Na krajného zvonku pôsobíme silou F a ten potom ťahá toho vedľajšieho. Keďže trpaslíkovia majú infinitizemálnu hmotnosť, rozdiel medzi týmito silami môže byť najviac infinitizemálny. Potom bude mať trpaslík nenulové zrýchlenie a lano sa bude niekam hýbať. Ak by bola sila konečne veľká, na veľmi ľahkom trpaslíkovi by spôsobila nekonečné zrýchlenie a lano by prestalo byť lanom. To isté teraz platí pre každého jedného trpaslíka. Ak teda lano nikam nejde alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro, môžeme si ho predstaviť ako sériu trpaslíkov, ktorí každý na každého pôsobia silou F. Takto v lane vzniká ťahová sila[65]. Ak sa s lanom predsa len čosi deje, ťahová sila sa pozdĺž lana mení. Ale ak sa lano nenaťahuje, každý trpaslík má rovnaké zrýchlenie a teda (infinitizemálne) rozdiely medzi pravou a ľavou rukou každého trpaslíka sú rovnaké. No a na konári budeme mať situáciu, kedy rozdiely medzi pravou a ľavou rukou budú aj v prípade, keď lano stojí, ale budú kompenzované nejakou ďalšou vonkajšou silou, ktorá na trpaslíkov pôsobí – trením.

S touto prípravou sa poďme pozrieť, na jednotlivé elementy lana.



Zoberme ten, ktorý je pod uhlom θ a má uhlovú šírku $d\theta$. Sily, ktoré na tento kúsok pôsobia vyzerajú ako na obrázku. dF je zmena ťahovej sily v lane na tomto kúsku. Chceme, aby sa lano nehýbalo a teda výsledná sila bola nulová. V dotyčnicovom smere to – už zoberieme $dT = f dN$ ako hraničný prípade – dá podmienku

$$F \cos\frac{d\theta}{2} + f dN = (F + dF) \cos\frac{d\theta}{2} \ , \tag{5.22}$$

čo po rozvinutí do druhého rádu v $d\theta$ vedie na

$$f dN = dF \ . \tag{5.23}$$

[65] Ak máte chuť, môžete si rozmyslieť, že to je vlastne limita $C \to \infty$ lineárnej retiazky z časti 3.3.3 za predpokladu, že vonkajšie sily retiazku iba naťahujú a nestláčajú.

V kolmom smere máme

$$dN = (F + dF) \sin \frac{d\theta}{2} + F \sin \frac{d\theta}{2} \ , \tag{5.24a}$$

$$dN = F d\theta \tag{5.24b}$$

a dostávame

$$\frac{dF}{F} = f d\theta \ \Rightarrow \ \log \left(\frac{F_2}{F_1} \right) = f\beta \ , \tag{5.25}$$

kde β je uhol medzi koncami makroskopického kusu lana, na ktorom rozdiel síl počítame. Ak spravíme polovicu otáčky, potom $\beta = \pi$ a pomer hmotností môže byť $F_2/F_1 = (e^{\pi})^f \approx (23)^f \approx 2.5$ pre $f = 0.3$.

Dostali sme exponenciálny nárast trecej sily s uhlom namotania lana. Toto je napríklad za fungovaním uzlov a okrem iného je dôvodom, prečo môže pri lezení istiť ľahší človek ťažšieho. ■

Šmykové trenie v dvoch rozmeroch. Medzi šmykovým a statickým trením je dôležitý rozdiel, ktorý v jednom rozmere nehral veľkú úlohu, ale v dvoch už bude absolútne kľúčový. Statické trenie dokáže pôsobiť ľubovoľným smerom, šmykové len a iba proti smeru, ktorým sa povrchy vzhľadom na seba pohybujú. Ak máme teleso, ktoré stojí a v dvoch rozmeroch na neho pôsobíme podkritickou silou z jedného smeru, ak zatlačíme aj v kolmom smere pre dostatočne malú silu sa teleso nezačne hýbať. Ak je ale teleso v šmykovom režime a zatlačíme naň zboku, trecia sila v tomto smere nebude žiadna a teleso sa rozpohybuje do strany pod pôsobením ľubovoľne veľkej sily. Spomínaný gap vo vzťahu medzi silou a zrýchlením zmizol.

Táto nevinne vyzerajúca skutočnosť má ďalekosiahle dôsledky. Ako najjednoduchší príklad majme na naklonenej rovine s takmer kritickým sklonom teleso. To sa zatiaľ nikam nehýbe. Ak do neho ale štuchneme v smere rovnobežnom s naklonenou rovinou, rozpohybuje sa smerom nadol. Pretože prechodom do šmykového režimu sa vytratila schopnosť trenia pôsobiť v smere kolmo na pohyb, čo je dole naklonenou rovinou. Takéto čosi sa stane vždy, keď čosi rozpohybujeme v jednom smere a snažíme sa pohnúť v kolmom. Bude to oveľa jednoduchšie. Dá sa to vyskúšať na prsteňoch, sedlovke[66] zaseknutej v ráme bicykla, funguje to pri otváraní vínových fliaš, pomáha sa tak mamičkám pri pôrode. A preto je nebezpečný šmyk.

Keď v aute prechádzame zákrutou, trenie vytvára dostredivú silu pre náš pohyb. Prípadne ak ste z nejakého dôvodu ešte stále "team neinerciálne vzťažné sústavy", vyrovnáva odstredivú silu. Tu je dôležité to, že kolesá auta neprešmykujú a trecia sila medzi pneumatikami a cestou dokáže pôsobiť ktorýmkoľvek smerom. Keď sa ale kolesá začnú po ceste šmýkať, trecia sila vie pôsobiť len v smere pohybu auta! Už nebude vedieť zatáčať auto po zakrivenej dráhe a to sa bude pohybovať tak, ako keby bolo na ľade a bez trenia. A preto sa do áut montuje systém ABS, ktorý tomu zabraňuje – nech dupnete na brzdu akokoľvek silno, ak by sa kolesá chceli začať prešmykovať, senzory to odhalia a brzdnú silu uberú.

[66] Tak sa hovorí tej rúre, na ktorej je na bicykli namontované sedadlo. Ste si mysleli, že si z náročným cyklistickým žargónom robím srandu?

Ešte pár poznámok o trení. Prvá je tá, že trenie je dôležité. Vďaka nemu hrajú husle – špeciálne vďaka rozdielu medzi kinetickým a statickým koeficientom trenia, vďaka nim držia na mieste skrutky, klince, zipsy a podobne. A mnoho ďalšieho, keď budete mať oči otvorené, určite nájdete dôležité dôsledky trenia na každom kroku. Druhá je, že trenie je zdrojom kopy zložitých problémov, až na úrovni otvorených otázok vo fyzike a matematike. Za jednu spomeňme zrnité, alebo granulárne, materiály. To sú látky, na ktoré sa nedá úplne pozerať ako na jednotlivé telesá, ale ani ako na spojité prostredie. Napríklad piesok alebo lentilky. Presné správanie takýchto látok je na mikroskopickej úrovni do značnej miery diktované trením medzi jednotlivými zrnami, ale na bežných škálach sa na ne dá pozerať ako na prostredie podobné vode alebo vzduchu, ktoré vie tiecť. Ale tečie veľmi, veľmi zvláštne, niekedy dokonca vôbec. No a že by sme úplne dokonale rozumeli tomu, ako dobre správanie takéhoto niečoho popísať, sa určite povedať nedá.

Ďalšie úlohy

Príklad 5.7 (Bowling.)**.** Ako bude vyzerať pohyb gule, ktorá sa nazačiatku svojho pohybu pohybuje iba posuvným pohybom s vodorovnou rýchlosťou v? Aká bude posuvná a uhlová rýchlosť gule, keď prestane prešmykovať? □

Riešenie. Na guľu pôsobí trecia sila T v mieste spojenia s podlahou, guľa teda bude spomaľovať so zrýchlením

$$a = \frac{T}{m} \ . \tag{5.26}$$

Trecia sila bude guľu roztáčať s uhlovým zrýchlením

$$\varepsilon = \frac{RT}{I} = \frac{RT}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5T}{2mR} \tag{5.27}$$

Rýchlosť bodu vo vzdialenosti r od stredu gule v čase t bude potom

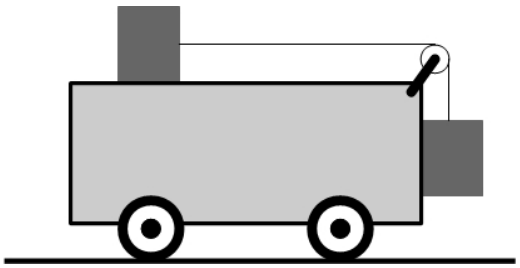
$$v_r = v - at + R\varepsilon t \cos\phi \ , \tag{5.28}$$

pričom uhol ϕ meriame od zvislice v smere počiatočného pohybu. Guľa prestane prešmykovať, keď zastane jej spodný bod. To nastane v čase τ

$$0 = v - a\tau - R\varepsilon\tau \ \Rightarrow \ \tau = \frac{2mv}{7T} \ . \tag{5.29}$$

Z toho už posuvnú a uhlovú rýchlosť gule zistíme hravo. ■

Príklad 5.8. Na obrázku je sústava dvoch telies rovnakej hmotnosti na vozíku. Koeficient trenia medzi oboma telesami a všetkými stenami vozíka je f a môžete uvažovať rovnaký koeficient statického aj dynamického trenia.



- Ak vozík stojí, s akým zrýchlením sa pohybujú telesá?

  Návod. Na horné teleso pôsobí ťahová sila lana, trecia sila, tiažová sila a reakcia vozíka. Na spodné teleso pôsobí ťahová sila a tiažová sila. Pre obe telesá si treba napísať pohybovú rovnicu a uvedomiť si, že kvôli nenatiahnuteľnosti lana musí byť ťahová sila pôsobiaca na obe telesá rovnaká a obe telesá musia mať rovnaké zrýchlenie. Potom už len rovnice vyriešiť. ■

- Akým zrýchlením sa musí vozík pohybovať, aby vzhľadom na neho boli obe telesá v pokoji?

□

Príklad 5.9. Zo zvislej steny visí sa špagáte dĺžky $L = R$ guľa s polomerom R a hmotnosťou M.

1. V prípade, že medzi stenou a guľou nie je žiadne trenie, aký uhol bude v rovnovážnej polohe zvierať špagát so stenou? Aká bude ťahová sila v lane?

2. V prípade, že medzi stenou a guľou je trenie, charakterizované koeficientom statického trenia f_S, aké uhly môže špagát so stenou zvierať, ak je guľa v rovnováhe?

□

Príklad 5.10. Fyzika je predsa len experimentálne veda, takže budeme mať ešte jeden experimentálny príklad. Vašou úlohou bude

- overiť, že trecia sila nezávisí od veľkosti styčnej plochy medzi povrchmi,
- overiť, že trecia sila závisí priamo úmerne od normálovej sily a
- odmerať koeficient trenia medzi dvomi rôznymi dvojicami povrchov.

Presnú metódu experimentu nechám na vás, ale ako návod môže slúžiť príklad o telese na naklonenej rovine z prednášky. □

Príklad 5.11. Puk tvaru valca s polomerom R a hmotnosťou M roztočíme na uhlovú rýchlosť ω, položíme na ľad a pustíme dopredu rýchlosťou v. Ak je medzi ľadom a pukom kinetické trenie s koeficientom f_K, za aký čas sa puk prestane otáčať a za aký čas sa prestane pohybovať? □

Príklad 5.12. Majme kvádrik o štvorcovou postavou s hranou a a výškou b, položený na vodorovnej podložke. Medzi materiálom kvádrika a podložky je trenie s koeficientom f. Vo výške $x < b$ pôsobíme na kvádrik vodorovnou silou F. S kvádrikom sa môžu začať diať tri rôzne veci: nič, posúvanie, prevaľovanie okolo hrany. Za akých podmienok dôjde ku každej z týchto možností? Čo ak kvádrik netlačíme, ale ťaháme? □

6 Špeciálna teória relativity

> Special relativity is not hard to understand. It is hard to believe.
>
> Charles F. Stevens – Six Core Theories of Modern Physics

6.1 Úvod - história a základy

Až do tohto momentu sme sa zaoberali dôsledkami Newtonovych pohybových zákonov. Mali sme nejaký konkrétny fyzikálny systém, na ktorý pôsobila nejaká konkrétna sila F. A našim cieľom bolo popísať, ako sa tento systém bude z nejakej konkrétnej počiatočnej konfigurácie vyvíjať v čase.

A videli sme, že veci fungujú veľmi dobre. Dokázali sme vysvetliť pestrú paletu efektov a popísať širokú škálu problémov. Podľa týchto zákonov sa stavajú mosty, veci (a ľudia) letia do vesmíru a voda sa (ne)otáča v záchode. Čas však ukázal, že všetko nie je až také ružové a že mechanika tak ako sme sa ju učili nefunguje. V tejto časti si vysvetlime, ze nefunguje keď sa veci budú hýbať príliš rýchlo (a vysvetlíme si aj, čo to presne znamená).

Čo sa tým myslí ale nie je to, že existuje nejaká hraničná rýchlosť, do ktorej platí klasická mechanika a po ktorej platí špeciálna relativita. Klasická mechanika neplatí vôbec, nikdy ... len pre malé rýchlosti je rozdiel medzi ňou a skutočnosťou nemerateľne malý. Ale keby sme boli nekonečne presní, dokážeme nájsť rozdiel medzi klasickou mechanikou a skutočnosťou aj v autobuse.

Ako uvidíme, toto bude mať ďalekosiahle dôsledky. Ukáže sa, že budeme musieť dať zbohom našej intuícii a že skutočný svet je veľmi iný. Tak ako hovorí motto tejto časti. Nebude ťažké pochopiť a uchopiť tvrdenia a dôsledky špeciálnej relativity. Bude ťažké prijať ich a uznať, že svet je proste divný a my sme si to jednoducho nevšimli.

6.1.1 Stručná história (rýchlosti) svetla

Príbeh špeciálnej relativity je príbehom svetla, aj keď neskôr uvidíme, že svetlo sa tu objavuje viac menej náhodou. Jeho "svetlovosť" nie je kľúčovou vlastnosťou a iná vlastnosť svetla je rozhodujúca. Začneme však na začiatku, v sedemnástom storočí. Ľudia uvažovali o tom, ako rýchlo sa šíri svetlo už predtým, avšak experimentálne možnosti povolili meranie rýchlosti svetla až vtedy.

Prvé merania rýchlosti svetla urobil dán Ole Christensen Rømer v roku 1676. Využil na to zákryty Jupiterovho mesiaca Io. Tie trvajú rôzne dlho podľa toho, či sa Zem počas zákrytu pohybuje smerom k Jupiteru alebo preč. Za čas, kým je mesiac za planétou sa vtedy Zem buď priblíži alebo vzdiali a teda zákryt – to, ako dlho vidí pozorovateľ na Zemi mesiac ukrytý za Jupiterom – trvá o čosi kratšie alebo o čosi dlhšie. Z rozdielu týchto časov dopočítal Christiaan Huygens rýchlosť svetla ako $220\,000\,km/s$. Rokmi sa potom merania spresňovali, využívali sa čim ďalej tým sofistikovanejšie metódy – napríklad s rotujúcimi zrkadlami – a v roku 1862 odmeral túto rýchlosť Foucault ako $298\,000\,km/s$.

Na úplne inom fronte v rokoch 1860-1865 James Clerk Maxwell vypracoval teóriu elektromagnetického poľa. Z jeho rovníc vyplývalo, ze elektrické a magnetické pole sa navzájom ovplyvňujú a jedno z

možných riešení rovníc je postupná elektromagnetická vlna, pri ktorej zmena elektrického pola vytvorí magnetické pole, ktoré vytvorí elektrické pole a takto sa vzruch šíri priestorom[67]. Maxwell vypočítal rýchlosť šírenia týchto vĺn a zostal veľmi prekvapený, keď mu vyšlo prakticky rovnaké číslo, ako bola hodnota známa pre rýchlosť svetla. Neostávalo mu nič iné, ako vyhlásiť svetlo za elektromagnetickú vlnu.

Tu ale prichádza dôležitý zvrat! V prvom rade maxwellove rovnice elektromagnetizmu nemajú potrebnú symetriu. V stojacej sústave a v sústave, ktorá sa vzhľadom na ňu pohybuje rovnomerne priamočiaro, vyzerajú rôzne. To je v rozpore so symetriami Newtonovych rovníc mechaniky a znamená to, že by sa malo dať na základe (ne)platnosti maxwellovych rovníc zistiť, či sa daná sústava pohybuje alebo je v pokoji. Mechanikou sa nedá absolútny pokoj definovať, iba relatívny, ale zdalo sa, že maxwellove rovnice by mohli definovať sústavu, ktorá stojí v absolútnom zmysle. To by bola tá, kde by maxwellove rovnice platili bez kompromisov. Inak povedané mechanické pokusy nevedia povedať, či sa váš vagón hýbe alebo stojí bez pozerania von oknom, optické pokusy by to ale mali vedieť.

S tým ide druhý aspekt. Ak je svetlo vlnenie, "niečo" by sa malo pri jeho šírení vlniť. Koncom devätnásteho storočia si ľudia za každým vlnením predstavovali nejaké médium. Prišlo sa teda veľmi prirodzene s teóriou, že priestor je spojito vyplnený látkou zvanou *éter*, ktorá síce s ničím neinteraguje, ale je médiom pre elektromagnetické polia a jej vlnenie sa prejavuje ako šírenie svetla (niečo ako vzduch a zvuk). To ale zásadne menilo fyziku, pretože ako bolo povedané optickými experimentami by sa malo dať zistiť, či sa daná sústava vzhľadom na éter pohybuje, alebo nie. Sústava, kde je éter v pokoji by bola tou stojacou sústavou, v ktorej platia maxwellove rovnice a vzhľadom na ktorú sa dá definovať pohyb aj absolútne.

Ľudia sa samozrejme rýchlo pustili do hľadania rýchlosti Zeme vzhľadom na takúto sústavu. Michelson a Morley navrhli a v roku 1887 aj spravili experiment, v ktorom v rôznych časoch roka merali rýchlosť šírenia svetla v dvoch na seba kolmých smeroch. Na veľké prekvapenie všetkých sa zistilo, že sa nič nemení (toto je asi najslávnejší experiment s "negatívnym" výsledkom) a rýchlosť svetla je rovnaká bez ohľadu na to, v ktorom ročnom období a kam sa pohybujeme.

S riešením tohto problému prišiel Hendrik Lorentz – za predpokladu, že pohyb vecí v étery spôsobí ich kontrakciu. A našiel transformácie medzi pohybujúcou sa sústavou a éterovou sútavou, ktorá by tento problém vyriešila. Okrem toho ukázal, ze maxwellove rovnice sú invariantné voči týmto transformáciám a teda majú rovnaký tvar v stojacej sústave, aj v sústave do ktorej sa dostaneme pomocou nich. Vyzeralo to teda tak, že celá príroda je spravená spôsobom, že veci medzi sebou konšpirujú a skutočný pohybový stav sústavy vzhľadom na éterovú sústavu je sofistikovanýmn spôsob ukrytý a nemožno ho nijak odhaliť.

Na to prišiel v roku 1905 najslávnejší patentový úradník všetkých čias, zobral všetky tieto kúsky dohromady a prehlásil jednu s najdôležitejších myšlienok vo fyzike vôbec – nič ako éter neexistuje. Namiesto toho Lorentzove transformácie sú tie skutočné transformácie medzi pohybujúcimi sa sústavami. V rozpore Newtona a Maxwella dal za pravdu Maxwellovi. Ukázal, že toto sa dá formulovať aj inak – rýchlosť svetla tak, ako ju nameria nezrýchľujúci pozorovateľ je rovnaká bez ohľadu na jeho rýchlosť. A z toho vznikne špeciálna relativita tak, ako o nej budeme rozprávať. Je dobré mať na pamäť, že

[67] Poriadnejšie sa na to pozrieme v ďalšom semestri.

špeciálna relativita je vlastne nadstavba nad Newtonovskou mechanikou a v nejakom zmysle by sa jej mohlo hovoriť Einsteinovská mechanika.

Tento príbeh je poučný aj z iného hľadiska. Bola stará, dobre fungujúca teória na popis sveta. Postupne sa v nej začali objavovať problémy a medzery, ktoré sa stará škola (Lorentz, Poincaré, atď) snažila zaplátať a pri tom prišli na veľmi veľa veľmi užitočných myšlienok a výsledkov. Ale v svojom rozmýšľaní sa nedokázali oslobodiť od zakorenených predpokladov starej teórie. Až kým neprišiel mladý človek, ktorý sa na veci dokázal pozrieť úplne inak a z existujúcich kúskov poskladal novú teóriu. Je zaujímavé, že čosi podobné sa v opačnom garde stalo neskôr v živote aj samotnému Einsteinovi.

Moderná hodnota rýchlosti svetla je

$$c = 299\,792\,458\,m/s \approx 3 \times 10^8\,m/s\ . \tag{6.1}$$

Toto je presná hodnota. Pretože tak sú definované jednotky meter a sekunda. Toto číslo je veľmi, ale veľmi veľké v porovnaní s akýmikoľvek rýchlosťami, s ktorými prichádzame bežne do kontaktu, a preto sú efekty špeciálnej relativity veľmi malé. Oproti klasickej mechanike sú relativistické korekcie štandardne rádu v^2/c^2. Ale k tomu všetkému sa postupne dostaneme.

6.1.2 Základné postuláty špeciálnej teórie relativity

V modernej dobe je špeciálna teória relativity definovaná týmito dvomi základnými postulátmi

1. Nijakým fyzikálnym experimentom sa nedá prísť na to, či sa sústava nachádza v pokoji alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro.

2. Rýchlosť svetla nameraná ľubovoľným inerciálnym pozorovateľom je rovnaká bez ohľadu na rýchlosť pozorovateľa a rýchlosť zdroja.

Prvému postulátu sa hovorí Poincareho princíp relativity. Kľúčové tu je slovo "nijakým fyzikálnym ...", ktoré ho odlišuje od Galileiho princípu relativity "nijakým mechanickým ...". V istom zmysle z neho vyplýva druhy postulát, pretože ak meriam rýchlosť svetla v jednej a v druhej sústave a vyšla by mi iná tak viem zistiť, ktorá sa hýbe a ktorá nie. Ako uvidíme, z týchto postulátov sa dá odvodiť, že skutočné transformácie medzi pohybujúcimi sa sústavami sú Lorentzove a nie Galileiho a že mechanika musí vyzerať inak ako hovorí Newton. Napríklad skladanie rýchlostí bude robiť niečo iné ako (4.4). Napriek tomu je dobré druhý postulát mať a zdôrazniť, že svetlo nemá žiadne médium, v ktorom by sa pohybovalo.

Na druhý postulát sa dá pozerať ešte trochu inou logikou, respektíve v inej verzii. Hovorí, že fyzikálne zákony prichádzajú s istou konečnou fundamentálnou rýchlosťou[68], ktorá je univerzálnou vlastnosťou pravidiel prírody a že je v každej sústave rovnaká. A že okrem iných vecí sa touto rýchlosťou pohybuje aj svetlo.

Skôr ako sa pustíme do matematického opisu špeciálnej relativity, postulátov a ich dôsledkov, pozrieme sa na celú túto situáciu jazykom, ktorému rozumejú aj základoškoláci. Obrázky!

[68] Ako uvidíme, v prípade nekonečnej hodnoty by sme dostali klasickú mechaniku v plnej krásne.

6.2 Obrázková špeciálna relativita

V tejto časti budeme hovoriť o špeciálnej teórií relativity v jazyku, ktorý je prístupný komukoľvek, kto vie kresliť čiary, robiť rovnobežky a pozná podobnosť trojuholníkov. Bez toho aby sme napísali jedinú rovnicu budeme schopní odvodiť veľkú časť základov a dôsledkov tejto teórie. Náročnosť nie je v technickom prevedení, ale v uchopení základných myšlienok. A v uverení im.

6.2.1 Časopriestorové diagramy

Nadpis možno znie hrozivo, ale žiadny strach, všetko sa rýchlo a jednoducho vyjasní. Hrozivo môže vyzerať aj to, že tato časť je v dvoch stĺpcoch. To len aby sa pri veľa obrázkoch šetrilo miesto.

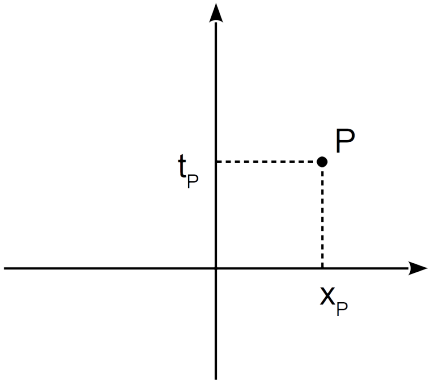
Všetko budeme robiť v jednom priestorovom rozmere, ktorý budeme označovať x a k tomu budeme mať jeden čas t. Všetko zaujímavé bude vidieť aj v jednorozmernom prípade a plnohodnotný $3+1$ rozmerný svet by sa na dvojrozmerný papier kreslil ťažko.

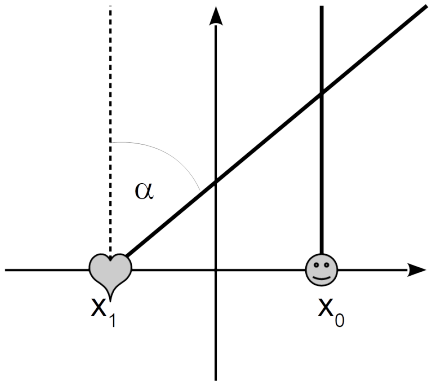
Nakreslíme si obrázok, kde na vodorovnú os budeme nanášať súradnicu x a na zvislú čas t. Toto je naopak, ako sme doteraz boli zvyknutí. Čo je ale dôležitejšie, logika týchto obrázkov bude iná. Doteraz bolo treba čítať podobné grafy tak, že čas plynul a pozerali sme sa na nejakú závislosť súradnice $x(t)$. Obrázkom akoby prechádzala časová priamka a pozerali sme sa, kde v danom čase bola poloha telesa. Tu to bude inak a na celý diagram sa budeme pozerať ako na plnohodnotný dvojrozmerný priestor.

Takto teda vyzerá jednoduchý časopriestorový diagram. Na vodorovnej osi je súradnica, na zvislej je čas. Bod P reprezentuje súradnice (x,t), teda že sa v čase t čosi odohralo v mieste x.

Majme v mieste x_0 nejaké teleso, ktoré tam stojí. Ako bude vyzerať toto teleso a to čo sa s ním deje v našom diagrame? No udalosťou bude to, že v rôznych časoch t bude toto teleso stále v mieste x_0, takže to čo po telese v diagrame ostane je zvislá priamka. O tejto čiare, ktorú opíše teleso v časopriestorovom diagrame, budeme hovoriť ako o *svetočiare*.

Majme teraz iného pozorovateľa, ktorý sa hýbe nejakou rýchlosťou v, jeho poloha sa bude meniť a svetočiarou bude priamka, ktorá nebude zvislá. Nie je ťažké rozmyslieť si, že to bude naklonená priamka a že z uhla medzi zvislou (=časovou) osou a touto čiarou sa bude dať zistiť rýchlosť telesa. Čim väčšia rýchlosť, tým väčší uhol a zistíme, že[69] $v = \tan\alpha$. Na obrázku potom svetočiary stojaceho a pohybujúceho pozorovateľa vyzerajú takto



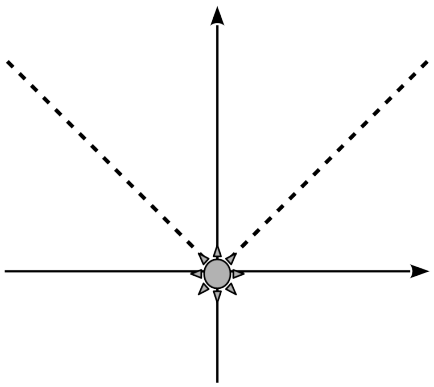


[69] Táto rovnica vyzerá veľmi divne po rozmerovej stránke, nie?

Treba si ešte rozmyslieť, čo znamená čiara, ktorá je v nejakom čase t_0 rovnobežná s priestorovou osou. Je to svetočiara telesa, ktoré sa hýbe nekonečnou rýchlosťou, tj. telesa ktorého „udalosti“ vyzametajú v danom čase celý priestor. Táto čiara preto reprezentuje celý náš "vesmír" v danom čase.

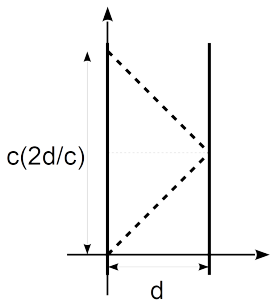
Predtým, ako sa pustíme ďalej, spravíme štandardnú vec a to zmeníme zvislú os z t na ct. To "len" preškálujeme čas, ktorý teraz meriame vo "svetelných metroch" a zmení sa tým to, že $\tan\alpha = v/c$ a teda rýchlosti sa merajú v jednotkách rýchlosti svetla c. Ale kvalitatívne bude platiť všetko, čo sme doteraz povedali.

Posledná základná ingrediencia, ktorú si potrebujeme vyjasniť, je ako vyzerá v diagrame pohyb svetla. To sa hýbe rýchlosťou c, takže jeho svetočiary budú priamky so sklonom 1. No a keďže svetelné svetočiary budú mať veľmi veľký význam, budeme ich značiť inak, prerušovanou čiarou.



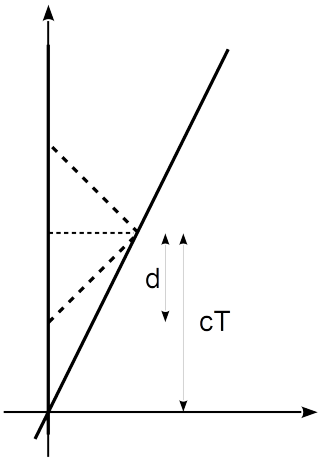
6.2.2 Meranie vzdialenosti a rýchlosti, zmena vzťažnej sústavy a konštantnosť c

Majme teraz dvoch pozorovateľov, ktorý sú od seba vzdialený d a v tejto vzťažnej sústave stoja. V ďalšom budeme pojmy sústava a časopriestorový diagram celkom voľne zamieňať, snáď sa z toho bude dat vysomáriť. Ako zistí prvý pozorovateľ, ako ďaleko od neho je ten druhý? Napríklad to môže spraviť takto: pošle druhému fotón, ten mu ho pošle naspať, prvý si zmeria čas, za ktorý sa vrátil fotón, no a v polovici tohto času bol fotón pri druhom pozorovateľovi.



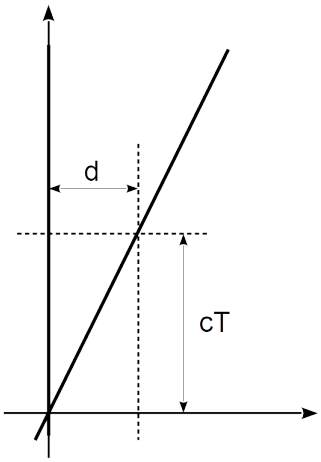
a tak ako to máme nakreslené je toto vzdialenosť, lebo $d = cT = (ct)/2$.

Majme teraz dvoch pozorovateľov, ktorí sú v čase $ct = 0$ na tom istom mieste, a tam zvoľme počiatok. Jeden nech sa pohybuje rýchlosťou v. Ako prvý pozorovateľ odmeria rýchlosť druhého? Podobne, ako predtým. V nejakom čase mu pošle fotón a zahrajú sa tu istú hru. Ako sme povedali, rýchlosť je spojená s tangensom uhla a z obrázka by mohlo byť jasné, že $v/c = d/cT$.



Posielanie fotónov je teda užitočné, nedala by sa ale tá istá vec dosiahnuť aj jednoduchšie? A priamo v diagrame? Naviac ak by sme chceli určiť čosi ako rýchlosť svetla, s týmto už budeme krátky. Na to funguje táto finta trochu inak. V nejakom čase ct si pozorovateľ nájde čiaru, zodpovedajúcu vesmíru v jeho vzťažnej sústave, pozrie sa kde táto

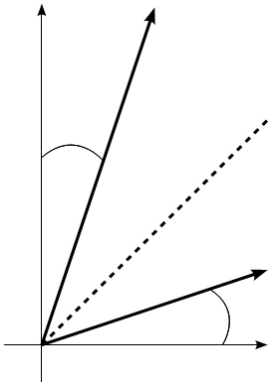
čiara pretla svetočiaru toho, čo sa snaží zmerať a pozrie sa, v akej vzdialenosti od neho táto vec bola v tom čase. To spraví tak, že urobí rovnobežku so svojou (!!!) svetočiarou, ktorá prechádza cez toto miesto. Rýchlosť potom nájde ako pomer tohto času a tejto vzdialenosti. Z obrázka sme asi múdrejší.



V tejto metóde boli kľúčové slová rovnobežnosť a časová a priestorová os.

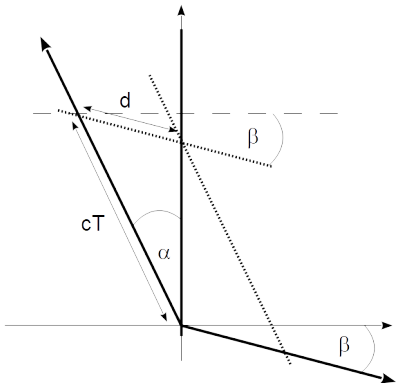
Dostávame sa teraz ku hlavnej otázke celej tejto časti. Ak máme dvoch pozorovateľov, ako vyzerajú takéto machinácie – časove a priestorové osi, robenie rovnobežiek a meranie rýchlosti – jedného pozorovateľa v diagrame toho druhého? Špeciálne zoberme takúto situáciu. Jeden pozorovateľ stojí, druhý sa hýbe rýchlosťou v. Druhý pozorovateľ teraz meria rýchlosť svetla – spraví rovnobežku so svojou priestorovou osou, tam kde pretne svetočiaru svetelného signálu spraví rovnobežku s časovou osou a porovná dve vzdialenosti, ktoré takto dostal na svojich osiach. Ako tento proces vyzerá v diagrame prvého pozorovateľa? Kde je v diagrame prvého časová os druhého je jasné, to je jeho svetočiara. Ale kde je jeho priestorová os?

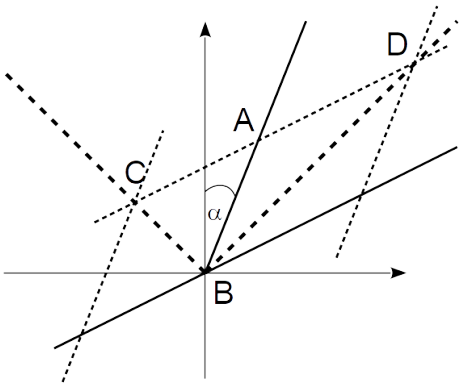
To nám určuje druhý postulát. Tá musí byť tak, aby výsledok pre rýchlosť svetla z tohto postupu druhého pozorovateľa bol rovnaký! Trochu si to treba rozmyslieť, ale nemuselo by byť až také ťažké dopracovať sa k tomuto výsledku. Na to, aby druhý pozorovateľ nameral rovnakú rýchlosť svetla ako prvý pozorovateľ, musí sa priestorová os druhého v diagrame prvého nakloniť o rovnaký uhol, ako časová. Takto:



Toto je najdôležitejšia úvaha celej tejto časti a z nej bude všetko vyplývať. Je dobré pamätať si, že toto je presne miesto, kde sme do celého procesu vložili konštantnosť rýchlosti svetla. A môžete si rozmyslieť, ako by to celé vyzeralo v prípade, že by platila klasická mechanika.

Je zaujímavé, že k tomu istému výsledku sme sa mohli dostať aj bez svetla, čisto z prvého postulátu. To je konzistentné s tým, že druhý postulát je sám o sebe dôsledkom prvého a pre nás je viac menej iba zdôraznením noviniek, s ktorými sa stretávame. Postup je takýto. Majme stojaceho a pohybujúceho sa pozorovateľa. Už sme videli, ako stojaci odmeria rýchlosť pohybujúceho. Na celú túto situáciu sa ale môžeme pozrieť pohľadom druhého pozorovateľa. V nej sa prvý pozorovateľ hýbe rýchlosťou $-v$ a jeho svetočiara je naklonená o rovnaký uhol opačným smerom. Ako vyzerá meranie rýchlosti prvým pozorovateľom v sústave druhého? No opäť rovnobežka s časovou, rovnobežka s priestorovou, priesečníky, pomery. Opäť ale ten istý problém, kadiaľ ide v sústave druhého pozorovateľa priestorová os prvého? Posunie sa o nejaký uhol β.





Tento uhol ale musí byť taký, že výsledkom celého toho procesu je opäť rýchlosť v. Ak by to tak nebolo, našli sme jednoduchý fyzikálny experiment, ktorý vie rozlíšiť medzi státím a pokojom, resp. ktorého výsledok je asymetrický medzi pozorovateľmi. To sa ale kvôli prvému postulátu nemôže dať. Ak má byť teda na obrázku pomer d/cT rovný $\tan\alpha$, z podobnosti trojuholníkov dostávame $\beta = \alpha$. Z toho potom vyplýva aj to, že v každej sústave je rýchlosť svetla rovnaká!

Jedným alebo druhým spôsobom sme zistili, že v našom časopriestorovom diagrame sa svetočiara pozorovateľa, ktorý sa vzhľadom na nás pohybuje – a.k.a. jeho časová os – nakloní o uhol spojený s rýchlosťou a čiara vesmíru pozorovateľa – a.k.a. jeho priestorová os – sa nakloní opačným smerom o ten istý uhol. Všimnite si ako svetočiara svetelného lúča zostava presne medzi týmito dvoma priamkami v ľubovoľnej sústave.

Príklad 6.1. Majme opäť dvoch pozorovateľov, jeden stojaci druhý sa hýbe rýchlosťou v. Obaja pozorujú dva lúče svetla idúce opačným smerom. Prvý nameria pre oba celkom triviálne tú istú rýchlosť. Že druhý nameria rýchlosť c pre lúč idúci doprava sme ukázali vyššie. Akú rýchlosť nameria pohybujúci sa pozorovateľ pre lúč idúci doľava? □

Riešenie. Z nasledujúceho obrázku by mohlo byť jasné, že pre uhly platí $ACB = CBA = 45 + \alpha$ a $ADB = ABD = 45 - \alpha$ a že aj v tejto sústave prejdú oba lúče za rovnaký čas BA rovnakú vzdialenosť. ■

Zrekapitulujme si, k čomu sme v tejto časti dospeli.

- V časopriestorových diagramoch si každý pozorovateľ nesie dve dôležité čiary – svoju svetočiaru a čiaru jeho vesmíru, ktoré sú časovou a priestorovou osou jeho diagramu.
- Tieto dve čiary majú vždy svetočiaru svetelného lúča presne medzi sebou.
- Ako vyzerajú čiary jedného pozorovateľa v diagrame druhého zistíme na základe tohto a na základe toho, že svetočiara pohybujúceho sa telesa je v sústave stojaceho naklonená.
- Čas, kedy sa udiala udalosť meriame tak, že spravíme cez túto udalosť rovnobežku s vesmírnou čiarou a pozrieme sa, aký dlhý úsek to vyťalo na svetočiare.
- Polohu udalosti meriame tak, ze spravíme rovnobežku so svetočiarou a pozrieme sa, aký veľký úsek to vyťalo na vesmírnej čiare.
- Rýchlosti meriame pomerom vzdialenosti a času.

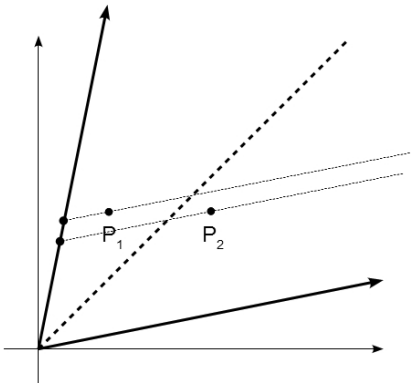
Mohla vám napadnúť otázka, čo sa deje ak sa čosi pohybuje rýchlejšie ako svetlo. Zatiaľ bude platiť všetko, čo sme napísali a čoskoro uvidíme aké to bude mať dôsledky. Respektíve aké by to malo dôsledky.

6.2.3 Relatívnosť súčasnosti a kauzalita

Toto je najdôležitejšia časť celej relativity. Dá sa povedať, že všetky paradoxy, ktoré sa v relativite objavujú sú dôsledkom toho, že súčasnosť dvoch udalostí je relatívny pojem – závisí od pozorovateľa a nedá sa zadefinovať univerzálne pre všetky sústavy a udalosti rovnako.

Príklad 6.2. Majme dve udalosti, ktoré sa v našej sústave udiali v tom istom čase – tj. ležia na tej istej vesmírnej čiare. V akom poradí nastanú pre pozorovateľa, ktorý sa v našej sústave pohybuje doprava? A čo pre pozorovateľa, ktorý sa hýbe doľava? □

Riešenie. Keď si poriadne nakreslíme diagram, označíme udalosti, spravíme rovnobežky s priestorovou osou pohybujúceho sa pozorovateľa a odčítame časy zistíme, že pre pozorovateľa pohybujúceho sa doprava nastane skôr udalosť, ktorá sa od nás odohrala ďalej.

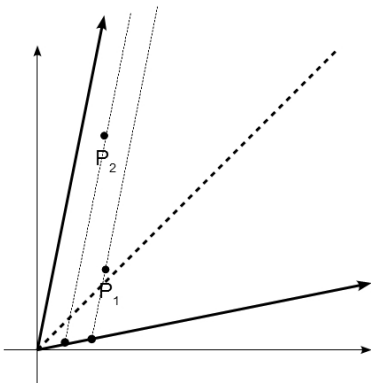


A pre doľavého pozorovateľa naopak. Vidíme, že čím rýchlejšie sa pozorovateľ hýbe tým väčší rozdiel medzi udalosťami nameria. ■

O udalostiach teda nemá zmysel hovoriť ako o absolútne súčasných, lebo sú pozorovatelia, ktorý veci vidia inak. Respektíve môžu vidieť veci inak, čoskoro uvidíme, že za akých podmienok to je možné.

Príklad 6.3. Majme dve udalosti, ktoré v našej sústave nastali na tom istom mieste v rôznych časoch. Na akom mieste nastanú udalosti pre pohybujúceho sa pozorovateľa? Môže pozorovateľ, ktorý sa pohybuje pomalšie ako svetlo vidieť tieto udalosti v opačnom poradí? □

Riešenie. Opäť platí, že jeden obrázok je lepší ako tisíc slov.



Z obrázku by malo byť jasné, že ich poradie sa neprehodí pre nikoho, kto ide pomalšie ako svetlo. ■

Udalosti, ktoré nastali na tom istom mieste vidí každý pozorovateľ, pohybujúci sa pomalšie ako svetlo v tom istom poradí. Nie je ale ťažké rozmyslieť si, že ak sa pozorovateľ pohybuje rýchlejšie ako svetlo – a teda jeho časová a priestorová os sa vymenia, nakoľko $\alpha > 45°$ – niektoré udalosti už poradie vymenené budú mať. Prípadne naopak, pre ľubovoľné dve udalosti, ktoré v nejakej sústave nastali na tom istom mieste, existuje (dostatočne rýchly) pozorovateľ, ktorý ich uvidí nastať v opačnom poradí.

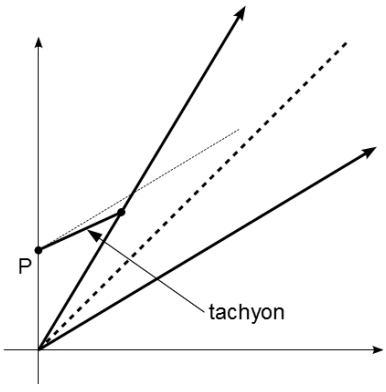
No a to je problém. Prečo? Lebo udalosti, ktoré nastali na tom istom mieste (v nejakej sústave) môžu medzi sebou kauzálne súvisieť. To znamená, že neskoršia je dôsledkom skoršej a bez nej by nenastala. V literatúre sa často píše o zapálení zápalnej šnúry a výbuchu bomby, ak ste pacifistickejšie naladení, môžete si predstaviť zasadenie semiačka

a rozkvitnutie kvetiny. Alebo čokoľvek medzi tým. Pozorovatelia, ktorí by sa pohybovali rýchlejšie ako svetlo túto kauzálnu štruktúru vo svete narušujú. Ak teda veríme, že čosi ako príčina a dôsledok existuje – na čom je viac menej založená celá fyzika s konceptom počiatočných podmienok a časového vývoja – neostáva nám nič iné ako pozorovateľov rýchlejších ako svetlo zakázať.

To ale zatiaľ neznamená, že sa nič nemôže pohybovať rýchlejšie ako svetlo, ale iba to, že takýmto veciam nevieme priradiť štatút pozorovateľa a rozumnú fyzikálnu sústavu. To sme ale už vlastne raz aj spravili. Keď si to rozmyslíte, fotóny ako častice svetla tiež nemajú dobrú pokojovú sústavu. Pre ne sa časová a priestorová os zlievajú dohromady a nevedia teda dobre merať vzdialenosti a časy. Prečo by to mal byť problém pre rýchlejšie častice? Uvidíme v ďalšej úlohe.

Príklad 6.4 (Tachyóny)**.** Tachyóny sú fiktívne častice, ktoré sa hýbu rýchlejšie ako svetlo. Ukážte, že ak stojaci pozorovateľ posiela pohybujúcemu sa pozorovateľovi tachyón, ten ho (vo svojej sústave) prijme skôr, ako mu bol vyslaný. □

Riešenie. Majme dvoch pozorovateľov, stojaceho a pohybujúceho sa. V sústave prvého nastane na jeho mieste nejaká udalosť P a vtedy tiež prvý pozorovateľ pošle k druhému tachyón. Celé to vyzerá nasledovne.

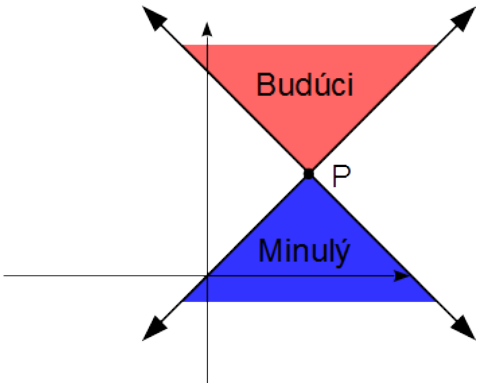


Vidíme, že prijatie tachyónu nastalo pre druhého pozorovateľa skôr, ako udalosť P. Pozorovatelia sa teda mohli dohodnúť, že podľa výsledku tejto udalosti prvý pošle alebo nepošle druhému tachyón. Druhý by potom na základe toho mohol spraviť rozhodnutie založené na výsledku udalosti P skôr, ako táto udalosť (pre neho) nastala. To je zas a znova v rozpore s kauzalitou a tak kauzálnu štruktúru narušuje čokoľvek, čo by sa dokázalo hýbať rýchlejšie ako svetlo bez ohľadu na to, či tachyónom vieme priradiť rozumnú pokojovú sústavu.

Z obrázku si skúste rozmyslieť, ako rýchlo sa pre danú rýchlosť druhého pozorovateľa musí tachyón pohybovať, aby kauzalitu narušoval. ■

Príklad 6.5 (Budúci a minulý svetelný kužeľ)**.** Majme udalosť P. Ako vyzerajú všetky udalosti, ktoré môže táto udalosť v budúcnosti ovplyvniť (tj. žiadny povolený pozorovateľ ich nemôže vidieť v opačnom poradí)? Ako vyzerajú všetky udalosti, ktoré naopak mohli ovplyvniť P? □

Riešenie. Budú to také udalosti, ktoré pre nejakého pozorovateľa nastanú na tom istom mieste. Musia teda ležať na svetočiare nejakého pozorovateľa ktorá prechádza touto udalosťou a tie vypĺňajú celý priestor medzi jedným a druhým svetelným lúčom. Tomuto priestoru sa hovorí budúci svetelný kužeľ.



Nachádzajú sa v ňom všetky udalosti, pre ktoré principiálne môže byť P príčina. Naopak v minulom svetelnom kuželi sú všetky udalosti, ktoré môžu mať ambíciu nejakým spôsobom P ovplyv-

niť. Od všetkého čo sa deje mimo týchto dvoch priestorov je P úplne nezávislá. ■

Pre povolených pozorovateľov nastanú udalosti, ktoré ležia vo svojich svetelných kužeľoch, vždy v tom istom poradí. A existuje sústava, kde nastali na tom istom mieste. Naopak, pre udalosti mimo svetelného kužeľa existujú pozorovatelia, pre ktorých nastanú v jednom aj v druhom poradí a špeciálne existuje sústava, kde nastanú v tom istom čase.

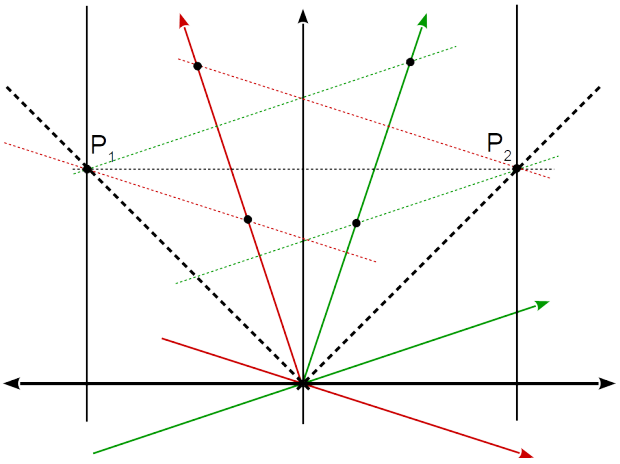
Nasledujúci príklad sa nachádza pravdepodobne v každom texte o špeciálnej relativite. A ten náš nemôže byť výnimkou.

Príklad 6.6 (Najštandardnejší ŠTR príklad na svete)**.** Majme vagón, ktorý sa po nástupišti pohybuje rýchlosťou v. V strede vagónu sa v čase $t = 0$ zapne lampa a vyšle dopredu aj dozadu svetelný signál. V akom poradí dorazia svetelné signály na zodpovedajúci koniec vagóna v sústave spojenej s

- vagónom,
- nástupišťom,
- vlakom, ktorý práve náš vagón predbieha?

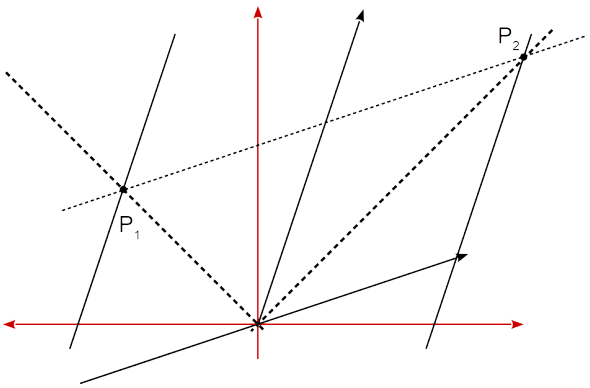
□

Riešenie. Tu bude najťažšie vysvetliť, čo znamenajú čiary na zodpovedajúcom časopriestorovom diagrame.



Čierne osy sú časová a priestorová os pozorovateľa stojaceho vo vagóne. Čierne zvislé čiary sú svetočiary predného a zadného konca vagóna. Červené osy sú osami v sústave spojenej s nástupišťom, zelené osi sú osami sústavy spojenej s rýchlejším vlakom. Čiarkované čiary sú zodpovedajúce rovnobežky a čierne bodky sú miesta, kde môžeme odčítať čas, v ktorom v danej sústave nastali udalosti P_1 a P_2. Potom je už ľahko vidieť, že svetelné lúče ku koncom vagóna dorazili v sústave spojenej s vagónom naraz, v sústave spojenej s nástupišťom dorazil lúč najskôr k zadnej stene vlaku (lebo tá mu išla naproti v tejto sústave) a pre pozorovateľa v prebiehajúcom vlaku najskôr dorazilo svetlo k prednej stene vlaku.

Nakreslime si tú istú situáciu z pohľadu človeka na stanici.

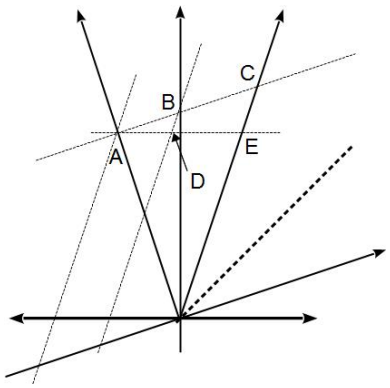


Vieme, že v sústave spojenej s vagónom (čierne osy) musia udalosti P_1 a P_2 nastať naraz. To znamená, že priamka ktorá ich spája musí z vodorovnou osou zvierať uhol α. Toto je ale čisto geometrické tvrdenie: majme dve priamky p_1, p_2, ktoré sú na seba kolmé a dve priamky, ktoré sú osami ich uhlov; zoberme dvojicu priamok q_1 a q_2, ktoré s p_1 obe zvierajú rovnaký uhol β a od priesečníka p_1 a p_2 pretínajú p_1 v rovnakej vzdialenosti; ak označíme priesečníky q_i so zodpovedajúcimi osami ako P_i, ukážte, že priamka P_1P_2 zviera s p_1 uhol $90° - \beta$. Z toho, že geometrická úloha je vlastne opisom merania časov v sústave spojenej s vagónom tak, ako sa na to pozerá človek na stanici, a

z toho, že vo vagóne nastali P_1 a P_2 naraz vieme, že tvrdenie musí platiť. ■

Príklad 6.7 (Relativistické skladanie rýchlostí.)**.** Už sme spomenuli, že skladanie rýchlostí bude v špeciálnej relativite nutne fungovať divne. Ako teda? Majme troch pozorovateľov, jedného v pokoji a dvoch ktorí od neho bežia rovnakou rýchlosťou opačným smerom. Akú rýchlosť nameria v tejto sústave pre pozorovateľa, ktorý sa pohybuje doľava, pozorovateľ, ktorý sa pohybuje doprava? □

Riešenie. Najskôr obrázok.



Z podobnosti trojuholníkov ABD a ACE vidíme, že pre doprava sa pohybujúceho pozorovateľa je vzdialenosť, ktorú prešiel doľava sa pohybujúci pozorovateľ, menšia ako dvojnásobok vzdialenosti, ktorú prešiel stojaci pozorovateľ. Jeho rýchlosť je teda v tejto sústave menšia ako $2v$. ■

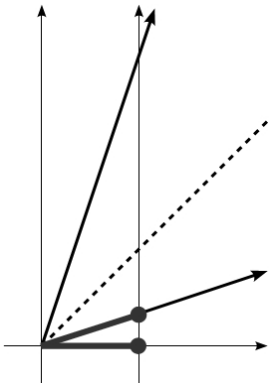
6.2.4 Kontrakcia dĺžky a dilatácia času

Povedali sme si, že súčasnosť dvoch udalosti nie je absolútna, ale rôzni pozorovatelia vidia rôzne dlhý časový úsek medzi udalosťami a znamienko tohto úseku sa dokonca v niektorých prípadoch môže meniť. Pozrime sa teraz na dva celkom zarážajúce dôsledky tejto skutočnosti, o ktorých ste už možno počuli. Kontrakcia dĺžky a a dilatácia času.

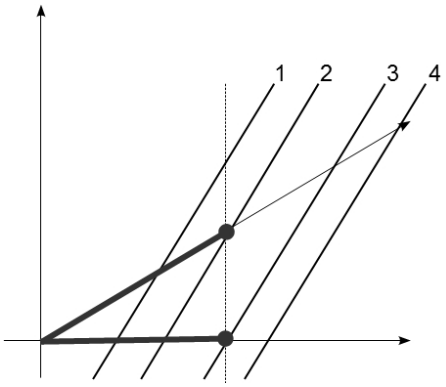
Príklad 6.8 (Porovnávanie pravítok)**.** Majme dvoch pozorovateľov, ktorý každý nesie pravítko dĺžky $1\,m$ (v jeho sústave). Pohybujú sa vzhľadom na seba rýchlosťou v. Rozmyslite si, ako vyzerá jedno pravítko v sústave toho druhého.

Najmä si rozmyslite, ako to funguje s meraním dĺžky jedného pravítka druhým pozorovateľom. A naopak, druhého pravítka prvým pozorovateľom. Ako musia vyzerať výsledky, aby nebol porušený prvý postulát a teda sa nedalo povedať, že pohyb jedného z pozorovateľom je objektívne iný ako toho druhého? □

Riešenie. Nakreslíme si do diagramu sústavu jedného a druhého pozorovateľa a svetočiary jedného a druhého konca pravítka stojaceho pozorovateľa.



Pohybujúci pozorovateľ ide teraz odmerať v svojej sústave dĺžku tohto pravítka. To spraví tak, že nájde konce v tom istom časovom momente tak, ako to vidí on – nájde priesečníky svojej priestorovej osi so svetočiarami koncov pravítka. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že dostal dlhšiu úsečku. Háčik je ale v tom, že porovnávať samotné dĺžky úsečiek nestačí. Potrebujeme vedieť, kde sa nachádzajú konce pohybujúceho sa pravítka. Ľavý koniec nech v nulovom čase splýva s ľavým koncom stojaceho pravítka a jeho svetočiara je teda rovnaká, ako časová os pohybujúceho sa pozorovateľa. Otázka teraz ale je, kde sa nachádza pravý koniec pohybujúceho sa pravítka. Niekoľko možností je naznačených na ďalšom obrázku.



A dopredu prezradíme, že správna nebude ani jedna z týchto možností.

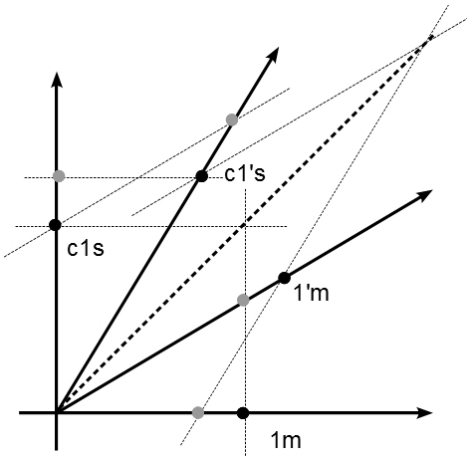
Možnosť 2 by napríklad hovorila, že druhý pozorovateľ odmeral stojacu tyč rovnako dlhú, ako je jeho pravítka. Keď ale teraz stojaci pozorovateľ odmeria dĺžku pohybujúcej sa jednometrového pravítka zistí, že to je kratšie ako jeho jeden meter! To ale nie je možné, pretože tým by sa dal zistiť absolútny pohybový stav – hýbe sa ten pozorovateľ, ktorý nezmeria zmenu dĺžky. No a podobný argument vylučuje všetky ostatné možnosti, pravítka nemôžu v jednej sústave robiť niečo iné ako v druhej.

Dostávame sa tak k jedinému možnému výsledku. Koniec jednometrového pravítka druhého pozorovateľa bude niekde medzi možnosťami 2 a 3. Potom obaja pozorovatelia zmerajú skrátenie jedného metra toho druhého. Pohybujúce sa objekty vidia pozorovatelia skrátené a tomuto efektu sa hovorí kontrakcia dĺžky. ■

Táto úvaha sa dá dotiahnuť ešte ďalej a dá sa kvantitatívne presne nájsť kde táto čiara musí byť. A tým pádom dokonca odhaliť aj formu Loretzovych transformácií. Je to predmetom príkladu 6.25. Tu sa pozrime na to, čo to znamená pre jednu sekundu. Ak stojaci pozorovateľ vidí, že jeden meter v pohybujúcej sa sústave je kratší, čosi sa musí udiať aj s časovým intervalom.

Príklad 6.9. Majme v stojacej sústave hodiny, ktoré kliknú raz sa svetelný meter. Ak vieme kde je na priestorovej osi jeden meter, kde bude jeden svetelný meter na časovej osi? Majme teraz rovnaké hodiny, ktoré sa hýbu. Kde bude jeden svetelný meter v pohybujúcej sa sústave? Ako vyzerá dĺžka jedného pohybujúceho sa svetelného metra z pohľadu stojaceho pozorovateľa? A naopak? □

Riešenie. Jeden svetelný meter v stojace sústave je umiestnený tak, aby rýchlosť svetla bola c, tj. vzdialenosť k nemu pozdĺž časovej osi musí byť rovnaká, ako vzdialenosť k jednému metru pozdĺž tej priestorovej. Prípadne rovnobežkovou metódou merania rýchlosti prídeme na to isté. No a v pohybujúcej sa sústave platí to isté, len rovnobežky netvoria štvorec, ale kosoštvorec.



V tomto obrázku sme už aj zakreslili pohľad pozorovateľov na jeden svetelný meter toho druhého. Vidíme, že udalosť "jeden svetelný meter v pohybujúcej sa sústave" nastala v stojacej sústave neskôr ako jeden svetelný meter v tejto sústave. A rovnako jeden svetelný meter v stojacej sústave vidí pohybujúci sa pozorovateľ udiať sa neskôr, ako jeho jeden svetelný meter. ■

Pozorovateľ teda vidí, že pohybujúce sa hodiny tikajú pomalšie. Tomuto efektu sa hovorí dilatácia času a v pohybujúcich sa sústavách plynie čas pomalšie, v extrémnom prípade fotónu čas zastane úplne. Je fajn rozmyslieť si, ako tieto dva efekty dávajú dohromady konštantnú rýchlosť

svetla. Stojaci pozorovateľ vidí, že v pohybujúcej sa sústave sa skrátil vzdialenosti a teda by jeden meter svetlo malo prejsť rýchlejšie. Hodinky teda budú tikať rýchlejšie, aby ... no počkať. Ale však dilatácia času hovorí presný opak. Ako to je teda?

Príklad 6.10. Ako to je teda? □

Riešenie. Problém v tejto úvahe je v tom, že svetlo síce musí prejsť kratší meter, ale koniec metra pred ním uteká! A preto kým ho dobehne, hodinky musí s tiknutím jedného svetelného metra počkať, aby bolo všetko v súlade s druhým postulátom.

Toto ale platí iba keď sa na pohybujúcu sústave pozerá stojaci pozorovateľ. V sústave pohybujúceho sa všetko funguje ako má, meter nikam nejde a hodinky tikajú ako majú. Naopak, v sústave pôvodne stojaceho pozorovateľa sa dejú divné veci.

Ak sa to zdá trochu zmätené, tak to je preto, že naše nálepky "stojaci" a "pohybujúci" sú zmätočné. Prvý postulát hovorí, že si tak môžeme označiť pozorovateľov, ale rovnako môžeme použiť jabĺčko a hruštičku. ■

6.2.5 Dva paradoxy - dvojičky a rebríky v stodole

Na záver tejto časti sa pozrime na dva paradoxy špeciálnej relativity a ako sa z nich dá vysomáriť pomocou časopriestorových diagramov.

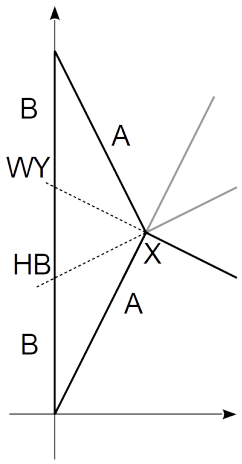
Príklad 6.11 (Paradox dvojičiek)**.** Majme dvojičky, Alicu a Boba, ktoré sú pri narodení v čase $t = 0$ rozdelené. Bob zostal na Zemi, zatiaľ čo Alicu naložili na vesmírnu loď a 10 rokov (tak, ako ich videla ona) sa viezla rýchlosťou $c/2$ preč od Zeme. V tom momente sa ale jej loď otočila a opačným smerom, opäť rýchlosťou $c/2$ sa 10 rokov vracala späť na Zem. Vystúpila z lode a stretla Boba. Kto z nich za ten čas viac zostarol?

Z pohľadu Boba letela Alica v rakete veľa rokov rýchlosťou $c/2$ a teda pre ňu čas bežal pomalšie a kým jej ubehlo 20 rokov u Boba na Zemi ubehlo viac. Alica by mala byť mladšia. Ale z pohľadu Alice by situácia mala vyzerať rovnako! Ona stála a Bob sa pohyboval, aj keď na oveľa väčšom telese, jeho čas plynul pomalšie a kým ona zažila 20 rokov on prežil kvôli dilatácii času menej. No a to je prosím pekne paradox ako remeň. Ako to teda bude?

Naviac bez ohľadu na to, kto nakoniec zostarne viac – lebo však niekto musí, sa zdá, že tým pádom by sme mali vedieť odlíšiť Alicin pohyb od Bobovho státia. To by sme ale nemali vedieť, nie? Či áno? Ako to teda bude? □

Riešenie. Po chvíli rozmýšľania možno dôjdete na to, že problém je v neinerciálnosti obracania Alice. V momente, keď sa Alicina raketa otáčala, Alica zrýchľovala a postuláty špeciálnej relativity prestali platiť. Situácia teda nie je úplne symetrická a pohyby ktoré robili Alica a Bob sú rôzne a nie je problém, ak sa medzi nimi bude dať rozoznať. A kto teda zostarol menej?

V diagrame táto situácia vyzerá takto.



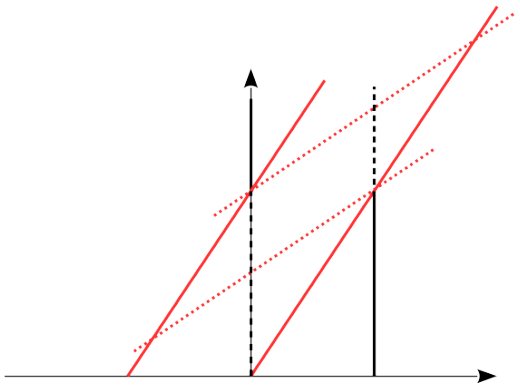
Vidíme, že tesne pred otočením je pre Alicu súčasná Bobova udalosť HB, tesne po otočení je to WY. Celý časový úsek medzi týmito dvomi udalosťami Alici úplne ušiel a o tento úsek bude mladšia ona. Ale to nie je dôsledkom dilatácie času, ktorá funguje symetricky pre oboch. ■

Príklad 6.12 (Rebríkový paradox)**.** Majme vlak dĺžky L, ktorý chce prejsť cez tunel dĺžky $l < L$. Problémom je, že na koncoch tunela sú dvere a naraz vedia byť otvorené iba jedny z nich.

To sa nezdá byť problém, v sústave spojenej s tunelom sa dôsledkom kontrakcie dĺžky vlak skráti a keď pôjde dostatočne rýchlo, do tunela sa vmestí. Avšak v sústave spojenej s vlakom sa skráti tunel a vlak sa do neho vmestí tým viac nie, čím rýchlejšie pôjde.

Tak ako je to? Prejde vlak cez tunel? □

Riešenie. Po slovíčku "naraz" v zadaní by sme už mali vedieť skočiť ako po údenom. Jasne, že tam bude problém. Tak sa na to pozrime v diagrame, ktorý je nakreslený pre situáciu $l = L$.



Čiernou sú svetočiary koncov tunela, červenou konca vlaku. Tam, kde sú čierne čiary prerušované, sú dvere otvorené. V sústave spojenej s tunelom má vlak rovnakú dĺžku ako tunel a len-len sa do neho vmestí. V sústave spojenej s vlakom je tunel síce krátky, ale vidíme že veľmi dlho sú otvorené predné aj zadné dvere naraz. A presne za tento čas sa dlhší vlak nachádza v tunely a bezpečne ním prejde. ■

To bola relativita bez rovníc a bez akejkoľvek komplikovanej matematiky. V ďalších častiach sa na to pozrieme poriadnejšie, ale je dobre si pamätať ze nič nové sa nestane a vlastne budeme len kvantifikovať úvahy, ktoré sme doteraz spravili kvalitatívne. Kľúčová bude stále konštantnosť rýchlosti svetla a za všetkým bude z nej vyplývajúca relatívnosť súčasnosti.

6.3 Relativistická kinematika

6.3.1 Lorentzove transformácie

Ako sme už písali, Lorentzove transformácie sú spôsobom, ako sa dostať z jednej vzťažnej sústavy do druhej. Presnejšie povedané, hovoria v akom vzťahu sú súradnice udalosti v jednej sústave, ak poznáme jej súradnice v inej sústave. Dajú sa odvodiť rôznymi spôsobmi. Jedným je kvantifikovanie efektov kontrakcie dĺžky a dilatácie času a zakomponovanie týchto efektov do transformácie.

Druhým je takáto, vcelku matematická úvaha. Majme dve sústavy, v ktorých sú súradnice nejakej udalosti (x, t) a (x', t') a predpokladajme, že medzi nimi existuje transformácia, tj. existujú funkcie[70]

$$x' = x'(x, t) \ , \ t' = t'(x, t) \ . \tag{6.2}$$

Aký je najvšeobecnejší možný tvar týchto súradníc? Vychádzajúc z postulátov špeciálnej teórie relativity zisťujeme, že

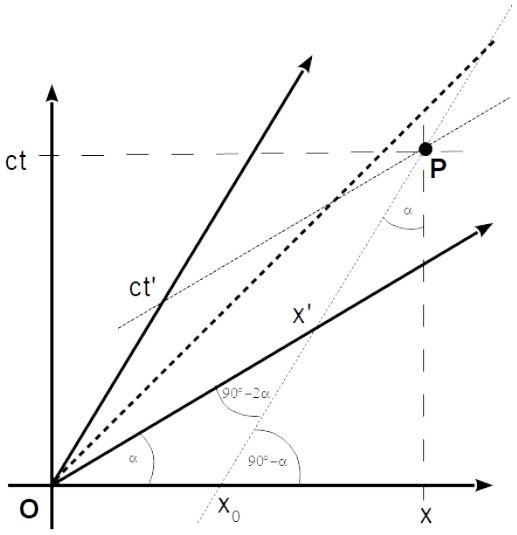
- ak ma byt rovnomerný priamočiary pohyb telesa invariantný (obe sú inerciálne sústavy), transformácie musia byt lineárne,

[70] Všimli ste si, že posledná číslovaná rovnica bola pred takmer jedenástimi stranami?

- v pokojovej sústave telesa, ktoré sa hýbe rýchlosťou v – i.e. $x = vt$ – musí platiť $x' = 0$, potom $x' = A(x - vt), x = A(x' + vt')$ a teda $t' = At - (A - 1/A)x/v$, pre nejakú konštantu A,
- z druhého postulátu dostávame, že pre svetelné lúče $x = ct$ musí dávať transformácia dávať $x' = ct'$.

Príklad 6.13. Z poslednej podmienky dopočítajte faktor A. □

Avšak my sme experti a expertky v časopriestorových diagramoch a pozrieme sa teda na odvodenie Lorentzovych transformácií obrázkovou metódou. Relevantný diagram vyzerá nasledovne



Máme udalosť P, ktorá ma v nečiarkovanej sústave súradnice (x, ct) a v čiarkovanej (x', ct'). Z obrázku potom dostávame, že

$$x_0 = x - ct \tan \alpha = x - vt \ . \tag{6.3}$$

Sínusová veta pre trojuholník Ox_0x' a súčtové vzorce pre sínus dajú

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(x - vt\right) \ . \tag{6.4}$$

Toto označenie pre faktor γ je štandardné a treba si na neho pomaly zvykať. Všimnite si, že $\gamma \geq 1$ a $\gamma = 1$ pre $v = 0$. Podobne sa dá odvodiť transformácia pre časovú súradnicu

Príklad 6.14. Ukážte, že pre čas dostávame Lorentzovu transformáciu

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \ . \tag{6.5}$$

□

Je milé všimnúť si, ako prechod od t k ct symetrizuje transformácie (6.4) a (6.5).

Tým je skaza dokonaná a dostali sme Lorentzove transformácie v jednom rozmere. Ak by sme pridali ďalšie dva priestorové rozmery, ale rýchlosť mala stále iba x-ový smer, tieto súradnice sa nemenia a

máme transformácie v plnej kráse

$$x' = \gamma(x - vt) \ , \tag{6.6a}$$
$$y' = y \ , \tag{6.6b}$$
$$z' = z \ , \tag{6.6c}$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \ , \tag{6.6d}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ . \tag{6.6e}$$

Sú priamym dôsledkom postulátov špeciálnej relativity a vyplýva z nich všetko, čo sme zatiaľ dostali, tj. veci ako relatívnosť súčasnosti, kontrakcia dĺžky, dilatácia času. Spomeňme si tiež, že historicky Lorentz našiel tieto transformácie ako záchranu nepozorovanej rýchlosti Zeme vzhľadom na éter a symetriu Maxwellovych rovníc, až neskôr sa ukázalo, že práve toto sú ozajstné transformácie medzi pohybujúcimi sa sústavami v našom svete.

V klasickej mechanike boli transformácie $t' = t, x' = x - vt$ a teda tam bol čas absolútny a rovnaký v každej sústave. Tu to už tak nie je. Tieto transformácie, ktorým sa hovorí Galileiho, dostávame v limite $v/c \to 0$.

V (6.4) ľahko identifikujeme kontrakciu dĺžky. Prepíšeme tento vzťah do tvaru

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt \tag{6.7}$$

a vidíme, že okrem posunutia počiatku dostávame v nečiarkovanej sústave o faktor γ kratšiu súradnicu. Skúste si rozmyslieť, ako je podobným spôsobom v (6.5) zabalená dilatácia času.

Príklad 6.15 (Relativistické skladanie rýchlostí.)**.** Majme teleso, ktoré sa vzhľadom na nečiarkovanú sústavu hýbe rýchlosťou u. Akú rýchlosť pre neho nameria pozorovateľ v čiarkovanej sústave, ktorá sa hýbe rýchlosťou v? □

Návod. Pre teleso platí $x = ut$ a $x' = u't'$. ■

Výsledok.

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \ . \tag{6.8}$$

■

Pre úplnosť si ešte povedzme, čo robiť keď má rýchlosť aj inú ako x-ovú komponentu. Všeobecne majme rýchlosť sústavy $\vec{v}$ a súradnice udalosti nech sú $P = (\vec{x}, ct)$. Polohový vektor $\vec{x}$ si rozdelíme na časť v smere $\vec{v}$ a kolmú na v

$$\vec{x} = \vec{x}_\perp + \vec{x}_\parallel \ , \ \vec{x}_\perp \cdot \vec{v} = 0 \ , \tag{6.9}$$

Transformuje sa iba zložka $\vec{x}_\parallel$, konkrétne

$$\vec{x}'_\parallel = \gamma(\vec{x}_\parallel - \vec{v}t) \ , \vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp \ , \ \vec{x}' = \vec{x}'_\perp + \vec{x}'_\parallel \tag{6.10}$$

a pre čas bude platiť

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) , \tag{6.11}$$

pričom

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}} . \tag{6.12}$$

6.3.2 Invariantný interval a vlastný čas

Zistili sme, že vzdialenosti ani časy trvania nie sú rôznych sústavách rovnaké, ale pri prechode z jednej do druhej sa menia. Chceli by sme teda nájsť veličinu, ktorá sa pri Loretnzovych transformáciách nemení a je pre dvojicu udalostí $P_1 = (x_1, ct_1)$ a $P_2 = (x_2, ct_2)$ rovnaká bez ohľadu na to, ktorý pozorovateľ ju počíta.

Po troche skúšania prídeme s tým, že invariantom je veličina

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta s)^2 \tag{6.13}$$

kde $\Delta t = t_1 - t_2$, $\Delta x = x_1 - x_2$ a analogicky v čiarkovanej sústave. Označenie pre túto veličinu ako $(\Delta s)^2$ je štandardné, ak keď trochu mätúce, pretože veličina môže byť záporná. Hovorí sa jej invariantný interval. Má jednotku m^2, ktorú ale nebudeme pri číselných hodnotách explicitne písať.

Príklad 6.16. Použitím Lorentzovych transformácií ukážte, že veľkosť intervalu je ozaj medzi sústavami invariantná. □

Interval je čosi ako vzdialenosť v časopriestore, s tým rozdielom, že to je niečo úplne iné. V zmysle, že môže byť záporná a pre dve udalosti, ktoré delí nulový interval neznamená, že sú nutne rovnaké. Konkrétne

- ak $(\Delta s)^2 > 0$, hovoríme o časupodobnom intervale (time-like) a udalosť P_2, pre $t_2 > t_1$ je v budúcom svetelnom kuželi udalosti P_1, udalosti môžu príčinne súvisieť, neexistuje pozorovateľ, ktorý ich uvidí v opačnom poradí;
- ak $(\Delta s)^2 < 0$, hovoríme o priestorupodobnom intervale (space-like) a udalosť P_2 a P_1 spolu nemôžu príčinne súvisieť;
- ak $(\Delta s)^2 = 0$, hovoríme o svetlupodobnom intervale (light-like), udalosti P_1 a P_2 spája svetelný signál.

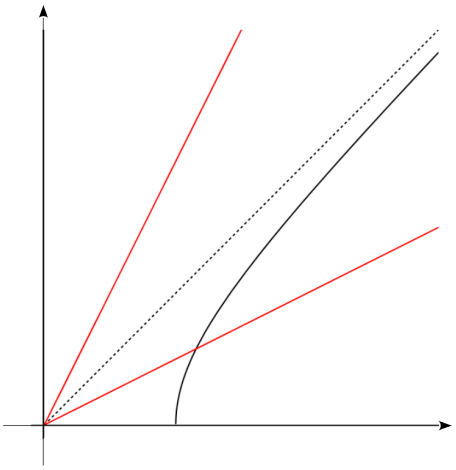
Udalosť "koniec jednometrového pravítka" je invariantná a teda ak nejaký pozorovateľ nameria pre svoj koniec jednometrového pravítka interval $(\Delta s)^2$, všetci pozorovatelia musia mať koniec jednometrového pravítka v takomto intervale

$$(\Delta s)^2 = 0^2 - 1^2 = -1 , \tag{6.14}$$

konce jednometrových pravítok budú teda vždy v mieste

$$x^2 - (ct)^2 = 1 . \tag{6.15}$$

Tieto body v časopriestore vykresľujú hyperbolu:



Otázkou teraz je, ako chceme parametrizovať pohyb telies v časopriestore. V klasickej mechanike bola poloha telesa popísaná vektorom $\vec{x}(t)$. Teraz ale čas t nie je dobrým parametrom, lebo jeho hodnotou je priamo určená poloha udalosti, a teda poloha telesa, v časopriestore. Čas sa stal z parametra súradnicou. Raketový postup v rebríčku! Všetci mu to samozrejme prajeme, ale ostáva nám nájsť iný parameter, ktorý bude dobrý na popis polohy telesa. Veľmi ochotne sa núka invariantný interval.

Ten je totiž rovnaký v každej sústave a pre každého pozorovateľa, mohol by teda byť rozumným parametrom na popis toho, čo sa deje. V sústave spojenej s telesom, tj. v sústave kde teleso stojí, platí $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t')^2$. Nech teraz teleso spraví pri svojom pohybe infinitezimálny krok v časopriestore a pri tom ho pozoruje veľa pozorovateľov. Každý pozorovateľ uvidí inú hodnotu posunutia dt a dx, ale všetci sa zhodnú na tom, že v sústave spojenej s telesom tento pohyb trval čas

$$d\tau = \frac{\Delta s}{c} \ . \tag{6.16}$$

Ak sa teleso pohybuje pomalšie ako svetlo, toto je dobrá reálna veličina. Pre veci, ktoré sa hýbu rýchlosťou svetla tento formalizmus fungovať nebude. Pozorovatelia môžu teda v svojej sústave parametrizovať polohu telesa v časopriestore celkovým prírastkom tejto veličiny

$$d\tau = \frac{\Delta s}{c} \tag{6.17}$$

a potom $x(\tau), t(\tau)$ sú nejaké funkcie τ. Tomu sa hovorí vlastný čas, lebo to je čas, ktorý medzi udalosťami O a P ubehne na hodinách spojených s telesom. Pri troche počítania zistíme, že

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} = dt^2\left(1 - \frac{dx^2/dt^2}{c^2}\right) = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{6.18}$$

a teda

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma \ . \tag{6.19}$$

To znamená, že $dt \geq d\tau$ a teda hodinky tikajú pomalšie v pohybujúcej sa sústave a tiež to znamená, že v sústave spojenej s telesom ubehne najkratší čas medzi dvoma jeho polohami.

6.3.3 4-poloha, 4-rýchlosť, 4-hybnosť a 4-vektory

Ak vás hnevalo, ako sa doteraz plietla poloha v x-ovom priestore s polohou v časopriestore, mám pre vás dobré správy. Prejdeme (rovno) do štvorrozmerného popisu polohy v časopriestore. Takýmto vektorom budeme hovoriť 4-vektory – čítaj "štvorvektory" – aby sme zdôraznili ich rozdiel od obyčajných vektorov, ktorým sa občas hovorí 3-vektory.

Príklad 6.17. Ako sa číta termín "3-vektor"? □

Budeme ale stále predpokladať, že osi súradnicových sústav sú nastavené tak, že ich vzájomná rýchlosť je iba v (spoločnom) x-ovom smere.

Informáciu o stave telesa, teda o udalosti v časopriestore danej časom t a vektorom polohy $\vec{x}$ môžeme zabaliť do vianočného balenia[71] $X = (ct, \vec{x}) = (X^0, X^1, X^2, X^3)$. Zatiaľ sa na to bude dať pozerať ako iba na označenie, kde je najzaujímavejšie počítanie do 4 ako $0, 1, 2, 3$.

Túto štvoricu čísel medzi sebou dobre definovaným spôsobom miešajú Lorentzove transformácie. To znamená, že ak je poloha udalosti daná v nečiarkovanej sústave 4-vektorom X, potom v čiarkovanej ju popisuje vektor

$$X' = (\gamma(X^0 - vX^1/c), \gamma(X^1 - vX^0/c), X^2, X^3) \ . \tag{6.20}$$

Ako druhú mocninu X zadefinujeme

$$X^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = X'^2 \ , \tag{6.21}$$

pretože tým dostaneme čosi, čo je invariantné medzi sústavami. Do skalárneho súčinu sme teda rukou vložili znamienka mínus a je to to isté znamienko mínus ktoré sa objavilo v invariantnom intervale.

Kinematika telesa je potom daná 4-vektorom polohy ako funkciou vlastného času $X(\tau)$. Je potom prirodzené definovať 4-rýchlosť ako deriváciu tejto veličiny podla τ

$$U \equiv \frac{dX}{d\tau} = \left(\frac{dX^0}{d\tau}, \frac{dX^1}{d\tau}, \frac{dX^2}{d\tau}, \frac{dX^3}{d\tau}\right) = \frac{dt}{d\tau}(c, \vec{u}) = \gamma_u(c, \vec{u}) \ . \tag{6.22}$$

V tomto označení je opäť $\vec{u}$ rýchlosť telesa, ktoré popisujeme tak, ako ju nameria pozorovateľ, ktorý v nečiarkovanej sústave stojí. V nasledujúcich pár vzťahoch budeme explicitne písať γ_u, lebo bude vystupovať veľa rôznych rýchlosti a každá bude mať svoje γ.

Čo vieme povedať o U? V prvom rade sa pri Lorentzovych transformáciách transformuje rovnako ako X, nakoľko τ je invariant a teda v sústave pozorovateľa, ktorý sa hýbe rýchlosťou v je táto rýchlosť

$$U'^1 = \gamma_v \left(U^1 - vU^0/c\right) = \gamma_v \left(u\gamma_u - v\gamma_u\right) = \gamma_u\gamma_v(u - v) \stackrel{!}{=} \gamma_{u'}u' \ . \tag{6.23}$$

Explicitným výpočtom overíme, že

$$\gamma_u\gamma_v = \gamma_{u'} \Big/ \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \ , \ u' = (u - v) \Big/ \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \ , \tag{6.24}$$

[71] Tu sa z nejakého dôvodu píšu indexy hore. Nedostaneme sa k tomu, že prečo, ak to ale niekedy v budúcnosti budete potrebovať, je fajn zvyknúť si na to už teraz. Malo by byť jasné, kedy X^2 myslí druhú komponentu X a kedy druhú mocninu X. Tiež sme zmenili poradie časovej a priestorových zložiek z časti o časopriestorových diagramoch.

čo dáva iné odvodenie relativistickeho skladania rýchlostí (6.8). Podobný výpočet overí, že

$$U'^0 = \gamma_{u'} \ . \tag{6.25}$$

V druhom rade U^2 je rovnaké pre všetkých pozorovateľov a platí $U^2 = c^2$. Tento fakt sa zvykne komentovať tak, že každé teleso sa pohybuje časopriestorom konštantou rýchlosťou – rýchlosťou svetla. A táto rýchlosť je rôznym spôsobom rozdelená medzi pohyb v čase a pohyb v priestore. Ak v priestore stojíme, pohybuje sa celou touto rýchlosťou v čase a teda medzi dvoma tikmi na hodinách prejde najkratší čas. Ak sa hýbeme aj priestorom, na pohyb časom ostáva menej a hýbeme sa v čase pomalšie – dilatácia času. A pre svetlo, ktoré sa hýbe priestorom rýchlosťou svetla, na pohyb v čase neostáva nič. Tachyóny, ktoré sa hýbu v priestore rýchlosťou väčšou ako c musia mať v čase zápornú rýchlosť a preto sa hýbe v čase späť – aj keď táto posledná veta to tvrdenie už dosť doťahuje do extrému. Môžete si premyslieť poriadnejšie, ako je to so 4-rýchlosťou tachyónu.

Tak ako v klasickom prípade, aj tu si so sebou každé teleso nesie parameter m_0, ktorému hovoríme pokojová hmotnosť – prečo nové prídavné meno zistíme čoskoro – a keď ním vynásobíme 4-rýchlosť dostaneme 4-hybnosť

$$P \equiv m_0 U = \gamma_u m_0 (c, \vec{u}) \ . \tag{6.26}$$

Pre priestorovú časť tohto 4-vektora dostávame $m_0\gamma_u\vec{u}$ a teda $m_0\gamma_u$ má zmysel nepokojovej hmotnosti – teleso sa v sústave kde sa pohybuje správa, ako keby bolo ťažšie. Neprekvapí nás, že $P^2 = m_0^2 c^2$.

Všimneme si, že zložka P^0 vynásobená c ma rozmer energie a $P^0 c$ teda veľmi odvážne zadefinujeme ako celkovú relativistickú energiu telesa tak, ako ju nameria pozorovateľ, v ktorého sústave vyjadrujeme P. Je to celkom ďalekosiahla definícia, tak si zaslúži nejaké rozumné zdôvodnenie. Na to napíšeme $P = (E/c, \vec{p})$ a počítame

$$P^2 = E^2/c^2 - \vec{p}\cdot\vec{p} = m_0^2 c^2 \ , \tag{6.27}$$

z čoho dostaneme

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = m_0^2 \gamma_u^2 c^4 \ . \tag{6.28}$$

Pre malé u dostaneme

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \dots \ . \tag{6.29}$$

Prvý člen má teda interpretáciu pokojovej energie, druhý člen kinetickej energie, vyššie členy majú interpretáciu relativistickej opravy ku kinetickej energii telesa. No a z toho, aby sme pre malé rýchlosti dostali energiu rovnú starej dobrej kinetickej energii usudzujeme, ze m_0 má ozaj dobrú interpretáciu hmotnosť telesa. Prípad $u = 0$ tejto rovnosti je celkom slávny, dalo by sa povedať, že najslávnejší ako sa dá pre fyzikálnu rovnicu. A hovorí, že aj keď sa teleso nikam nehýbe má nejakú energiu, čisto kvôli svojej pokojovej hmotnosti.

Vidíme tiež, že pre $v \to c$ energia vybuchuje a urýchliť teleso na rýchlosť svetla stojí nekonečne veľa energie. Takže sme na rýchlosť svetla ako na hranicu pre rýchlosti narazili ďalším spôsobom.

Ako o 4-vektore budeme rozprávať o každej štvorici čísel, ktorá sa medzi sústavami transformuje pomocou Lorentzovych transformácii. Ak sa nám podarí usporiadať nejaké čísla do 4-vektora, bude to dôležité lebo tým z podmienky $X^2 = const$ dostaneme netriviálny vzťah medzi veličinami v rôznych sústavách.

Od teraz už nebudeme k pokojovej hmotnosti písať index, budeme mať iba m a vždy tým budeme myslieť pokojovú hmotnosť. Niekedy sa v literatúre označuje $m = m_0\gamma$ ako nepokojová hmotnosť závislá od rýchlosti a potom je vzťah $E = mc^2$ platný pre ľubovoľnú rýchlosť a hovorí o celkovej energii telesa. My to robiť nebudeme.

6.3.4 Relativistické zrážky

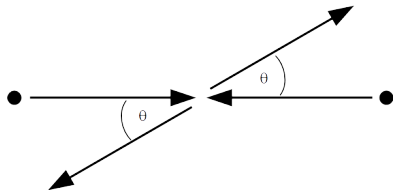
Ako v prípade zrážok v klasickej mechanike, aj v relativite sa toho bude dať veľa povedať iba na základe zákonov zachovania. Dokonca zákon zachovania energie a zákon zachovania hybnosti sú v tomto prípade zabalené do super akciovej verzie zákonu zachovania 4-hybnosti.

Príklad 6.18. Majme dve rovnaké častice, ktoré letia proti sebe a od pôvodného smeru sa po zrážke nejak odchýlia. Ako vyzerajú 4-vektory hybnosti častíc pred zrážkou a po zrážke v ťažiskovej sústave? Ako to vyzerá v laboratórnej sústave, v ktorej jedna z častíc stála? □

Riešenie. V ťažiskovej sústave budú 4-hybnosti častíc

$$P_1 = (mc\gamma_v, m\gamma_v v, 0, 0)\ ,\ P_2 = (mc\gamma_v, -m\gamma_v v, 0, 0)\ , \tag{6.30}$$

pretože z definície je v ťažiskovej sústave celková 3-hybnosť nulová. Po zrážke budú 4-hybnosti – ktoré teraz budeme označovať pruhom, lebo čiarku máme na čosi iné –



$$\bar{P}_1 = (mc\gamma_v, m\gamma_v v\cos\theta, m\gamma v\sin\theta, 0)\ ,\ \bar{P}_2 = (mc\gamma_v, -m\gamma_v v\cos\theta, -m\gamma v\sin\theta, 0)\ , \tag{6.31}$$

pričom sme rukou vložili to, že aj po zrážke musí byť v ťažiskovej sústave nulová 3-hybnosť, a teda častice musia mať rovnakú 3-hybnosť v opačnom smere. A keďže sú rovnako ťažké, musia mať po zrážke rovnakú rýchlosť.

V laboratórnej sústave, častica 1 stála a častica 2 na ňu letela sprava rýchlosťou $2v/(1 + v^2/c^2)$. 4-hybnosti v tejto sústave po zrážke dostaneme pomocou Lorentzovych transformácii

$$\begin{aligned}
\bar{P}_1' &= \left(\gamma(\bar{P}_1^0 - v\bar{P}_1^1/c), \gamma(\bar{P}_1^1 - v\bar{P}_1^0/c), \bar{P}_1^2, \bar{P}_1^3\right) = \\
&= m\gamma_v\left(c\gamma_v(1 - \cos\theta v^2/c^2), v\gamma_v(\cos\theta - 1), v\sin\theta, 0\right)\ , \qquad (6.32)\\
\bar{P}_2' &= \left(\gamma(\bar{P}_2^0 - v\bar{P}_2^1/c), \gamma(\bar{P}_2^1 - v\bar{P}_2^0/c), \bar{P}_2^2, \bar{P}_2^3\right) = \\
&= m\gamma_v\left(c\gamma_v(1 + \cos\theta v^2/c^2), v\gamma_v(-\cos\theta - 1), -v\sin\theta, 0\right)\ . \qquad (6.33)
\end{aligned}$$

Pre $\theta = 0$ sa po zrážke prvá častica nehýbe a to, že druhá sa tiež ďalej pohybuje bez zmeny je dôsledkom (6.24). Naopak, pre $\theta = \pi$, a teda situáciu keď sa v ťažiskovej sústave častice odrazili opačným smerom dostávame, že častica 2 v laboratórnej sústave zastala a častica 1 na seba zobrala jej pôvodnú úlohu. No a pre uhly medzi týmito dvomi hodnotami sa dá zo smerov 3-hybností $\vec{p}_1'$ a $\vec{p}_2'$ identifikovať, pod akým uhlom oproti pôvodnému smeru sa častice pohybujú v laboratórnej sústave. ■

Príklad 6.19. Majme dve častice s hmotnosťou m, ktoré sa dokonale nepružne zrazia. Aká bude (pokojová) hmotnosť výslednej častice? □

Riešenie. Označme hľadanú hmotnosť M. Celková 4-hybnosť pred zrážkou je

$$(m\gamma_1 c, m\gamma_1 \vec{v}_1') + (m\gamma_2 c, m\gamma_2 \vec{v}_2') \ . \tag{6.34}$$

Keďže hľadáme pokojovú hmotnosť výslednej častice, môžeme sa pozrieť na situáciu v sústave, kde bude stáť a to je ťažisková sústava pôvodnej dvojice častíc. V nej $m\gamma_1 \vec{v}_1' = -m\gamma_2 \vec{v}_2'$ a teda celková 4-hybnosť je $(m\gamma_1 c + m\gamma_2 c, 0)$.

Častica po zrážke má 4-hybnosť $(Mc, 0)$ a teda dostávame

$$M = m\gamma_1 + m\gamma_2 > 2m \ . \tag{6.35}$$

Výsledná pokojová hmotnosť častice je vyššia ako súčet pokojových hmotností pôvodnej dvojice! To preto, že na hmotnosť sa premenila aj kinetická energia. Mikroskopicky si to môžeme predstaviť tak, že kinetická energia sa premenila – podobne ako v klasickom prípade – na teplo, teda na mikroskopický pohyb častíc, z ktorých sa pôvodné telesá skladali. Teplo je ale forma energie a na základe rovnice $E = mc^2$ sa prejavuje ako zvýšenie hmotnosti. Ak išlo o elementárne častice, ktoré sa z ničoho ďalšieho neskladajú, tak v zrážke proste zanikli a vznikla úplne nová elementárna častica, ktorá ma hmotnosť patrične väčšiu a kinetickú energiu pôvodných častíc. ■

Tým, že hmotnosť zodpovedá energii sa pri relativistických zrážkach vie diať čosi veľmi zaujímavé. Pri nepružných zrážkach, kedy sa stráca mechanická energia, sa môže ako forma stratenej energie objaviť niečo úplne nové!

Príklad 6.20. Majme dve častice hmotnosti m, ktoré necháme zraziť sa v sústave, kde jedna stojí. Ako výsledok dostaneme dve pôvodné častice plus jednu novú časticu hmotnosti M. Aká musela byť minimálna rýchlosť častice pred zrážkou? □

Riešenie. Pre 4-hybnosti častíc pred zrážkou máme priamočiaro $P_2 = (mc, 0), P_1 = (m\gamma_v c, m\gamma_v v)$. Z toho vypočítame veľkosť 4-hybnosti, ktorá sa v zrážke musí zachovávať, lebo to je zákon zachovania energie a hybnosti dohromady[72],

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 = 2m^2c^2 + 2m^2c^2\gamma_v \ . \tag{6.36}$$

To musí byť rovné $(P_3 + P_4 + P_5)^2$. Túto veličinu ale môžeme spočítať v ťažiskovej sústave a z invariantnosti musíme dostať to isté, takže

$$(P_3 + P_4 + P_5)^2 = \frac{1}{c^2}(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \ldots) \geq \frac{1}{c^2}(2mc^2 + Mc^2)^2 = 4m^2c^2 + M^2c^2 + 4Mmc^2 \ . \tag{6.37}$$

Z toho dostaneme

$$\gamma_v \geq 1 + \frac{2M}{m} + \frac{M^2}{2m^2} \ . \tag{6.38}$$

To znamená, že zrážkami ľahkých častíc je veľmi náročné vyrábať ťažké častice. ■

[72] Pod $P_1 \cdot P_2$ rozumieme $P_1^0 P_2^0 - P_1^1 P_2^1 - P_1^2 P_2^2 - P_1^3 P_2^3$, tj. skalárny súčin, ktorý vedie na (6.21).

Celá táto téma relativistických zrážok je dôležitá preto, že čosi také robia – minimálne po kinematickej stránke – častice v rôznych urýchľovačoch častíc, napríklad LHC v Cerne. A teda sú úplne kľúčovou sondou do fundamentálnych prírodných zákonov, ktoré riadia základné stavebné kúsky hmoty okolo nás.

6.4 Relativistická dynamika

Na úplný záver tohto textu sa poďme pozrieť na trochu skutočnej dynamiky v špeciálnej teórii relativity.

6.4.1 4-sila

Druhý Newtonov zákon vyzerá tak, že na pravej strane je časová derivácia hybnosti, na ľavej je sila. Túto rovnicu budeme teraz chcieť prezliecť do 4-vektorového šatu. Čo v tomto prípade písať namiesto $\dot{\vec{p}}$ vieme, bude to derivácia 4-hybnosti podľa vlastného času. Ale čo so silou?

Označíme 3-silu ako $\vec{f}$, pridáme k nej časovú komponentu a zadefinujeme 4-silu nasledovne

$$F = (F^0, \gamma\vec{f}) \ , \tag{6.39}$$

pričom faktor γ sme pridali preto, aby sa neobjavil niekde inde a dostali sme na správnom mieste druhý newtonov zákon. Interpretácia F^0 sa ukáže čoskoro, ale niečo môžeme skúsiť natipovať už teraz. $\vec{f}$ je vec, ktorá mení hybnosť a v časovej komponente P je energia, takže F^0 bude mať čosi so zmenou energie. A takýmto veciam hovoríme výkon.

Píšeme teda

$$F = \frac{dP}{d\tau} \ , \tag{6.40}$$

čo dá ako priestorovú zložku rovnicu

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = \vec{f} \ . \tag{6.41}$$

To je druhý newtonov zákon v troch rozmeroch s meniacou sa hmotnosťou. Keď sa pozeráme na relativistickú dynamiku hmotného bodu v dobre definovanej inerciálnej sústave a nemáme veľmi ambíciu niekedy túto sústavu meniť, efekt relativity sa prejaví tým, že hmotný bod bude mať hmotnosť závislú od rýchlosti skrz faktor γ.

Časová zložka je jednoducho

$$F_0 = \frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt} \ . \tag{6.42}$$

Zmena energie za čas je výkon pôsobiacej sily, ktorý je daný ako $\vec{v}\cdot\vec{f}$ a môžeme pre časovú zložku 4-sily písať

$$F = \gamma(\vec{v}\cdot\vec{f}/c, \vec{f}) \ . \tag{6.43}$$

Pohybová rovnica (6.40) v sebe nesie informáciu, ako sila mení hybnosť a energiu telesa – to nás neprekvapuje, lebo v P je energia a hybnosť intímne spojená a menenie jedného znamená menenie druhého.

Príklad 6.21. Ukážte, že zachovanie veľkosti 4-hybnosti v sebe nesie rovnakú informáciu, ako zákon zachovania energie. □

Riešenie. Počítame

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(P^2\right) = 2\frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau} - 2\vec{p}\frac{d\vec{p}}{d\tau} = 2\gamma^2 mc\left(\frac{dE}{dt} - \vec{v}\cdot\vec{f}\right) \ . \tag{6.44}$$

■

6.4.2 Pohyb pod pôsobením konštantnej sily

Majme teleso hmotnosti m, ktoré v sústave stojaceho pozorovateľa štartuje – v jednom rozmere – z nulovej rýchlosti pôsobením konštantnej sily f. Ako bude zrýchľovať? V klasickej mechanike sa bude pohybovať so zrýchlením f/m do nekonečna a postupne získa ľubovoľne veľkú rýchlosť. Čo na to relativita?

Pohybová rovnica v tejto sústave bude vyzerať

$$\frac{d}{dt}(m\gamma v) = f \tag{6.45}$$

za priestorové zložky. Časovú zložku sme už vyriešili definíciou F^0. Počítame

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\dot{v} = \gamma^3\frac{va}{c^2} \tag{6.46}$$

a potom dostávame

$$m(\dot{\gamma}v + \gamma a) = am\gamma\left(\gamma^2\frac{v^2}{c^2} + 1\right) = am\gamma^3 = f \ . \tag{6.47}$$

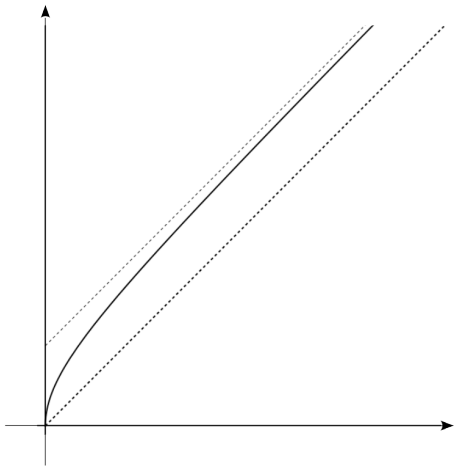
Dostali sme teda rovnicu

$$\frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{f}{m}dt \ , \tag{6.48}$$

ktorú vieme riešiť

$$v = \frac{\frac{f}{m}ct}{\sqrt{c^2 + \frac{f^2t^2}{m^2}}} \ \Rightarrow \ x = \int v dt = \frac{mc}{f}\left(\sqrt{c^2 + \frac{f^2t^2}{m^2}} - c\right) \ . \tag{6.49}$$

Svetočiara telesa je teda hyperbola v časopriestore. Pre veľké časy $x \to ct$ a rýchlosť pohybu sa limitne približuje k rýchlosti svetla. Tým, že teleso je čím ďalej tým ťažšie tak mu konštantná sila dáva menšie a menšie zrýchlenie.



Chceli by sme sa pozrieť ešte na to, ako to celé vyzerá v sústave spojenej s telesom. Pozor, táto sústava nie je inerciálna, ale môžeme skúsiť čosi, ako lokálne inerciálnu sústavu. Tj. sústavu, ktorá má rovnakú rýchlosť ako toto teleso v danom okamihu, a má počiatok tam, kde sa vtedy teleso nachádza. Ako vyzerá sila pôsobiaca na teleso v tomto momente v tejto sústave? Prezradí nám to Lorentzova transformácia

$$F'^0 = \gamma(F^0 - vF^1/c) = \gamma^2(fv/c - fv/c) = 0 \ , \tag{6.50}$$

$$F'^1 = \gamma(F^1 - vF^0/c) = \gamma(\gamma f - v\gamma vf/c^2) = f \ . \tag{6.51}$$

To dáva

$$\frac{d}{d\tau}(mv') = ma' = F'^1 = f \ . \tag{6.52}$$

V tejto sústave je teda 4-zrýchlenie telesa jednoducho $A' = (0, f/m)$. Pozrime sa, ako toto 4-zrýchlenie transformujú Lorentzove transformácie do pôvodnej sústavy. Takto

$$A = \big(\gamma(A'^0 + vA'^1/c), \gamma(A'^1 + vA'^0/c)\big) = \left(\frac{\gamma vf}{cm}, \frac{\gamma f}{m}\right) \ . \tag{6.53}$$

Toto 4-zrýchlenie je rovné $dU/d\tau = (\gamma\dot{\gamma}c, \gamma\dot{v})$, čo dá v priestorovej zložke rovnicu (6.52) a v časovej zreprodukuje rovnicu (6.47). A to je koniec.

Ďalšie úlohy

Príklad 6.22. Ako vyzerá zrážka z príkladu (6.18) pre telesá s rôznou hmotnosťou? □

Príklad 6.23. V tomto príklade budeme študovať rozpad nejakého telesa.

- Najskôr v jeho pokojovej sústave. Nakreslite do časopriestorového diagramu svetočiaru telesa, ktoré stojí a v nejakom momente sa rozpadne na dve rovnako ťažké časti. V akom vzťahu musia byť rýchlosti týchto častí, ak požadujeme, aby sa zachovávala hybnosť? Je zrejmé, že táto situácia vyžaduje nejaký zdroj energie v momente rozpadnutia?
- Situáciu teraz pozoruje pozorovateľ, vzhľadom na ktorého sa pôvodné teleso pohybovalo rýchlosťou menšou, ako rýchlosť nových častí. Zakreslite jeho svetočiaru do časopriestorového diagramu. Akou rýchlosťou sa pohybujú vzhľadom na tohto pozorovateľa nové časti pôvodného telesa? Rozmyslite si, že tak ako ho máme napísaný doteraz, v tejto sústave zákon zachovania hybnosti nebude platiť.
- Ako cvičenie nakreslite celý proces z pohľadu pohybujúceho pozorovateľa.

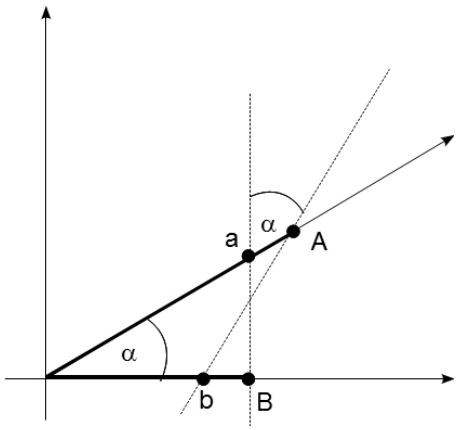
□

Príklad 6.24. Od stojaceho pozorovateľa sú vo vzdialenosti $L, 2L, 3L$ tri lampy, ktoré sa v časoch ct_1, ct_2, ct_3 (tak ako ich odmeria tento stojaci pozorovateľ) rozsvietia. To znamená že na všetky strany začnú vysielať svetlo.

- Ak platí $ct_1 = 4L, ct_2 = 3L, ct_3 = 5L$, v akom poradí uvidí pozorovateľ rozsvietenia lámp? V akých časoch?
- Po ceste popri lampách ide druhý pozorovateľ na aute. V akej vzdialenosti sú pre neho od seba lampy? V akom poradí nastane v jeho sústave roznietenie lámp? V akom poradí toto rozsvietenie uvidí?
- Existuje pozorovateľ, pre ktorého by rozsvietenia prvej a tretej lampy nastalo v opačnom poradí ako pre stojaceho pozorovateľa? Existuje pozorovateľ, ktorý ich uvidí rozsvietiť sa v opačnom poradí?

Úlohu stačí riešiť graficky v časopriestorovom diagrame. V tomto príklade si treba rozmyslieť rozdiel medzi časom, v ktorom roznietenie lampy pre pozorovateľa nastane a časom, v ktorom toto rozsvietenie uvidí (tj. k nemu dorazí jej svetlo). □

Príklad 6.25. Na obrázku je situácia s koncami tyče, ktorej dĺžka má jeden meter, pre stojaceho a pohybujúceho sa pozorovateľa.



Body A, a, B, b postupne označujú

- koniec jednometrovej tyče pohybujúceho pozorovateľa tak, ako ho vidí pohybujúci pozorovateľ,
- koniec jednometrovej tyče stojaceho pozorovateľa tak, ako ho vidí pohybujúci pozorovateľ,
- koniec jednometrovej tyče stojaceho pozorovateľa tak, ako ho vidí stojaci pozorovateľ,
- koniec jednometrovej tyče pohybujúceho pozorovateľa tak, ako ho vidí stojaci pozorovateľ.

Ak označíme vzdialenosti bodov od počiatku rovnako, ako samotné body, dokážte, že ak požadujeme

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \gamma, \tag{6.54}$$

a teda, že obaja pozorovatelia uvidia tyč toho druhého skrátenú rovnakým faktorom, musí platiť

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.55}$$

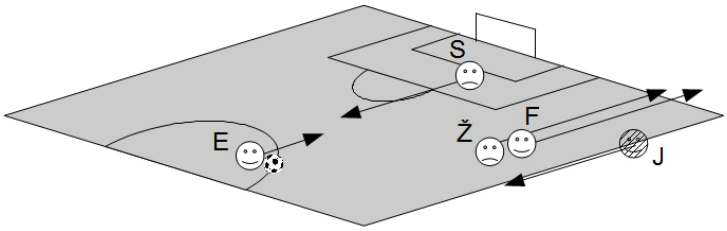
Spomeňte si, že platí $\tan \alpha = v/c$. □

Príklad 6.26. Odvoďte pravidlo o skladaní rýchlosti geometricky priamo z časopriestorového diagramu. □

Príklad 6.27. Dokážte, že ak zavedieme namiesto rýchlosti rapiditu, danú $\beta = \tanh v/c$, bude pre skladanie rapidít platiť $\beta_{u'} = \beta_u + \beta_v$. □

Príklad 6.28. Po ťažkom boji v galaktickej kvalifikácií sa futbalista Emanuel sa so svojim tímom prebojoval do Intergalaktického finále.

1. **Relativistický ofsajd**. V zápase nastala nasledovná sporná situácia. Emanuel mal loptu v strede poľa a postupoval s ňou smerom k súperovej bráne. Jeho spoluhráč, hrotový útočník Fabio, si nabiehal na prihrávku za obranu. V pätách mu je obranca Žiarislav. Stopér Svätoslav videl Emanuelov úmysel nahrať Fabiovi a chcel ich chytiť do ofsajdovej pasce, preto sa rozbehol smerom preč od brány. Čiarový rozhodca John sa pohyboval spoločne s posledným obrancom (pozri obrázok).



E(manuel) pomaly postupuje ihriskom, F(abio) si nabieha za obranu (väčšou rýchlosťou ako Emanuel) a sleduje ho ho obranca Ž(iarislav), S(vätoslav) pripravuje ofsajdovú pascu a rozhodca J(ohn) na postrannej čiare sleduje pohyb S. A stalo sa toto. Emanuel poslal na Fabia dokonale načasovanú prihrávku a teda prihral presne v momente, keď bol (v Emanuelovej sústave) Fabio vo svojom nábehu na úrovni Svätoslava.

   - Videli diváci na štadióne ofsajd? Ofsajd nastane vtedy, ak v momente prihrávky nie je medzi útočiacim hráčom a bránkou žiadny obranca[73].
   - Aký bol verdikt rozhodcu?
   - Bol obranca Žiarislav spokojný s týmto rozhodnutím?

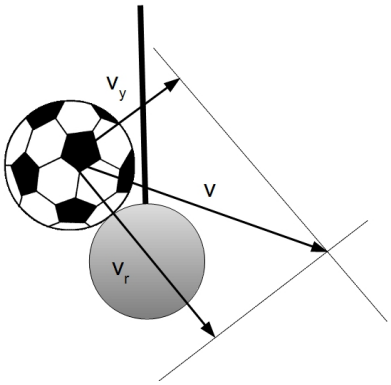
2. **Relativistická penalta**. V riadnom hracom čase ani v predĺžení sa o víťazovi nerozhodlo a tak prišiel na rad penaltový rozstrel. V nervydrásajúcom rozuzlení zobral Emanuel zodpovednosť na svoje plecia a bol to práve on, kto šiel kopať rozhodujúci pokutový kop. Do lopty sa poriadne oprel a stalo sa čosi neočakávané. Lopta sa hneď potom, ako do nej Emanuel kopol rozpadla na dve nové lopty hmotnosti m.

   - Ak mala pôvodná lopta hmotnosť M a tesne pred rozpadom rýchlosť v, aká najväčšia môže byť hmotnosť nových lôpt? Ako sa budú pohybovať v takomto prípade?

[73] Aby to bolo celé úplne podľa pravidiel, v bráne ešte stojí brankár, ale to by už bol text úplne preplácaný.

- Ak majú lopty menšiu hmotnosť ako táto maximálna hodnota a obe sa pohybujú po rovnakej priamke ako pôvodná lopta, aké budú mať rýchlosti?
- Ak sa pohybujú aj v smere kolmom na pôvodný smer, ako môže vyzerať ich rýchlosť?

3. **Relativistická tyčka**. Jedna z lôpt odletela preč, ale druhá trafila tyčku brány tak, ako na obrázku. Môžete predpokladať, že lopta sa odrazí pružne a že tyčka sa nikam nepohne.



v_r je zložka rýchlosti v smere do stredu tyčky, v_y je zložka rýchlosti v smere kolmom. Zvislá čiara je bránková čiara a priestor v bráne sa nachádza napravo od nej.

- Za akých podmienok by gól nastal v nerelativistickom prípade?
- Za akých podmienok nastane gól v relativistickom prípade?

□

Odporúčaná a doplňujúca literatúra

V tejto časti uvedieme niekoľko najzákladnejších a najzaujímavejších zdrojov, po ktorých môžu čitatelia a čitateľky siahnuť pri hľadaní ďalších materiálov. Mnohé idú nad rámec toho, čo je prezentované tu, či už do šírky alebo do hĺbky, prípadne je to isté prezentované inak, čo tiež pomáha porozumeniu.

- Už niekoľko generácií sú základným kameňom akéhokoľvek základného kurzu vysokoškolskej fyziky *Feynmanove prednášky z fyziky*. Je v nich prakticky všetko a z každej strany dýcha Feynmanova geniálna schopnosť rozprávať o fyzike pútavo, zrozumiteľne a pritom precízne.
- Na internete sa dá nájsť mnoho poznámok k podobným kurzom na iných univerzitách. Vhodným kľúčovým slovom je *Classical Mechanics*. (Veľmi subjektívny) Zoznam niekoľkých najzaujímavejších možno nájsť na internetovej stránke kurzu.
- Z nich by som rád spomenul prednášku *Dynamics and Relativity* profesora Davida Tonga z University of Cambridge. Rozsahom aj obsahom sa podobá na náš kurz a na mnohých miestach boli jeho vynikajúce poznámky cennou inšpiráciou pre moje prednášky, najmä v prvých rokoch.
- Druhý internetový zdroj, ktorý zo začiatku prispel k formovaniu tohto kurzu je sada prednášok *Classical Mechanics* profesora Richarda Fitzpatricka z University of Texas. Úrovňou a zameraním je veľmi podobná tomu, čo sa dialo na tomto kurze.